非线性振动理论中的解析方法及工程应用

闻邦椿　李以农　韩清凯　编著



NEUPRESS
东北大学出版社



非线性振动理论中的解析方法及工程应用



ISBN 7-81054-497-7
TH · 15 定价：38.00元

非线性振动理论中的解析方法及工程应用

闻邦椿　李以农　韩清凯　编著

东 北 大 学 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

非线性振动理论中的解析方法及工程应用/闻邦椿，李以农，韩清凯编著. —沈阳：东北大学出版社，2001.10
ISBN 7-81054-497-7

Ⅰ. 非… Ⅱ. ①闻… ②李… ③韩… Ⅲ. 非线性-振动-理论-解析-应用 Ⅳ. TB123

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 032042 号

内 容 提 要

本书从工程实际出发，系统地讲述了非线性振动问题的几种主要解析方法：精确解法、传统小参数法、多尺度法、平均法和渐近法等。讨论了非线性系统周期解的稳定性问题，并对非线性振动系统的图解方法、数值方法做了扼要介绍，从基本原理和应用的角度出发叙述了分岔与混沌，最后讨论了非线性振动的控制和利用的若干结果。

本书可作为工程专业的研究生和高年级本科生及从事振动研究和设计的工程技术人员的参考书。

©东北大学出版社出版
(沈阳市和平区文化路3号巷11号　　邮政编码 110004)
电话：(024)23890881(社务室)　(024)23892538(传　真)
83687331(发行部)　83687332(出版部)
网址：http://www.neupress.com　E-mail：neuph@neupress.com

北宁市印刷厂印刷　　东北大学出版社发行

开本：787mm×1092mm　1/16　字数：568千字　印张：22.75　插页：2
印数：1～1000册

2001年10月第1版　　2001年10月第1次印刷

责任编辑：李毓兴　刘淑芳　　责任校对：米　戎
封面设计：唐敏智　　责任出版：杨华宁

定价：38.00元

作 者 简 介



闻邦椿 原籍浙江温岭，1930年9月生于杭州市，现为东北大学机械工程与自动化学院教授，机械电子工程研究所所长。现任中国振动工程学会理事长，IFToMM（国际机器理论与机构学联合会）中国委员会委员，国际转子动力学技术委员会委员，曾任及现任第六、七、八、九届全国政协委员，国务院学位委员会第二、三、四届机械工程学科评议组成员；亚太振动会议指导委员会委员，目前担任《振动工程学报》主编，《机械工程学报》、《非线性动力学学报》等多种杂志编委及顾问。还兼任上海交通大学“振动、冲击、噪声”国家重点实验室和大连理工大学“工业装备结构分析”国家重点实验室学术委员会主任，浙江大学“液压传动与控制”国家重点实验室学术委员会委员、浙江经济管理专修学院院长等，曾任及现任同济大学、浙江工业大学、吉林工业大学、南京航空航天大学、南京理工大学、合肥工业大学、西南交通大学、青岛海洋大学、广东工业大学等二十余所大学的兼职教授、顾问教授或名誉教授。1984年被评为全国第一批有突出贡献的中青年专家，并享受国家特殊津贴。1991年当选为中国科学院院士。

他系统地研究和发展了振动学与机器学相结合的新学科“振动利用工程学”。还研究了转子动力学、机械系统非线性振动理论及应用、机械故障的振动诊断、机电一体化以及工程机械理论的某些问题。曾发表论文360篇，专著和主编的论文集10余种：专著《振动机械的理论及应用》于1983年获全国优秀科技图书二等奖，参加编写和主编的著作、教材和论文集有《振动筛、振动给料机、振动输送机的设计与调试》、《高等转子动力学》、《机械振动学》、《Proceedings of International Conference on Vibration Engineering'1998》和《Proceedings of International Conference on Mechanical Dynamics'1987》等。

他曾和科研组同志一起研制成功十多种新型振动机械和工程机械，曾获国际奖两项，国家级奖4项，省、部、委级奖10项。所研制的“惯性共振式概率筛”获国家发明三等奖和国际发明博览会“尤里卡”金奖，他还获该博览会的“骑士”奖章一枚；所研制的“激振器偏转式大型冷矿振动筛”获国家科技进步三等奖；有多项成果达到国际先进水平，取得了重大经济效益和社会效益。目前正在从事国家自然科学基金重大项目“大型旋转机械非线性动力学问题”、973和863项目以及其他自然科学基金项目和横向科研等10余个项目的研究工作。

他指导的和联合指导的80余名研究生，有50名取得了硕士学位，有26名取得了博士学位。他还曾指导博士后4名，俄罗斯和哈萨克斯坦访问学者各1名。

曾组织三次国际学术会议，并担任该国际会议的学术委员会主席，主编国际学术会议论文集三种。曾应邀去日、澳、德等国讲学，做过20余次学术报告。还曾参加在前苏联、英国、美国、日本、澳大利亚、意大利、加拿大、芬兰、捷克、保加利亚、匈牙利、西班牙、马来西亚、新加坡等10多个国家召开的国际学术会议20余次，宣读论文40余篇，曾在国际学术会议上多次作大会特邀报告，还曾访问瑞士、瑞典、韩国、泰国、波兰、拉脱维亚、乌克兰等国。他还曾多次被评为辽宁省劳动模范和沈阳市特等劳动模范。



李以农　1961年7月生，籍贯河南新野。工学博士，现为重庆大学机械传动国家重点实验室副教授。

1983年7月毕业于西安公路交通大学汽车工程系，获学士学位。1993年3月在重庆大学汽车系获工学硕士学位。1999年3月在东北大学机械工程与自动化学院获博士学位。

主要从事非线性振动的理论及应用、振动的利用与控制、汽车系统动力学等方面的研究工作。曾参加及主持国家和省、市等科研项目8项。在国内外学术期刊和国际学术会议上发表论文50余篇。1997年9月至1998年9月赴日本东北大学工学部机械电子工学科参加国际合作项目研究。



韩清凯　1969年3月生，原籍山东济宁。工学博士，现为东北大学机械工程与自动化学院副教授，并任副院长职务。1990年在鞍山钢铁学院机械工程系获学士学位。毕业后被推荐免试攻读硕士，1993年3月获硕士学位，1996年在东北大学机械工程与自动化学院获博士学位。

主要从事非线性振动理论与应用、动力有限元分析、机械动态设计及工程机械设计理论的研究工作，曾参加多项国家自然科学基金科研课题的研究，发表论文30余篇，参加编写教材与著作多种。2001年5月至9月在德国莫尼黑大学作访问学者。

前　言

在物质世界里到处存在着各种形式的振动（包括波动）。人类自身的各种器官每时每刻都处在振动之中，例如，心脏的搏动、血液的循环、肺部的张缩呼吸、脑的思维以及耳膜和声带的振动等，离开振动人类将无法生存。从人类的生产活动和生活的周围环境来说，振动也是无处不有，例如汽车、火车、飞机及机械设备的振动；家用电器、钟表的振动；地震以及声、电、磁、光的波动等等。从广义的角度来看，在社会经济生活中，经济的增长与衰减、股市的升跌和振荡等，都可以归纳为不同形式的振动；在自然界及宇宙中，振动和波动的例子也不胜枚举，例如月亮的圆缺、潮汐的涨落、一些植物年复一年的生长与枯萎等等。

振动可分为有害的振动和有用的振动两大类。例如，运载工具的振动会使乘客感到不舒适；环境噪声使人烦躁不安；共振及次谐波共振会引起机械设备、桥梁结构及飞机的破坏。地震使人民生命财产遭受巨大损失，对于这些有害振动，科技工作者已付出了很大努力，设法采取有效措施加以限制以至完全消除。振动也有广泛的用途，合理地利用振动也能给人类造福，改善人民的生活条件。例如，拨动琴弦能发出美妙动人的音乐；在医疗方面，利用超声波能诊断、治疗疾病；在工程建筑中，广泛采用振动沉桩、振动拔桩，以及混凝土灌注时的振动捣固等；在电子和通讯工程方面，录音机、电视机、收音机、程控电话等诸多电子器件以及电子计时装置和通讯系统使用的谐振器等都是由于振动才得以有效地工作；在工程地质方面，利用振动进行检测和地质勘探；在原油开采上，还可利用振动提高原油产量；在海洋工程方面，海浪波动的能量可以用来发电；在工矿企业，利用振动设备可完成许多工艺过程，或提高某些机器的工作效率。最近三十多年来，应用振动原理而工作的机器（振动机械）得到了迅速发展。据不完全统计，目前已用于工业生产的振动机有数百种之多，如振动压路机、振动给料机和振动成型机等。

为了最大限度地抑制那些有害的振动，或者有效地利用那些有用的振动，首要的任务是弄清振动的机理，揭示和了解振动的内在规律及其外部影响因素。因此，对振动的机理进行研究是一项十分迫切的任务。

振动按其特性可分为线性和非线性振动两类。严格地说，绝大多数振动系统都是非线性的，在非线性因素较弱的情况下，非线性振动系统可按线性振动系统来近似处理。但是，工程中的不少非线性振动问题在忽略非线性因素的情况下进行分析与计算，所得结果与实际相比会有很大的误差，甚至会得出错误的结论。这是因为在非线性振动与线性振动之间存在着许多本质的区别，因此只有利用非线性振动的理论和方法，才能弄清那些非线性振动问题。国内外的许多科学工作者曾致力于非线性振动理论的研究，力图提出较完善的方法来处理这些非线性振动问题，非线性振动的研究工作得到了较大的发展，无论是关于定量研究或是定性研究都提出了一些新的方法，关于非线性振动的控制和利用也取得了很大的发展。特别是对混沌现象的揭示及对其研究得到了一些结果，被认为是20世纪科学领域的重大发现和重要成就之一。再由于近30年来计算机技术的迅速发展，许多非线

性振动问题可以借助数值计算与数值模拟方法予以解决，这就使得对非线性振动问题的求解向前推进了一大步。

本书主要讨论非线性振动理论中的解析方法。但为使读者较全面了解非线性振动的其他方法及非线性振动的最新发展，书中还扼要介绍非线性振动系统的图解方法、数值方法及分岔与混沌。虽然直到现在，求解多自由度非线性振动系统还没有精确的解析方法，但近似的解析方法在研究多数弱非线性振动系统时仍然是十分有效的，而且也是科技工作者必须掌握的方法。

本书是作者在从事非线性振动的教学与科研 30 多年的基础上编写而成的。编写的出发点是以工程应用为目的，因此本书以讲述非线性系统定量计算方法为重点，并介绍如何运用这些方法，举出了一些应用实例。有关定性方面的问题只讲述一些必要的基本知识。

本书力图从以下几个方面突出它的特点：

1. 从工程实际问题出发，讨论各种非线性振动问题的求解方法。

2. 为使读者较全面地掌握非线性振动系统的定量求解方法，本书力图较系统地讲述非线性振动问题的各种解法。

3. 提出含有非线性惯性力的非线性振动系统的求解方法。

4. 讨论了工程中常用的多种对称和不对称的分段线性的非线性系统和滞回系统的求解方法。

5. 提出用平均线性化系统代替非线性方程的派生系统，可使求解过程加速对实际工况的逼近。

6. 研究工程中常见的慢变参数系统的分析方法及工程实例。

7. 在“非线性振动方程的解的物理性质”一章中，举出了工程中的频率俘获的例子；在“运动稳定性”一章中，举出若干判别周期运动稳定性的实例。

8. 随着工业自动化的发展，工程非线性振动的控制技术也得到了突飞猛进的发展。本书包括了非线性振动系统控制的内容。

9. 鉴于振动利用工程学的发展，本书还叙述了非线性振动与波动利用技术的一些实际问题。

本书共分十六章，第一章介绍工程中的非线性振动实例及常见的非线性振动方程；第二章讲述非线性振动方程的精确解法；第三章讨论几种传统的近似解法；第四章至第七章讲述单自由度系统传统小参数法，多尺度法，平均法和渐近法；第八章介绍多自由度系统的渐近方法；第九章讨论慢变参数系统的渐近方法；第十章介绍强非线性系统的求解方法；第十一章叙述非线性方程解的物理性质；第十二章讨论周期解的稳定性；第十三章介绍非线性振动的图解方法和数值方法；第十四章介绍分岔和混沌；第十五章和第十六章分别叙述非线性振动系统的控制和利用。

本书第一至第九章、第十一、十二和第十三、十六章的部分内容由闻邦椿编写，第十三章、十四章部分内容由文成秀编写，第十五章及第十六章的部分内容由李以农编写，第十章及本书多数章节的计算与思考由韩清凯编写，第十二章部分内容和第十四章分岔部分及混沌实例由袁惠群编写，本书附录 A 由徐培民编写。在编写本书的过程中，我们曾得到同行专家们的大力帮助，他们对本书的内容提出了不少宝贵的修改意见。这些专家是黄文虎院士、陈予恕教授、徐建学教授、关立章教授、胡海岩教授、金基铎教授等。在完成书稿过程中还得到我的博士后和博士研究生曹宗杰、袁惠群、李鸿光、何勍、徐培民、杨

积东、罗跃纲、金志浩、曾海泉、鲍文博、李振平和陈亚东等的热情帮助。此外，东北大学出版社李毓兴社长及全社同志为本书的出版付出了大量辛勤的劳动。在此一并向他们致以衷心的感谢。

本书可作为大学本科生及研究生的教学参考书或教学用书，还可供从事机械振动和非线性振动研究、设计和实际操作的科技工作者参考。由于水平所限，书中会有许多不妥之处，甚至有错误的地方，希望读者给以指正。

闻邦椿　　2000 年 9 月 18 日

目　录

第一章 工程非线性振动实例

1.1 研究非线性振动问题的工程意义

人类生活在到处存在着振动(包括波动)的物质世界里，这不只是说人的周围环境存在着振动，而且人体自身的许多器官及循环系统也都处在不间断的振动之中。人类从有智慧时起，就开始和那些有害的振动展开了百折不挠的斗争，总是设法预防和限制以至消除它带来的危害，例如对待地震就是如此；另一方面，人类也设法利用那些有用的振动，使它更好地为人民服务，为人类造福。

振动的种类繁多，形式各异，它们存在于各个角落、各种场所、各个部门。例如，建筑物和机器的振动，地震，声和光的波动，无线电技术和电工学中的振动，磁系中的振动，控制系统的振动，同步加速器与火箭发动机中的振动。此外，还有生物力学及生态学中的振动，化学反应过程中的振动，以及社会经济领域中的振动等。自然界与工程技术各部门中存在的振动可分为线性振动与非线性振动两大类。就机械振动而言，线性振动是指该系统中的恢复力、阻尼力和惯性力分别是位移、速度和加速度的线性函数，即在直角坐标中它们之间的关系呈直线变化的形式，不具备上述线性关系的振动则称为非线性振动，自然界与工程技术各部门中的振动，绝大多数都属于非线性振动这一类。

随着工农业生产与科学技术的迅速发展，在工程技术各部门中遇到的大量非线性振动问题亟待进行深入研究和解决。对这类问题的研究工作大致可以分为以下三方面的内容：(1)非线性振动的机理；(2)非线性振动的抑制和控制；(3)非线性振动的利用。

关于非线性振动的机理的研究国内外许多科技工作者进行了大量的卓有成效的研究[1-132]。但在工程技术部门，仍然有许多非线性振动问题的机理研究得还很不充分。例如，对于一些在复杂非线性因素影响下的强非线性多自由度系统的精确求解、复杂时变过程的特性、复杂系统失稳的机理、复杂自激振动的起因和发展过程，一些重大机械设备产生重大事故和发生破坏的原因，亚谐分岔解的形成，混沌运动的产生等等。

在抑制与控制有害的非线性振动的研究工作方面，已取得了许多重要的研究成果[1,3,7,9,10,12,25,26,27,36,38,39,43,45,55,58,90,101,109,127-131]，但也存在大量的问题亟待解决。众所周知，地震会给人民生命财产造成重大损失。但目前有关地震的预报及预防还停留在有限的水平上，直到现在还没有一种较完善的和可靠的技术对地震进行准确的监测、预报和预防。在国内外，重大机械设备屡屡发生严重的破坏事故，每一事故的发生都会造成重大的经济损失，目前虽已研制出一些可进行在线监测和诊断的设备，但其准确性和可靠性还没有达到理想的地步。火箭发射失败多数也是由于振动或控制失灵所引起的，提高其工作可靠性仍是研究工作者一项迫切的任务。在水下航行的潜艇，由于噪声过大，极易暴露目标，如何降低噪声和对噪声进行控制自然是设计与开发潜艇的头等重要的课题。前述例子中的绝大多数是属于非线性振动问题，加强对非线性振动抑制和控制的研究是一项十分迫切的任务。

非线性振动的利用最近二十多年来得到了迅速的发展，无论是在实际应用方面的研究，

还是在理论方面的研究，都取得了许多重要成果[29, 33, 34, 35, , 37, 38, 45, 65, 97, 129, 130, 131, 132]。在人类生活与生产活动中，几乎任何时刻都离不开振动，目前，振动已成为人类生活与工农业生产等许多方面几乎是一种不可缺少的环节和必要的机制。例如，一些作物的种子采用射线适当处理，可以在一定程度上提高产量；在医疗方面，利用超声可治疗与诊断多种疾病；在工程地质领域，利用振动可以对地下资源进行勘探，在石油开采工作中利用振动可提高原油产量；在海洋工程方面，海浪波动的能量可以用来发电；在土建工程中也广泛利用了振动，例如，振动沉拔桩、振动夯土、修筑高速公路时路基与路面的振动压实(压路)与振动摊铺，以及浇灌混凝土时的振动捣实等；在冶金、煤炭、化工、机械、电力、食品加工等部门，广泛应用振动给料、振动输送、振动筛分、振动冷却、振动烘干、振动破碎、振动粉磨和振动脱水等作业过程；在电子仪器和仪表及通讯工程方面，如录音机、电视机、收音机、程控电话、电子计时装置和通讯设备中使用的谐振器等都是由于利用了振动才能有效地工作；人类借助于电磁波实现无线通讯，传递信息，成为当今信息时代人类相互联系不可缺少的桥梁和纽带；光在光导纤维中的传播也是一种特殊形式的波，利用光纤来代替通电的导线，其重大的应用价值是无法估量的。从前面举出的一些例子，不难看出，振动对人类的生活和生产是多么的重要！上述列举的问题绝大多数也都是属于非线性的范畴，这些问题的研究和解决将会大大地促进工农业生产和科学技术的发展，并造福于人类。

近二十多年来，我科研组在非线性振动的机理、非线性振动的抑制与控制以及非线性振动的利用等方面进行研究所取得的成果已发表在相关的著作及国内外的杂志与论文集中[70, 71, 128–276]。

非线性振动的研究工作虽然已取得了许多重要的成果，但到目前为止，对多数非线性振动问题仍采用一些近似方法或在忽略非线性因素的情况下进行分析计算，因而在多数情况下所得结果与实际结果相比有较大的误差，甚至会得出错误的结论，这是因为线性振动和非线性振动有许多本质的区别。因此，在最近一个时期，科技工作者对许多非线性振动问题进行了深入研究，在定量研究或是定性研究方面都提出了一些新的有效的方法。特别是对混沌运动现象的揭示及对其开展的研究工作，被认为是当今科学领域的重大发现和重要成就之一。此外，由于近 20 多年来计算机技术的迅速发展，许多非线性振动问题可以借助数值计算与数值模拟方法予以解决，这就使得对非线性振动问题的求解向前推进了一大步。但是由于非线性振动问题的复杂性，许多非线性问题的彻底解决，在数学和力学上仍存在一定的难度，因而直到现在仍然有许多问题亟待进行深入研究和解决。这些问题包括：

1. 复杂非线性振动系统的建模、系统参数的识别方法与试验；
2. 由气流或其他非线性因素激发的复杂非线性系统振动的机理；
3. 多自由度强非线性振动问题的精确求解方法；
4. 多自由度非线性振动系统的各种类型的分岔；
5. 复杂非线性振动系统的混沌运动；
6. 非线性振动系统失稳机理及系统的局部和全局稳定性；
7. 时变(包括参变、慢变、时滞及瞬态过程)非线性振动系统的特性；
8. 复杂非线性振动系统的自激振动；
9. 带有冲击的非线性振动系统的振动机理与振动特性；
10. 非线性系统的振动及其稳定性的控制；
11. 有关非线性振动的动态过程的机理及利用；

12. 与非线性振动有关的设备或结构破坏的机理及故障的诊断方法；

13. 在复杂因素影响下的非线性波的产生机理及其控制与利用；

14. 板壳及复杂结构在大变形情况下的非线性振动的研究；

15. 复杂建筑结构和大跨度桥梁在特殊载荷下的颤振与驰振；

16. 复杂非线性结构的解耦和数值计算及优化方法。

加强对上述问题的研究，无疑会在不同程度上取得相应的新的进展，并会促进工农业及科学技术进一步的发展，进而为国家创造重大的经济效益和社会效益。

1.2 非线性振动实例

工程中的振动问题可归纳为线性振动和非线性振动两大类。

线性振动可以由以下线性微分方程加以描述。一般机械系统的线性振动方程可表示为

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f(t) \tag{1-1}$$

式中　m——振动的质量；

c——阻力系数；

k——弹簧刚度；

$\ddot{x}$，$\dot{x}$、x——振动的加速度、速度和位移；

$f(t)$——干扰力或激振力；

t——时间。

式(1-1)中的惯性力 $m\ddot{x}$、阻尼力 $c\dot{x}$ 及弹性力 kx 分别是加速度 $\ddot{x}$、速度 $\dot{x}$ 及位移 x 的线性函数，也就是说质量 m、阻力系数 c、弹簧刚度 k 为常数，所以式(1-1)是线性微分方程，用线性微分方程描述的振动系统称为线性系统。

非线性振动可以由非线性微分方程加以描述。多数机械系统的非线性方程可表示为

$$m\ddot{x}+f_c(\dot{x})+f_k(x)=f(t) \tag{1-2a}$$

式中　$f_c(\dot{x})$，$f_k(x)$——分别为非线性阻尼力与弹性力。

当非线性作用力是加速度、速度和位移的函数时，其方程可写为

$$f_m(\ddot{x},\dot{x},x)+f_c(\ddot{x},\dot{x},x)+f_k(\ddot{x},\dot{x},x)=f(t) \tag{1-2b}$$

式中　$f_m(\ddot{x},\dot{x},x)$——非线性惯性力；

$f_c(\ddot{x},\dot{x},x)$——非线性阻尼力；

$f_k(\ddot{x},\dot{x},x)$——非线性弹性力。

在非线性振动的微分方程式中，非线性惯性力、非线性阻尼力或非线性弹性力不是加速度 $\ddot{x}$、速度 $\dot{x}$ 及位移 x 的线性函数，也就是说，惯性力、阻尼力或弹性力并不分别与加速度 $\ddot{x}$、速度 $\dot{x}$ 及位移 x 的一次方成正比。

在某些振动系统中，干扰力也是加速度 $\ddot{x}$、速度 $\dot{x}$ 及位移 x 的非线性函数，其表示式为 $f(\ddot{x},\dot{x},x,t)$。这类方程也是非线性方程，下面对含非线性惯性力的振动系统、含非线性阻尼力的振动系统、含光滑非线性恢复力的振动系统、含分段线性非线性恢复力的振动系统、含滞回恢复力的振动系统、自激振动系统、带有冲击的非线性振动系统、考虑涡动时转子系统的非线性振动、非线性弹性体的振动、非线性波动、含非线性作用力的多自由度的振动系统、慢变参数振动系统、参数激励的振动系统、时滞系统等14类振动问题分别举出应用实

例，并写出它们的运动微分方程式。

1.2.1　含非线性惯性力的非线性振动系统

工业中应用的振动机，如振动输送机、振动冷却机、振动离心脱水机、振动磨机、振动筛、振动给料机和振动落砂机等，都是通过振动对物料进行加工或处理的，在这些工艺过程中，物料有时与振动机体一起运动，有时离开机体，对机体作相对滑动或跳动。因此，在一个振动周期内，计及物料质量的系统是属于含有分段质量的非线性振动系统，该系统包含有非线性惯性力，下面举出两个例子[129,131]。

1．考虑物料断续滑动的弹性连杆式振动输送机的系统

参考图 1-1，当考虑物料沿机体断续滑动时，弹性连杆式振动输送机的运动方程式为

$$m_p\ddot{S}+f_S\dot{S}+m_m\ddot{S}\sin^2\delta+F_m(\ddot{x},\dot{x},x)\cos\delta+kS=k_0(r\sin\nu t-S)$$

$$F_m(\ddot{x},x,x)=\begin{cases} m_m\ddot{S}\cos\delta & \varphi_m \quad 2\pi\leqslant\varphi\leqslant\varphi_k \\ fm_m(g+\ddot{S}\sin\delta) & \varphi_k<\varphi\leqslant\varphi_m \end{cases} \tag{1-3}$$

式中　m_p，m_m——工作机体质量与物料质量；

f_S——阻力系数；

k，k_0——主振弹簧刚度和连杆弹簧刚度；

$\ddot{S}$，$\dot{S}$，S——机体沿振动方向的位移、速度和加速度；

$\ddot{x}$，$\dot{x}$，x，$\ddot{y}$，$\dot{y}$，y——机体沿 x 和 y 方向的位移、速度和加速度，$x=S\cos\delta$，$y=S\sin\delta$；

δ——振动方向角；

$F_m(\ddot{x},\dot{x},x)$——x 方向物料的非线性作用力；

ν——振动频率；

t——时间；

f——物料对机体的动摩擦系数；

φ_k，φ_m——物料止向滑动开始和终止的相位角。

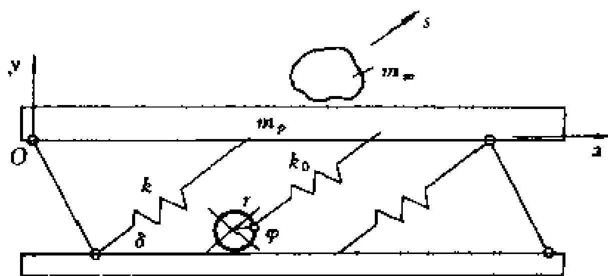


图 1-1　弹性连杆式振动输送机的振动系统

2．被清理的铸件与振动落砂机的机体所组成的振动系统

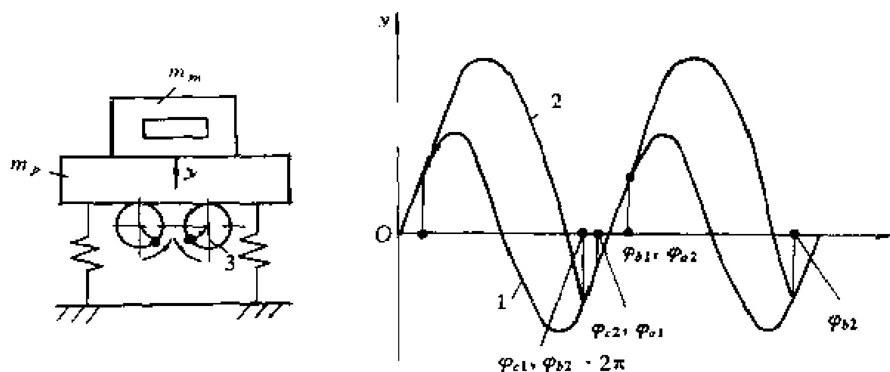
振动落砂机是铸造厂常用的一种振动机械（图 1-2(a)），它利用机体的振动对铸件进行清砂。假如该落砂机上的铸件处在轻微抛掷的情况下工作，则在机体振动的每一周期内，铸件有时与机体接触，在铸件与机体彼此接触的时间内，它们的加速度是相等的；而当振动机体的加速度大于某一定值时，铸件便离开机体作抛掷运动；经过一定时间后它又落到机体上，并与机体产生冲击；然后，又与机体一起运动。因此铸件在机体上的运动可分为三个阶段（如图 1-2(b)）：

符合运动（铸件与机体一起运动）阶段（振动相位角由 $\varphi_{a1}\rightarrow\varphi_{a2}$）；

抛掷运动（铸件被抛起）阶段（振动相位角由 $\varphi_{b1}\rightarrow\varphi_{b2}$）；

冲击运动（铸件落下时与机体产生冲击）阶段（振动相位角由 $\varphi_{c1}\rightarrow\varphi_{c2}$）。

在这三个阶段中，机体的惯性力及铸件对机体冲击作用力的综合表示式为



(a)振动落砂机机构图　　(b)机体与铸件运动位移图

图 1-2　铸件在振动落砂机上运动图

$$f_m(\ddot{y}, \dot{y}, y) = \begin{cases} (m_p + m_m)\ddot{y} & \varphi_{a1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_{a2}, t_{a1} \leqslant t \leqslant t_{a2} \\ m_p\ddot{y} & \varphi_{b1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_{b2}, t_{b1} \leqslant t \leqslant t_{b2} \\ m_p\ddot{y} + F_c(t) & \varphi_{c1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_{c2}, t_{c1} \leqslant t \leqslant t_{c2} \end{cases} \tag{1-4}$$

式中　m_p, m_m —振动机体的质量及铸件的质量；

$F_c(t)$ —冲击作用力；

$t_{a1}, t_{a2}, t_{b1}, t_{b2}, t_{c1}, t_{c2}$——符合运动阶段、抛掷运动阶段和冲击阶段的初始瞬时和终结瞬时；

$\varphi_{a1}, \varphi_{a2}, \varphi_{b1}, \varphi_{b2}, \varphi_{c1}, \varphi_{c2}$——符合运动阶段、抛掷运动阶段和冲击阶段的初始振动相位角和终结振动相位角。

因此，振动落砂机的运动方程是非线性方程，并可由式(1-5)表示：

$$f_m(\ddot{y}, \dot{y}, y) + c\dot{y} + ky = F_0\sin\nu t \tag{1-5}$$

假如铸件在机体上作轻微抛掷运动，冲击作用力可以忽略不计，这时变质量非线性惯性力可表示为：

$$f_m(\ddot{y}, \dot{y}, y) = \begin{cases} (m_p + m_m)\ddot{y} & \varphi_{a1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_{a2}, t_{a1} \leqslant t \leqslant t_{a2} \\ m_p\ddot{y} & \varphi_{b1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_{b2}, t_{b1} \leqslant t \leqslant t_{b2} \end{cases} \tag{1-6}$$

在这种情况下，非线性特性的产生来源于一个周期内铸件抛离工作机体表面而引起整个振动系统质量的变化。

铸件抛离工作机体的相位角 $\varphi_{b1}, \varphi_{b2}$ 可按照振动机上物料运动的理论进行计算[131]，而铸件与机体接触的相位角 $\varphi_{a1}, \varphi_{a2}$ 可按式(1-7)算出：

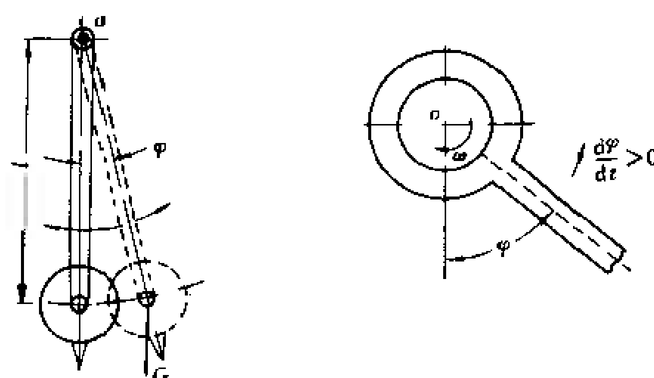
$$\varphi_{a2} = \varphi_{b1} \qquad \varphi_{b2} = \varphi_{a1} + 2\pi \tag{1-7}$$

当振动落砂机的参数确定以后，便可求出 $\varphi_{a1}, \varphi_{a2}, \varphi_{b1}, \varphi_{b2}$，进而可求出非线性方程的解。

1.2.2　含非线性阻尼力的非线性振动系统

含非线性阻尼力的振动系统的工程实例很多，用于测量轴承与轴销之间干摩擦系数的摩擦摆；高速列车行驶时气体的阻力(其中包括平方阻尼或立方阻尼等)及材料产生弹性塑性变形时所包含的非线性阻尼等。

测量轴承与轴销之间干摩擦系数的摩擦摆是具有库仑阻尼与速度平方阻尼的振动系统。图 1-3a 表示了用于测量轴承与轴销之间干摩擦系数的摩擦摆的示意图。



(a)摩擦摆　　　　(b)弗洛特摆

图 1-3　测量轴承与轴销之间摩擦系数的摩擦摆与弗洛特摆

摆的运动微分方程式可表示为

$$J\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = mr(g\cos\varphi + l\dot{\varphi}^2) f\frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|} \tag{1-8}$$

式中　J——摆对悬挂点的转动惯量；

m——摆的质量；

l——摆的质心至悬挂点之距；

r——轴的半径；

f——轴承与轴销之间摩擦系数；

φ——摆的摆动角度。

在摆动角度不很大的情况下，上式中的 $\cos\varphi$ 和 $\sin\varphi$ 可展为

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \cdots \\ \sin\varphi &= \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \cdots\end{aligned} \tag{1-9}$$

在这种情况下，式(1-9)可写为

$$J\ddot{\varphi} + mgl\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6}\right) = mr\left[g\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) + l\dot{\varphi}^2\right]\cdot f\frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|} \tag{1-10}$$

或
$$J\ddot{\varphi} + mgl\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6}\right) + mgr\frac{\varphi^2}{2}f\frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|} = mr[g + l\dot{\varphi}^2]\cdot f\frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|}$$

上式中等号后第一项为干摩擦，第二项为速度平方阻尼。

1.2.3　含光滑非线性恢复力的振动系统

弗洛特摆是带光滑软式非线性恢复力的振动系统；为了增加电磁振动给料机振幅的稳定性，有时将该机中的板弹簧的支承夹紧装置制成曲线形，该系统属光滑硬式非线性振动系统；由板弹簧支承的卡车是带光滑不对称弹性力曲线的非线性振动系统；离心调速器是具有特殊型式的光滑恢复力的非线性系统；曲线船体在水中作垂直方向振动时具有不对称的曲线光滑的恢复力。

1. 利用弗洛特摆测量轴承的摩擦系数

文章[62,63]对该摆测定了轴与内套之间的动摩擦系数，图 1-3b 为其力学模型，转动轴

上的外套及摆的内套为一组试件，滑动面半径为 r，摆的重心至转动轴心距离为 l。当轴以角速度 Ω 逆时针转动时，摩擦力将带动摆偏转 φ 角度。

摆的运动微分方程为

$$J\ddot{\varphi}=M_r-mgl\sin\varphi-ul\dot{\varphi} \tag{1-11}$$

式中　J——摆的转动惯量；

m——摆的质量；

M_r——摩擦力矩；

u——空气阻力系数；

r——轴半径；

l——摆的质心至悬挂点之距；

φ——摆的摆动角度。

摩擦力矩 M_r 可表示为

$$M_r=(mg\cos\varphi+ml\dot{\varphi}^2)rf(\Omega-\dot{\varphi}) \tag{1-12}$$

摩擦系数 $f(\Omega-\dot{\varphi})$ 是相对速度的函数，将式(1-12)代入式(1-11)，得

$$J\ddot{\varphi}=(mg\cos\varphi+ml\dot{\varphi}^2)rf(\Omega-\dot{\varphi})-mgl\sin\varphi-ul\dot{\varphi}$$

当转轴以角速度 Ω 或 ν 转动而摆处于静平衡状态时，有 $\ddot{\varphi}=\dot{\varphi}=0$，这时 $\varphi=\varphi_0$，则有

$$rf(\Omega)\cos\varphi_0-l\sin\varphi_0=0 \tag{1-13}$$

即

$$f(\Omega)=\frac{l}{r}\tan\varphi_0\quad 或\quad f(\nu)=\frac{l}{r}\tan\varphi_0$$

式中　ν——转动频率；

φ_0——摆的初始偏角。

在实验过程中摆处于静止不动时，则偏角 φ_0 极易测出，从而由式(1-13)可计算出动摩擦系数 $f(\nu)$ 的值，改变轴的转速，又可测出另一转速下试件的动摩擦系数。

动滑动摩擦系数 $f(\nu)$ 有以下表示式

$$f(\nu)=a-b\nu+c|\nu|\nu+d\nu^3 \tag{1-14}$$

式中　a,b,c,d——系数，可由不同转速下的实验结果加以确定。

2. 固定端具有曲线形状压板弹簧的电磁振动给料机

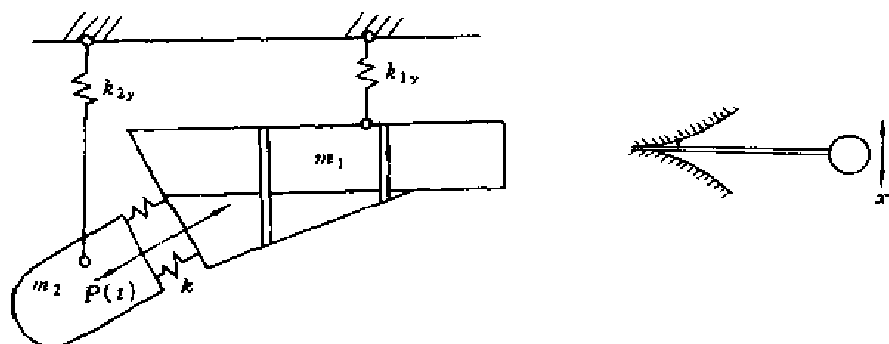


图 1-4　有曲线形压板的电磁振动给料机

为了增加该种给料机振幅稳定性，有时在板弹簧固定部位加上曲线形的压板。电磁振动给料机为双质体振动系统(见图 1-4)，其振动机体的运动微分方程式为

$$m_1\ddot{x}_1 + kx + bx^3 + dx^5 = F_0 + F_1\sin\nu t_1 + F_2\sin 2\nu t_2$$
$$m_2\ddot{x}_2 - kx - bx^3 - dx^5 = -F_0 - F_1\sin\nu t_1 - F_2\sin 2\nu t_2 \tag{1-15}$$

式中　m_1 和 m_2 ——质体 1 和 2 的质量；

k, b, d ——刚度系数；

F_0, F_1, F_2——固定力与一、二次谐波激振力幅；

x_1, x_2 和 x——质体 1 和 2 的位移及相对位移；

ν——激振频率；

t_1, t_2——时间。

1.2.4　含分段线性非线性恢复力的振动系统

含分段线性的非线性恢复力的振动系统在工业部门中得到了广泛的应用。例如，用于输送松散物料的弹性连杆式振动输送机、用于煤泥或细粒煤脱水的振动离心脱水机、在钨矿选矿厂中用于精选钨矿的弹簧摇床和用于筛选矿石或煤炭的惯性式共振筛、由分段线性弹簧组成的隔振系统、有预先压缩和限位的弹性联轴节、由叠层板弹簧支承的货车等，都属于这一类非线性振动系统[129, 131, 132]。

1. 硬式分段线性非线性弹性连杆式共振筛

图 1-5(a)表示了分段线性非线性单质体共振筛的示意图，图 1-5(b)为力学模型。

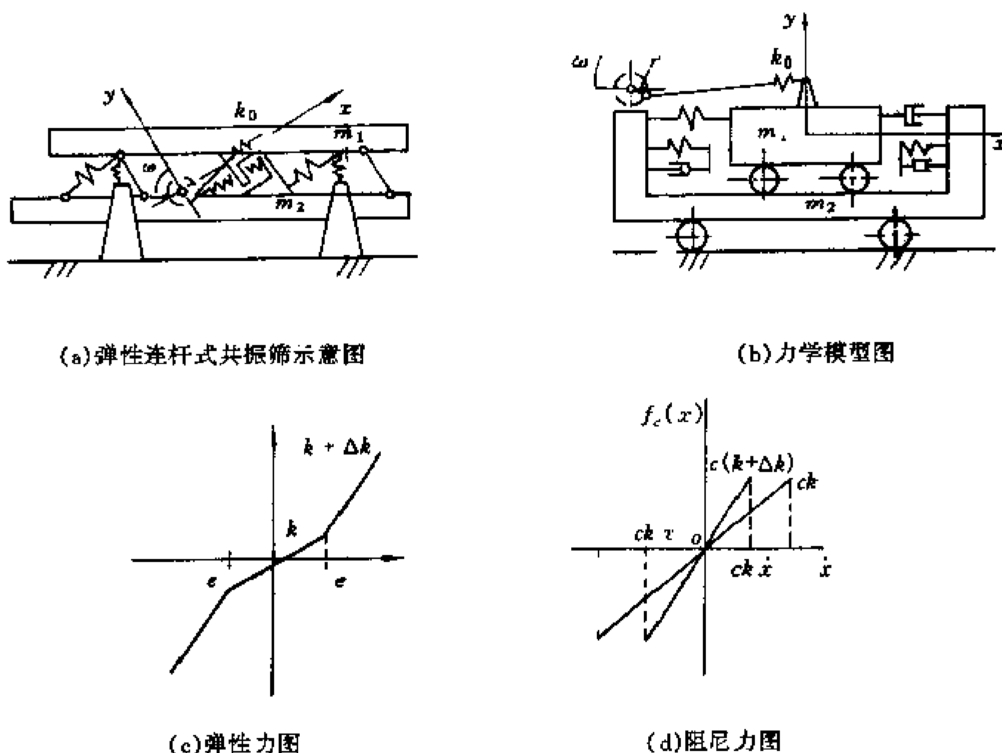


图 1-5　弹性连杆式共振筛及其力学模型

虽然该种共振筛中的各种弹簧均为线性弹簧，但机体运动到不同区段时，弹簧刚度与弹性力是不相同的，也就是说可将一个运动周期按弹簧刚度与弹性力大小划分成几个线性区段，因此这种系统称为分段线性的非线性振动系统。

参照图 1-5 可写出用相对位移 x 表示的运动方程式及弹性力和阻尼力的数学表达式：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f_c\left(\frac{dx}{dt}\right)+f_k(x)=0 \tag{1-16}$$

$$f_k(x)\quad\begin{cases}kx & -e\leqslant x\leqslant e,\quad \varphi_e\leqslant\varphi<\varphi_e,\pi\quad\varphi_e\leqslant\varphi\leqslant\pi+\varphi_e\\ kx+\Delta k(x-e) & e\leqslant x,\varphi_e\leqslant\varphi\leqslant\pi-\varphi_e\\ kx+k(x+e) & -e\geqslant x,\pi+\varphi_e\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\quad\varphi_e\end{cases}$$

$$f_c\left(\frac{dx}{dt}\right)=\begin{cases}ck\dfrac{dx}{dt} & -e\leqslant x\leqslant e,\ \cdot\varphi_e\leqslant\varphi\leqslant\varphi_e,\pi-\varphi_e\leqslant\varphi\leqslant\pi+\varphi_e\\ c(k+\Delta k)\dfrac{dx}{dt} & e\leqslant x,\varphi_e\leqslant\varphi\leqslant\pi-\varphi_e,x\leqslant\quad e,\pi+\varphi_e\leqslant\varphi\leqslant 2\pi-\varphi_e\end{cases} \tag{1-17}$$

式中　k　—无间隙线性弹簧的刚度；

Δk　—带有工作间隙弹簧的刚度；

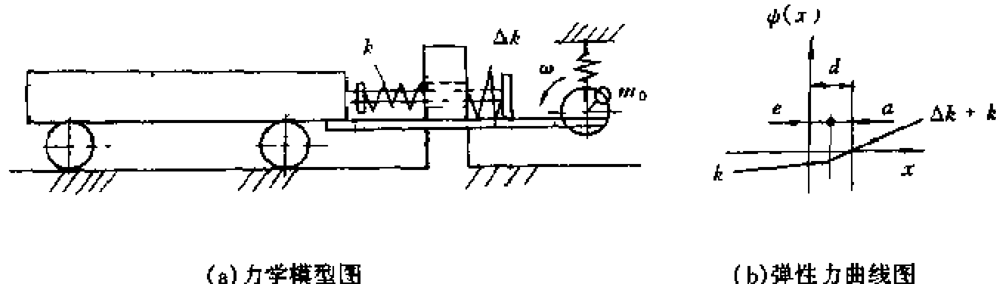
e——间隙弹簧的间隙值；

φ_e——与硬弹簧间隙相对应的相位，$\varphi_e=\arcsin(e/A)$，A 为振幅。

因为该系统的弹性力是折线变化的，当位移超过临界值 e，其刚度（折线的斜率）突然增加，所以该系统为"硬特性"的非线性系统。

2．软式分段线性非线性弹簧摇床

图 1 6 表示该系统的力学模型及弹性力图。



(a)力学模型图　　　　(b)弹性力曲线图

图 1-6　软式分段线性非线性弹簧摇床的振动系统

当振动质体的位移超过某定值 e 时，弹性力发生折线变化，即其刚度突然减小。因此该系统属于软特性非线性系统，其运动方程式可表示为

$$m\ddot{x}+f_c(\dot{x})+f_k(x)=F_0\sin\nu t \tag{1-18}$$

非线性阻尼力 $f_c\left(\frac{dx}{dt}\right)$ 与非线性弹性力 $f_k(x)$ 可表示为

$$f_c\left(\frac{dx}{dt}\right)=\begin{cases}(f+\Delta f)\dfrac{dx}{dt} & x\geqslant -a\\ f\dfrac{dx}{dt} & x\leqslant -a\end{cases} \tag{1-19}$$

$$f_k(x)\quad\begin{cases}-k(a_0-a-x)+\Delta k(x+a) & x\geqslant -a\\ k(a_0-a-x) & x\leqslant -a\end{cases}$$

式中　　a ——静止状态下硬弹簧的压缩量；

a_0-a——静止状态下软弹簧的压缩量；

$k,\Delta k$ ——软弹簧与硬弹簧的刚度；

$f,\Delta f$——软弹簧与硬弹簧工作区段的阻力系数。

1.2.5　含滞回恢复力的非线性振动系统

含滞回非线性恢复力的振动系统有振动成型机、振动压路机、振动沉拔桩机、利用振动使材料产生塑性变形的轧机、在超载负荷作用下的建筑结构等。

1. 振动沉桩过程

振动沉桩过程可视为带有对称滞回特性的非线性系统，运动方程式可表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + f_k(x) = 0 \tag{1-20}$$

对称的滞回非线性系统（下式为半个周期的数学表达式）：

$$f_k(x) = \begin{cases} k(A\sin\omega t - b) & 0 \leqslant \omega t \leqslant \pi/2 \\ k(A - b) & \pi/2 \leqslant \omega t \leqslant \pi - \varphi_e \\ k(A\sin\omega t + b) & (\pi - \varphi_e) \leqslant \omega t \leqslant \pi \end{cases} \tag{1-21}$$

$$\varphi_e = \arcsin\left(\frac{A - 2b}{A}\right)$$

式中　k——刚度；

b——与塑性变形量相关的系数；

A——振幅；

φ_e——屈服点对应的相位角。

2. 含不对称滞回恢复力的振动压路机振动系统

振动压路机压实土壤的过程，土壤随着带有振动的压实轮的运动，将产生弹性变形与塑性变形，当轮体向下运动时，压实作用力按弹性和塑性变形两个阶段变化。当轮体回程时，土壤已产生塑性变形，所以只能产生弹性变形。因此，振动压实的一个周期将出现不对称的滞回过程[208]。振动轮体作用土壤的运动方程式为含不对称滞回恢复力与阻尼力的非线性方程，其表示式为（一个周期的数学表示式）

$$f_k(x) = \begin{cases} k_1(A\sin\omega t - b) & -\varphi_e \leqslant \omega t \leqslant \pi/2 \\ k(A - b) & \pi/2 \leqslant \omega t \leqslant \pi - \varphi_e \\ k_2 A\sin\omega t & (\pi - \varphi_e) \leqslant \omega t \leqslant 2\pi - \varphi_e \end{cases} \tag{1-22}$$

$$\varphi_e = \arcsin\left(\frac{A - 2b}{A}\right)$$

式中　A——振幅；

b——与塑性变形量相关的系数；

φ_e——屈服点对应的相位角；

k_1, k_2——刚度系数。

1.2.6　自激振动系统

初轧机轧制钢锭时，由于存在负阻尼而在主传动系统中出现的振动，车刀切削工件时产生的振动，高层建筑及大跨度桥梁在风载下引起的振动，气动及液动活塞与阀杆的振动，选煤厂用煤炭精选的无活塞跳汰机的振动，蒸汽机的振动，手表与挂钟的振动，电子振荡器的振动等，都属于自激振动。有些自激振动是摩擦引起的，另外一些自激振动则是系统的结构特性与动力特性决定的。

1．电子振荡器的自激振动[6,8,14]。

电子振荡器的方程可由以下 van der Pol 方程表示

$$\frac{d^2x}{dt^2}-(1-x^2)\frac{dx}{dt}+kx=0 \tag{1-23}$$

2．初轧机轧制钢锭时的自激振动[58,59,60,61]。

当初轧机轧制钢锭时，常常会产生自激振动[58,59]。出现自激振动的原因是系统中存在负阻尼。钢锭与轧辊间的摩擦力矩可表示为

$$fN\frac{D}{2}=M_0-c\varphi+d\varphi^3 \tag{1-24}$$

式中　f —轧辊与钢锭间的摩擦系数；

N —轧辊与钢锭间的正压力；

D —轧辊直径；

M_0——不变摩擦力矩；

c,d——系数；

φ——轧辊回转角速度。

初轧机主传动系统的运动方程式可表示为

$$J\dot{\varphi}-c\varphi+d\varphi^3+k\varphi=-M_0+M(t) \tag{1-25}$$

式中　J——整个传动系统诱导至轧辊上的转动惯量；

k——传动系统的扭转刚度；

$M(t)$——主传动系统诱导至轧辊上的等效驱动力矩。

3．车刀切削工件时由于摩擦所产生的自激振动

车刀卡紧在刀架上时，可看作是具有一定刚度的弹簧。当工作时车刀与工件之间将产生一定大小的摩擦力，即

$$\varphi\left(\frac{dx}{dt}\right)=kS_0-F\left(v_0-\frac{dx}{dt}\right)=F(v_0)-F\left(v_0-\frac{dx}{dt}\right) \tag{1-26}$$

$$f_0=kS_0=F(v_0)$$

式中　k——刚度；

x —在工作状态下，刀尖相对于平衡位置的位移；

S_0 —刀尖的平均变形量；

v_0——车刀与工件接触点处的相对速度；

f_0——车刀变形时产生的弹性力。

由此可导出车刀振动的微分方程式：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=F(v_0)-F\left(v_0-\frac{dx}{dt}\right) \tag{1-27}$$

当工件在某一定转速下回转时，会产生严重的自激振动，并会影响工件的加工质量。

1.2.7　考虑涡动时非轴对称转轴和单盘转子系统[117]。

如图 1-7 所示，由于转轴的弯曲刚度在不同平面内是不相同的，先在旋转坐标系 $O'\xi'\eta'z'$ 中研究圆盘的运动，再变换到固定坐标系上。在盘心 O' 点上作与固定坐标系 $Oxyz$ 相平行的坐标系 $O'x'y'z'$，并作随圆盘旋转的动坐标系 $O'\xi'\eta'z'$，并令 $O'\xi'$ 和 $O'\eta'$ 是轴截面上的

两个主惯性轴。转子以速度 ω 绕$O'z'$轴自转。设轴的两个截面上的主惯性矩为 J_ξ 和J_η，轴的长度为 l，则轴的弯曲刚度为

$$k_\xi=\frac{48EJ_\xi}{l^3},\quad k_\eta=\frac{48EJ_\eta}{l^3} \tag{1-28}$$

圆盘质量的偏心为 e，相对动坐标系的相位角为 φ_e，于是有

$$e_\xi=e\cos\varphi_e,\ e_\eta=e\sin\varphi_e$$

当考虑转子涡动，即转子的陀螺效应时，转子系统的运动微分方程式如下式所示：

$$\begin{aligned}&m(\ddot\xi-\omega^2\xi-2\omega\dot\eta)+c(\dot\xi-\omega\eta)+c_i\xi+k_\xi\xi=me\omega^2\cos\varphi_e+mg\cos\omega t\\&m(\ddot\eta-\omega^2\eta+2\omega\dot\xi)+c(\dot\eta-\omega\xi)+c_i\eta+k_\eta\eta=me\omega^2\sin\varphi_e-mg\sin\omega t\end{aligned} \tag{1-29}$$

式中　m——圆盘质量；
g——重力加速度；
e——圆盘的偏心；
ω——转轴的转速；
φ_e——相对动坐标系的相位角；
c——圆盘的外阻力系数；
c_i——弹性轴的内阻力系数；
k_ξ,k_η——弹性轴的刚度；
$\xi,\dot\xi,\ddot\xi,\eta,\dot\eta,\ddot\eta$——圆盘在动坐标上的位移、速度与加速度；
t——时间。

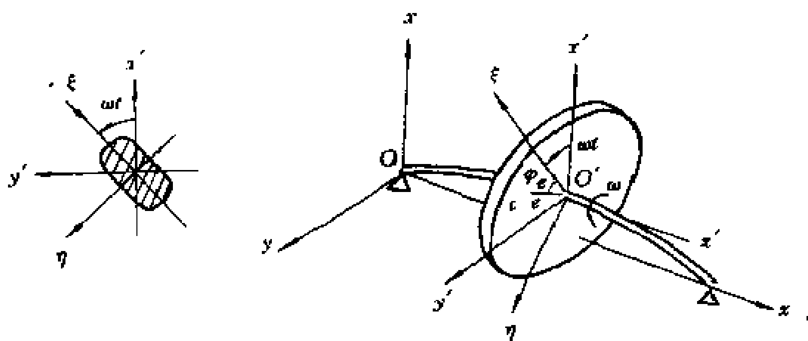


图 1-7　具有涡动的非轴对称转轴的转子系统示意图

1.2.8　带有冲击的非线性振动系统

振动夯土机、冲击锤锻机、气动或液压凿岩机、气动或液压碎石机、柴油打桩机及蒸汽锤等都可视为带有冲击的非线性振动系统进行研究。

1. 气动凿岩机活塞冲击钎杆的过程[229,230]

对钎杆具有冲击的活塞的运动微分方程式为

$$m\ddot x+kx=\begin{cases}\Delta P_1(t), & x_0\geqslant x\geqslant 0\\ \Delta P_2(t), & x\leqslant 0\\ \Delta P_2(t)+P_3, & x\geqslant x_0\end{cases} \tag{1-30}$$

式中　m——活塞质量；

$\Delta P_1, \Delta P_2$——正反行程活塞两侧的压力差；

P_3——活塞与钎杆撞击时的冲击作用力。

上式中碰撞点为：$x = x_0$

2. 蛙式夯土机夯头的运动[129,136]

图 1-8 表示了蛙式夯土机的工作机构。这种机器每个振动周期对土壤产生一次冲击，并往前移动一个距离。

参照图 1-8 可写出夯头架绕 O 点摆动的运动方程式及机座移动的方程式：

$$J\ddot{\psi} = m_1 r\omega^2 l_1 \sin(\varphi + \alpha_0 + \psi) - G_1 l_1 \cos(\alpha_0 + \psi) - G_2 l_2 \cos(\alpha_0 + \psi - \delta)$$

$$\frac{G}{g}\ddot{x} \approx m_1 r\omega^2(-\cos\varphi + f\sin\varphi) + (G_1 + G_2)\omega_2{}^2 l_c[\cos(\alpha_0 + \psi) + f\sin(\alpha_0 + \psi)] - fG \tag{1-31}$$

$$J = \frac{G_1}{g}l_1^2 + \frac{G_2}{g}l_2^2,\ G = G_1 + G_2 + G_3$$

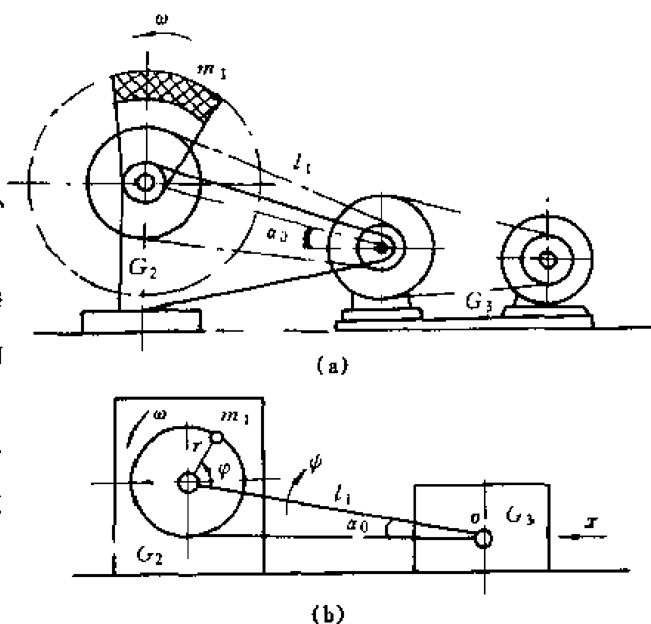


图 1-8　蛙式夯土机机构示意图

式中　J——夯头架绕轴线 O 之总转动惯量；

m_1 和 r——偏心块质量及偏心距；

ω, ω_2——分别为偏心块回转角速度与夯头摆动的角速度；

G_1, G_2 和 G_3——分别为偏心块、夯头及电动机架体托盘部分之重量；

ψ 和 $\ddot{\psi}$——夯头摆动角度和摆动角加速度；

$\ddot{x}$——机座移动加速度；

l_1, l_2 和 l_c——分别为摆杆长度、夯头质心至摆动中心距离及其合成质心至摆动中心之距；

α_0——摆杆与水平面的夹角；

f——底架与地面摩擦系数；

φ——偏心块回转角，$\varphi = \omega t$；

δ——O_1O_2 与 O_1C_2 之间的夹角。

1.2.9　含非线性因素的弹性体的振动系统

含有非线性因素的悬挂钢绳的横向振动，大长度振动输送机槽体的横向弹性弯曲振动，振动沉拔桩机工作时桩在纵向周期力的作用下产生的弹性弯曲振动，以及机器中板壳构件在大变形情况下的振动等，都属于这一类。

1. 高空电线的风致振动

考虑风对电线上作用的非线性作用力时，其运动的微分方程式为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\varepsilon\left[\alpha\frac{\partial u}{\partial t}-\beta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^3\right]=0 \tag{1-32}$$

式中　u——振动位移；

α,β——阻力系数；

x——电缆的广义位移；

t——时间。

2. 振动沉拔桩机工作时桩在纵向周期力的作用下产生的弹性弯曲振动

图1-9表示振动沉拔桩机桩上相互作用的力学模型，桩横向弯曲与纵向弹性振动的运动微分方程式为

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+c(x)\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(EJ\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[N(t)\frac{\partial y}{\partial x}\right]+k(x)y=0$$

$$m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+c(x)\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(EJ\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)+k'(x)z=0 \tag{1-33}$$

式中　y和z——桩的横向和纵向位移；

m——单位桩长的质量；

E——桩材料的弹性模量；

J——桩截面的惯性矩；

A——桩材的截面积；

$k'(x)$，$k(x)$和$c(x)$——土的刚度和阻力系数；

$N(t)$——桩的轴向力。

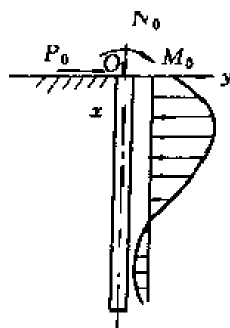


图1-9　桩土相互作用的力学模型

因为桩的下端为自由，桩的上端作用有载荷，所以其边界条件为

$$\begin{cases}M_{x=0}=-EJ\left.\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=0}=M_0(t)\\ S|_{x=0}=\left.\left[\dfrac{\partial M}{\partial x}-N(t)\dfrac{\partial y}{\partial x}\right]\right|_{x=0}=-P_0(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}M|_{x=l}=-EJ\left.\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=l}=0\\ S|_{x=l}=\left.\left[\dfrac{\partial M}{\partial x}-N(t)\dfrac{\partial y}{\partial x}\right]\right|_{x=l}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}y|_{x=l}=0\\ \theta|_{x=l}=\left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=l}=0\end{cases} \tag{1-34}$$

式中　M——转矩；

S——剪力；

θ——转角

$M_0(t)$——桩上端点的转矩；

$P_0(t)$——桩上端点的横向作用力；

l——桩的长度。

桩端的位移与转角为

$$\begin{cases} y\big|_{x=0}=y_0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x=0}=\theta_0 \end{cases} \tag{1-35}$$

$$\begin{cases} EA\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=0}=-N_0(t) \\ EA\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=l}=-k_yA_lz\big|_{x=l} \end{cases}$$

式中　k_y——地基垂直方向反力系数；

A_l——桩上端点的截面积；

y_0——桩上端点的纵向位移；

θ_0——桩上端点的转角；

$N_0(t)$——桩上端点的垂向作用力。

1.2.10　非线性波动系统[3,36]

考虑非线性因素时海浪的波动；振动采油时非线性应力波的传递；气动或液压式凿岩机械钎杆应力波的传递；冲击式振动机冲击杆应力波的传递过程；考虑传递过程中非线性因素的声波与超声波的传播过程等，都属于这一类。

波的传递过程可分为两大类，一类是纵波，另一类是横波。气动及液压式凿岩机械钎杆应力波的传递过程属于纵波的一类。我们考虑沿杆传播的为非线性波，设杆的长度为 L，密度为 $\rho(x)$，弹性模量为 $E(x)$，横截面积为 $A(x)$，$u(x,t)$ 表示初始时位于 x 处的一个杆截面在时刻 t 的纵向位移[3]。其截面的运动方程式为

$$\rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}(A(x)\sigma) \tag{1-36}$$

式中　σ——纵向应力。

设应力 σ 与应变 e 有以下非线性关系：

$$\sigma=E(x)e(1+E_1e+E_2e^2+\cdots)=E(x)\frac{\partial u}{\partial x}\left[1+E_1\frac{\partial u}{\partial x}+E_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\cdots\right] \tag{1-37}$$

代入上式有

$$\rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{A(x)E(x)\frac{\partial u}{\partial x}\left[1+E_1\frac{\partial u}{\partial x}+E_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\cdots\right]\right\} \tag{1-38}$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\frac{1}{A(x)E(x)}\frac{\partial(A(x)E(x))}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\left(1+E_1\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\left[2E_1\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial E_1}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]+\cdots \tag{1-39}$$

式中　$c_0^2=\dfrac{E(x)}{\rho(x)}$

1.2.11　含弱非线性作用力的多自由度建筑结构的振动

多自由度建筑结构系统可用以下微分方程来描述，具有 n 个自由度的方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F}(t)+\varepsilon\boldsymbol{Q}_1(\boldsymbol{X},\dot{\boldsymbol{X}})+\varepsilon^2\boldsymbol{Q}_2(\boldsymbol{X},\dot{\boldsymbol{X}}) \tag{1-40}$$

式中　$\boldsymbol{X}\in R^n$ 为系统的位移；$\boldsymbol{M}\in R^{n\times n}$，$\boldsymbol{C}\in R^{n\times n}$，$\boldsymbol{K}\in R^{n\times n}$ 分别为质量矩阵、阻尼矩阵

和刚度矩阵。$Q_1 \in R^{n\times n}$和$Q_2 \in R^{n\times n}$分别是非线性作用力矩阵。

1.2.12 带慢变参数的非线性振动系统[2,147]

所谓"慢变"是指"变化"相对于振动周期而言十分缓慢，即指振动系统参数的变化不是在一个振动周期内完成，而是经过多个或很多个振动周期内才有较明显的变化。在工程中慢变参数的非线性振动系统的例子很多，例如，火箭发射过程由于固体燃料随着时间而不断燃烧，火箭的质量是时间的慢变函数，远程火箭多数是多级的，因此这类火箭是分段慢变的非线性振动系统；飞机在飞行过程中汽油随着时间而不断减少，所以也是一种慢变质量的系统；矿井提升机的钢绳在提升和下放过程中，随着钢绳长度的变化，提升机的振动系统的计算质量和系统的刚度是慢变的；振动压路机压实土壤的过程，其恢复力的滞回曲线是慢变的；控制智能结构振动的过程是慢变的控制过程；发动机的转子当存在一定大小的偏心时，在起动和停车过程中由于转速的变化，其离心力是随时间慢变的；裂纹转子裂纹的扩展使其弯曲刚度发生变化，因此该系统是慢变刚度的振动系统。此类例子，不胜枚举。下面仅以矿井提升机罐笼与钢绳组成的慢变振动系统为例，介绍此类非线性振动系统。

图 1-10 是矿井提升机的力学模型[146,147]。考虑钢绳质量的矿井提升机罐笼与钢绳组成的振动系统属于慢变质量和慢变刚度的振动系统。在提升重物的过程中，系统的质量和刚度随着钢绳的伸长与缩短而连续地变化，由于质量和刚度的变化引起的系统固有频率十分缓慢的变化，因此这是一种具有慢变参数的非线性系统。其运动微分方程可由式(1-41)来描述：

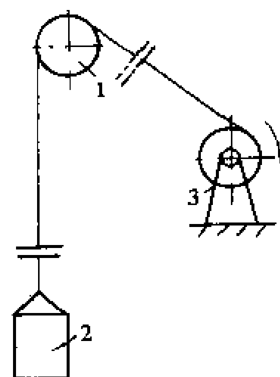


图 1-10　矿井提升机的力学模型
1—天轮，2—罐笼；3—提升机卷筒

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m(\tau)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right]+c\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+k(\tau)y=0 \tag{1-41}$$

式中　$m(\tau)$——慢变质量；

$k(\tau)$——慢变刚度；

c——阻力系数；

τ——慢变时间，$\tau=\varepsilon t$，ε 为小参数；

$\ddot{y},\dot{y},y$——罐笼的加速度、速度与位移。

式(1-41)中的慢变质量与慢变刚度是由于钢绳的伸长与缩短引起的，可由式(1-42)计算：

$$m(\tau)=m_p+\frac{1}{3}\gamma L(\tau) \tag{1-42}$$
$$k(\tau)=AE/L(\tau)$$

式中　E——钢绳的弹性模量；

γ——钢绳单位长度的质量；

$m(\tau)$——慢变质量；

$L(\tau)$——慢变长度；

m_p——罐笼的质量。

因而，罐笼与钢绳组成的振动系统的非线性方程式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\left[m_p+\frac{1}{3}\gamma L(\tau)\right]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right\}+c\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{AE}{L(\tau)}y=0 \tag{1-43}$$

除此之外，我们还可以找出许多其他例子。例如利用可变支承刚度对转子振动进行主

动控制的慢变振动系统等等。

1.2.13 参数激励的振动系统[1,3]

开闭裂纹转子的微分方程式是参数激励的振动系统、两端在纵向周期力作用下受压绞接杆的横向振动和秋千的运动等，都属于这一类。

1．振动锤工作时杆的工况是两端为铰接的并受纵向周期力作用的杆件。其纵向振动的方程式为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+P^2\left\{1-\frac{L^2\pi F}{EJ^2}\cos t\right\}x=f(x,\dot{x}) \tag{1-44}$$

式中　P——杆的纵向作用力；

L——杆的长度；

F——杆的断面积；

E——弹性模量；

J——杆的断面惯性矩；

x——横向位移；

$f(x,\dot{x})$——非线性函数。

2．秋千是一种可变长度的摆，其运动方程式为

$$\frac{d}{dt}\left\{ML^2(t)\frac{dx}{dt}\right\}+GL(t)\sin x=0 \tag{1-45}$$

式中　M——人体与秋千踏板的质量；

$L(t)$——随时间而变化的质心至悬挂点的长度；

G——人体与秋千踏板的重量；

x——摆动角度；

t——时间。

1.2.14 含非线性作用力的时滞系统[93]

时滞受控系统可用时滞微分方程来描述，具有 n 个自由度的时滞系统的方程为

$$M\ddot{X}(t)+C\dot{X}(t)+KX(t)=f(X,\dot{X},t)+UX(t-\tau)+V\dot{X}(t-\tau) \tag{1-46}$$

式中　$\tau>0$ 为滞后时间；$X\in R^n$ 为系统的位移；$M\in R^{n\times n}$、$C\in R^{n\times n}$，$K\in R^{n\times n}$分别为质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵，$U\in R^{n\times n}$和 $V\in R^{n\times n}$分别是位移和速度的反馈增益矩阵。

1.3 一些典型的非线性振动微分方程式

前一节已列举了非线性振动系统一些工程实例，对非线性振动方程式的特点作了说明。事实上，自然界中的非线性振动问题很多，非线性振动方程也是各式各样的，下面讨论非线性方程式的类型，并列出一些典型的微分方程式。

1.3.1 自治系统与非自治系统

所谓自治系统，是指在微分方程中，不明显地包含时间 t 的系统，又称为固有振动系统或自由振动系统，其方程式的一般形式为

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f\left(x,\frac{dx}{dt}\right) \tag{1-47}$$

假如非线性函数很小，我们可以将非线性方程表示为

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\varepsilon f\left(x,\frac{dx}{dt}\right) \tag{1-48}$$

式中　ε——小参数。

所谓非自治系统，是指在微分方程中，明显地含时间 t 的系统，又称强迫振动系统或外激振动系统，其方程的一般形式为

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f\left(x,\frac{dx}{dt},t\right) \tag{1-49}$$

当非线性函数很小时，方程可表示为

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\varepsilon f\left(x,\frac{dx}{dt},t\right) \tag{1-50}$$

1.3.2 保守系统、非保守系统(能量耗散系统)和自激振动系统

在保守系统中没有阻尼力，对整个系统来说没有能量的损失，也没有外加能源使该系统的能量增加。例如方程(1-15)和方程(1-20)中没有阻尼力与摩擦力，所以是保守系统的振动微分方程式。

在非保守系统中或能量耗散系统中，微分方程中包含有阻尼力，阻尼力会逐渐消耗掉振动系统的能量。例如方程(1-8)和(1-11)包括干摩擦力或阻尼力，这些方程都属于非保守系统的振动方程。

保守系统和非保守系统的一般表示分别为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)=0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon f(x)=0 \qquad 0\leqslant\varepsilon\leqslant1 \tag{1-51}$$

及

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f\left(\frac{dx}{dt}\right)+kx=0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon f\left(\frac{dx}{dt}\right)+kx=0 \qquad 0\leqslant\varepsilon\leqslant1 \tag{1-52}$$

自激振动系统通常具有负阻尼，即微分方程中有负阻尼项，它给系统补充能量，增加或维持其振动；或者是通过其他特殊方式不断向系统供给能量，增加或维持其振动。式(1-53)是一个典型的自激振动非线性方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\left\{-A+B\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right\}\frac{dx}{dt}+kx=0 \tag{1-53}$$

1.3.3 若干典型的非线性振动的微分方程式

1. 非线性方程的一般表示式

一阶非线性方程：

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=f\left(x,\frac{dx}{dt}\right) \tag{1-54}$$

二阶非线性方程：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx+\Delta f(\ddot{x},\dot{x},x)=f(t) \tag{1-55}$$

2．单摆、复摆和摩擦摆

(1)单摆

无阻尼情况：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k\sin x=0 \quad k=\frac{g}{L} \tag{1-56}$$

有阻尼情况：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+k\sin x=0 \tag{1-57}$$

(2)复摆

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k\sin x=0 \quad k=\frac{GL}{J} \tag{1-58}$$

(3)摩擦摆

$$\frac{d^2x}{dt^2}+F\mathrm{sgn}\frac{dx}{dt}+k\sin x=0 \tag{1-59}$$

3．Duffing 方程和带软弹簧的非线性系统

无阻尼情况下的 Duffing 方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+kx+dx^3=0 \tag{1-60}$$

有阻尼情况下的 Duffing 方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx+dx^3=0 \tag{1-61}$$

带平方项的情形：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx+bx^2+dx^3=0 \tag{1-62}$$

软弹簧系统的非线性方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx-dx^3=0 \tag{1-63}$$

4．带有库仑阻尼的和速度平方阻尼的非线性方程

带库仑阻尼的非线性方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+fG\mathrm{sgn}\frac{dx}{dt}+f(x)=0 \tag{1-64}$$

在粘性较大的流体中质体振动的方程式：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+c\left|\frac{dx}{dt}\right|\frac{dx}{dt}+f(x)=0 \tag{1-65}$$

5．分段质量非线性振动系统

分段质量与分段摩擦的非线性振动系统：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f\left(x,\frac{dx}{dt},\frac{d^2x}{dt^2}\right)=0 \tag{1-66}$$

$$f\left(x,\frac{dx}{dt},\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\begin{cases}(m_p+m_m)x & \varphi_{a_1}\leqslant\varphi\leqslant\varphi_{a_2},\quad \varphi_{b_1}\leqslant\varphi\leqslant\varphi_{b_2}\\ m_p\dot{x}+m_mgf & \varphi_{c_1}\leqslant\varphi\leqslant\varphi_{c_2}\\ m_px-m_mgf & \varphi_{d_1}\leqslant\varphi\leqslant\varphi_{d_2}\end{cases}$$

式中 $\varphi_{a_2}=\varphi_{c_1}$，$\varphi_{b_2}=\varphi_{d_1}$，$\varphi_{c_2}=\varphi_{b_1}$，$\varphi_{d_2}=\varphi_{a_1}$。

带分段转动惯量与分段重力矩的摆：

$$\begin{aligned}&f_m(\ddot{x},x,x)+GL(x,\dot{x},x)\sin x=0\\&f_m(x,\dot{x},x)-ML(\ddot{x},x,x)\dot{x}\\&L(\ddot{x},\dot{x},x)=\begin{cases}L_1 & \varphi_{a_1}\leqslant\varphi\leqslant\varphi_{a_2},\quad \varphi_{c_1}\leqslant\varphi\leqslant\varphi_{c_2}\\ L_2 & \varphi_{b_1}\leqslant\varphi\leqslant\varphi_{b_2},\quad \varphi_{d_1}\leqslant\varphi\leqslant\varphi_{d_2}\end{cases}\end{aligned}\tag{1-67}$$

6. 对称与不对称分段线性的非线性系统方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f_c\left(\frac{dx}{dt}\right)+f_k(x)=0\tag{1-68}$$

对称的分段线性的非线性系统($e>0$)：

$$f_k(x)=\begin{cases}kx & e\leqslant x\leqslant e,\quad -\varphi_e\leqslant\varphi\leqslant\varphi_e,\quad \pi-\varphi_e\leqslant\varphi\leqslant\pi+\varphi_e\\ kx+\Delta k(x-e) & e\leqslant x,\quad \varphi_e\leqslant\varphi\leqslant\pi-\varphi_e\\ kx+\Delta k(x+e) & e\geqslant x,\quad \pi+\varphi_e\leqslant\varphi\leqslant 2\pi-\varphi_e\end{cases}\tag{1-69}$$

$$f_c\left(\frac{dx}{dt}\right)=\begin{cases}ck\dfrac{dx}{dt} & -e\leqslant x\leqslant e,\quad -\varphi_e\leqslant\varphi\leqslant\varphi_e\\ c(k+\Delta k)\dfrac{dx}{dt} & e\leqslant x,\quad \pi-\varphi_e\leqslant\varphi\leqslant\pi+\varphi_e,\quad x\leqslant -e,\quad \pi+\varphi_e\leqslant\varphi\leqslant 2\pi-\varphi_e\end{cases}$$

不对称的分段线性的非线性系统：

$$f_k(x)=\begin{cases}-k(a_0-a-x)+\Delta k(x+a) & x\geqslant a\\ -k(a_0-a-x) & x\leqslant -a\end{cases}\tag{1-70}$$

$$f_c\left(\frac{dx}{dt}\right)=\begin{cases}(f+\Delta f)\dfrac{dx}{dt} & x\geqslant +a\\ f\dfrac{dx}{dt} & x\leqslant -a\end{cases}$$

7. 对称与不对称滞回非线性系统方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f_k(x)=0\tag{1-71}$$

对称的滞回非线性系统(半个周期的数学表示式)：

$$f_k(x)=\begin{cases}k(A\sin\omega t-b) & 0\leqslant\omega t\leqslant\pi/2\\ k(A-b) & \pi/2\leqslant\omega t\leqslant\pi-\varphi_e,\quad \varphi_e=\arcsin\left(\dfrac{A-2b}{A}\right)\\ k(A\sin\omega t+b) & \pi-\varphi_e\leqslant\omega t\leqslant\pi\end{cases}\tag{1-72}$$

不对称的滞回非线性系统(一个周期的数学表示式)：

$$f_k(x)=\begin{cases}k_1(A\sin\omega t-b) & -\varphi_e\leqslant\omega t\leqslant\pi/2\\ k(A-b) & \pi/2\leqslant\omega t\leqslant\pi-\varphi_e\\ k_2A\sin\omega t & \pi-\varphi_e\leqslant\omega t\leqslant 2\pi-\varphi_e\end{cases}\tag{1-73}$$

8．自激振动的方程式

van der Pol 方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - (1 - x^2)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0 \tag{1-74}$$

Rayleigh 方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \left\{-A + B\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0 \tag{1-75}$$

切削加工时的自激振动方程：

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varphi\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) + kx = 0$$

$$\varphi\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = kS_0 - F\left(\nu_0 - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = F(\nu_0) - F\left(\nu_0 - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$kS_0 = F(v_0) \tag{1-76}$$

9．考虑陀螺效应的转子回转的非线性方程式

$$\begin{aligned} & m\ddot{z} + k_{rr}z + k_{r\psi}\psi = 0 \\ & J_d\ddot{\psi} - H\dot{\psi} + k_{\psi r}z + k_{\psi\psi} = 0 \\ & H = J_P\Omega \end{aligned} \tag{1-77}$$

10．带有冲击的非线性振动系统

$$m\ddot{y} + ky = F_0\sin\nu t \qquad y \leqslant y_0 \tag{1-78}$$

碰撞点为：$y = y_0$

11．多自由度强非线性振动系统

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}) \tag{1-79}$$

12．慢变参数振动方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m(\tau)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right] + k(\tau)x = f\left(x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \nu t, \varepsilon\right) \qquad \tau = \varepsilon t \tag{1-80}$$

13．线性参数激振方程

Hill 方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + (A + Kf(t))x = 0 \tag{1-81}$$

Mathieu 方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + P^2(1 + h\cos\nu t)x = 0 \tag{1-82}$$

14．带非线性项的参数激振方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + k(t)x + f\left(x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = 0 \tag{1-83}$$

1.4　非线性振动问题的常用求解方法

非线性振动问题的研究通常包括定性研究与定量研究。定性研究的主要内容包括方程解的存在性、唯一性、周期性和稳定性的研究等；定量研究包括方程解的具体表达形式、数量

大小和解的数目等。非线性方程的求解方法有精确解法和近似解法，这些方法是：

分析方法；

数值方法；

图解方法；

实验方法。

用分析方法求非线性方程的精确解一般仅对少数特殊的两个或三个自由度以下的非线性方程有效，求方程的精确解的方法有直接积分法与分段积分法。对于多数弱非线性的单自由度或多自由度系统，只能求出其近似解。

求近似解的方法有以下几种：

等价线性化法；

迦辽金—里兹法；

谐波平衡法；

迭代法；

传统小参数法；

多尺度法；

平均法；

渐近法。

此外，能量法有时可用来精确求解，而有时只能用于近似计算。

数值方法目前已广泛用于计算非线性振动系统，是一种求解非线性方程的有效方法。

图解方法在研究单自由度非线性振动系统时是一种不可缺少的方法，在相平面上进行作图的各种方法，例如，等倾线作图法，点映射与胞映射法等，对于不同的非线性振动方程都是有效的。

在工程中应用最广的是分析方法与数值方法。实验方法也很重要，但由于需具备一些试验必需的仪器和设备，仅在一些必要的条件下适用。目前由于计算技术的发展，在一定情况下和范围内可由计算机仿真代替部分试验工作。后面各章将着重介绍解析方法，对其他一些方法，如数值方法、图解方法也作了简要介绍。

计算与思考

1. 非线性振动系统的运动方程式有哪些特征？按照作用力的非线性特征非线性振动系统可分为几种？

2. 请分别举出惯性力项为非线性的、阻尼力项为非线性的及弹性力项为非线性的非线性振动系统的两个工程实例。

3. 请举出两个慢变参数振动系统的工程实例。

4. 试应用过去学习过的牛顿法、达伦培尔原理、动静法、拉格朗日方法建立非线性运动方程式(如未学习过这些方法，可参阅有关参考书，掌握这些方法)。

5. 写出最常见的非线性振动系统的典型方程式。

6. 定性分析和定量分析包括那些具体内容？

7. 求解非线性振动问题的方法有解析方法、数值方法、图解方法和实验方法，这些方法各有那些特点？

8. 按你自己的观点，举出在非线性振动理论及其应用的领域若干亟待解决的问题。

第二章　精确求解法

用精确方法求解非线性振动的微分方程式，在多数情况下是困难的。只有极少数非线性振动方程式可以求出它们的精确解。下面介绍求某些非线性振动方程式的精确解的两种常用方法：直接积分法与分段积分法[12 36]。

2.1　直接积分法

2.1.1　求自治系统的振动周期及固有频率

令非线性振动方程有以下形式

$$\ddot{x} + p^2 f(x) = 0 \tag{2-1}$$

因为加速度可以作如下变换

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}\dot{x} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(\dot{x})^2}{\mathrm{d}x} \tag{2-2}$$

所以方程(2-1)可改写为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(\dot{x})^2}{\mathrm{d}x} + p^2 f(x) = 0 \tag{2-3}$$

假如单位质量的恢复力 $p^2 f(x)$ 由图 2-1 来表示，并假设质量在端点 x_m 处的速度为零。我们可以对方程(2-3)求积，得到

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = p^2\int_x^{x_m} f(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{2-4}$$

由此可以求出任意位置时速度的计算式

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm p\sqrt{2\int_x^{x_m} f(\xi)\mathrm{d}\xi} \tag{2-5}$$

将式(2-5)改写为

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{p\sqrt{2\int_x^{x_m} f(\xi)\mathrm{d}\xi}} \tag{2-6}$$

由此可求得振动周期

$$T = \int_0^T \mathrm{d}t = \frac{4}{p}\int_0^{x_m}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\int_x^{x_m} f(\xi)\mathrm{d}\xi}} \tag{2-7}$$

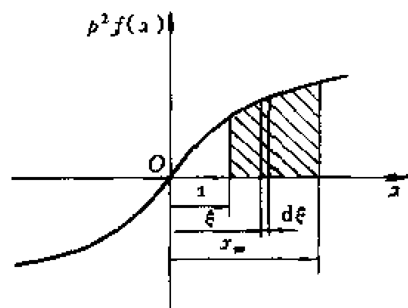


图 2-1　弹性恢复力与位移的关系

该振动系统的固有频率

$$p = \frac{2\pi}{T} \tag{2-8}$$

按照上述方法，如已知某非线性振动方程弹性恢复力的表示式，那么可按式(2-7)求出该系统的振动周期，进而可求出系统的固有频率。此外还可以求出最大速度 x_m 与振幅(即

最大位移)之间的关系

$$\frac{1}{2}\dot{x}_m^2 = p^2\int_0^{x_m} f(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{2-9}$$

下面举一个实际例子。求单摆的振动周期及固有频率的精确数值。

【例 2.1.1】 单摆的振动方程为

$$\varphi + p^2\sin\varphi = 0 \tag{2-10}$$

式(2-10)中的非线性函数为

$$f(\varphi) = \sin\varphi \tag{2-11}$$

按照式(2-7),振动周期可按下式计算

$$T = \frac{4}{p}\int_0^{\varphi_m}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{2\int_{\varphi}^{\varphi_m} f(\varphi_1)\mathrm{d}\varphi_1}} \tag{2-12}$$

对于单摆,其最大摆动角速度 $\dot{\varphi}_m$ 与最大摆动角位移 φ_m 有以下关系(见式 2-4)

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}_m^2 = p^2\int_0^{\varphi_m} f(\varphi_1)\mathrm{d}\varphi_1 = p^2\int_0^{\varphi_m}\sin\varphi_1\mathrm{d}\varphi_1 = p^2(1-\cos\varphi_m) \tag{2-13}$$

所以有

$$\dot{\varphi}_m = \pm p\sqrt{2(1-\cos\varphi_m)} \tag{2-14}$$

将式(2-11)代入式(2-12),振动周期 T 可化简成以下形式

$$T = \frac{4}{p}\int_0^{\varphi_m}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{2\int_{\varphi}^{\varphi_m}\sin\varphi_1\mathrm{d}\varphi_1}} = \frac{4}{p}\int_0^{\varphi_m}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\varphi_m)}} \tag{2-15}$$

因为

$$\cos\varphi = 1-2\sin^2\frac{\varphi}{2} \qquad \cos\varphi_m = 1-2\sin^2\frac{\varphi_m}{2}$$

所以有

$$T = \frac{2}{p}\int_0^{\varphi_m}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\varphi_m}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}} \tag{2-16}$$

引入符号 $k=\sin\frac{\varphi_m}{2}$ 和一个新变量 θ,并使

$$\sin\frac{\varphi}{2} = k\sin\theta = \sin\frac{\varphi_m}{2}\sin\theta \tag{2-17}$$

由上式可见,当 $\theta=0$ 时,$\varphi=0$;当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时,$\varphi=\varphi_m$。

因为

$$\mathrm{d}\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \mathrm{d}(k\sin\theta) \tag{2-18}$$

即

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi = k\cos\theta\mathrm{d}\theta \tag{2-19}$$

所以

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{2k\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}} = \frac{2k\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \tag{2-20}$$

代入式(2-16)，可得

$$T = \frac{4}{p}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \tag{2-21}$$

上述积分为第一类椭圆积分，可以利用椭圆积分表直接查出积分的值。进而可计算出单摆的振动周期与固有频率。该值不仅与 p 值($p=\sqrt{\dfrac{g}{L}}$)，即与单摆的长度 L 有关，而且与 $k=\sin\dfrac{\varphi_m}{2}$ 值，即单摆的摆动幅角 φ_m 有关。

2.1.2　求非自治系统振动方程的解

【例 2.1.2】　此例为一非自治系统振动方程的求解过程。如图 2-2 所示，由一对等速反向回转的惯性激振器使某一质体作横向振动，该系统的强迫振动解可以由直接积分法求出。

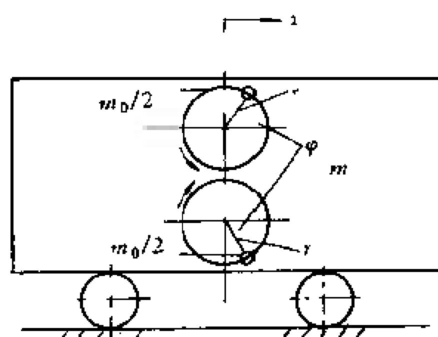


图 2-2　双轴惯性激振器振动机原理

设两偏心块的质量分别为 $\dfrac{m_0}{2}$，它们彼此作反向等速回转，其角位移、角速度与角加速度分别为 φ, $\dot{\varphi}$ 和 $\ddot{\varphi}$，振动质体的总质量为 m，它沿 x 方向的位移、速度和加速度分别为 x, $\dot{x}$ 和 $\ddot{x}$。偏心块及转轴的转动惯量为 J，其偏心半径为 r。参照图 2-2，可列出质体沿 x 方向振动的微分方程式及转轴回转运动的方程式

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= m_0 r(\dot{\varphi}^2\cos\varphi + \ddot{\varphi}\sin\varphi) \\ J\ddot{\varphi} &= m_0 r\ddot{x}\sin\varphi \end{aligned} \tag{2-22}$$

设

$$a = \frac{m_0 r}{m} \qquad c = \frac{m_0 r}{J}$$

代入式(2-22)中，得

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= a(\dot{\varphi}^2\cos\varphi + \ddot{\varphi}\sin\varphi) \\ \ddot{\varphi} &= c\ddot{x}\sin\varphi \end{aligned} \tag{2-23}$$

或

$$\ddot{\varphi} = ac(\dot{\varphi}^2\cos\varphi + \ddot{\varphi}\sin\varphi)\sin\varphi \tag{2-24}$$

因为

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(\dot{\varphi})^2}{\mathrm{d}\varphi}, \quad \ddot{x} = \frac{\ddot{\varphi}}{c\sin\varphi} \tag{2-25}$$

所以式(2-23)的第一式可写为

$$\frac{\mathrm{d}(\dot{\varphi})^2}{\mathrm{d}\varphi} - \frac{2ac\sin\varphi\cos\varphi}{1-ac\sin^2\varphi}\dot{\varphi}^2 = 0 \tag{2-26}$$

显然以上方程的解应有以下形式

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{c_1}{1 - ac\sin^2\varphi} \qquad \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{c_1}{1 - ac\sin^2\varphi}} \tag{2-27}$$

式中　c_1——待定常数。

当 $\varphi = 0$ 时，$\dot{\varphi} = \omega_0$，代入上式，得

$$c_1 = \omega_0^2 \tag{2-28}$$

所以有

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{\omega_0^2}{1 - ac\sin^2\varphi} \tag{2-29}$$

由式(2-23)看出，方程有解

$$x = -a\cos\varphi \tag{2-30}$$

即振动质体的位移呈余弦形式变化。

振动质体的速度为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a\dot{\varphi}\sin\varphi = a\omega_0\frac{1}{\sqrt{1 - ac\sin^2\varphi}}\sin\varphi \tag{2-31}$$

而振动质体的加速度由式(2-23)得

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\ddot{\varphi}}{c\sin\varphi} = a\omega_0^2\frac{1}{(1 - ac\sin^2\varphi)^2}\cos\varphi \tag{2-32}$$

当 $ac \ll 1$ 时，位移 x、速度 $\dot{x}$ 和加速度 $\ddot{x}$ 可写成以下形式

$$\begin{aligned} x &= -a\cos\varphi \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &\approx a\omega_0\left(1 + \frac{1}{2}ac\sin^2\varphi\right)\sin\varphi = a\omega_0\sin\varphi + \frac{1}{8}a^2c\omega_0(3\sin\varphi - \sin3\varphi) \\ \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &\approx a\omega_0^2(1 + 2ac\sin^2\varphi)\cos\varphi = a\omega_0^2\cos\varphi + \frac{1}{2}a^2c\omega_0^2(\cos\varphi - \cos3\varphi) \end{aligned} \tag{2-33}$$

由上式看出，由于惯性激振器随机体振动，其转轴的角加速度不为零，角速度是变化的。同时，质体的振动速度与加速度均与正弦曲线及余弦曲线有一定的差异，出现了高次谐波项(例如三次谐波项)。

2.2　分段积分法

有许多非线性振动系统，它们可以划分几个线性区段。对于这些分段线性的非线性系统可以用分段积分法对它们进行求解。属于这种系统的有

1. 具有两个或多个线性区段弹性恢复力的非线性系统(弹性恢复力如图 2-3 所示)。
2. 系统中具有非弹性(即塑性)材料的非线性振动系统。
3. 具有瞬时冲击的系统。

下面对某些分段线性的非线性系统，利用分段积分法进行求解。

2.2.1　求分段线性弹性力的系统的振动周期

图 2-3 表示一个振动质体位于两个线性弹簧之间间隙处的某一振动系统[12]，其运动微分方程式如下式

$$m\ddot{x} + f(x) = 0$$

$$f(x)=\begin{cases}0, & -e<x<e\\ k(x-e), & x\geqslant e\\ k(x+e), & x\leqslant -e\end{cases}$$

如果从中间位置开始来度量这个振动质体的运动，那么其弹性恢复力与位移的关系如图2-3(b)所示的形式。

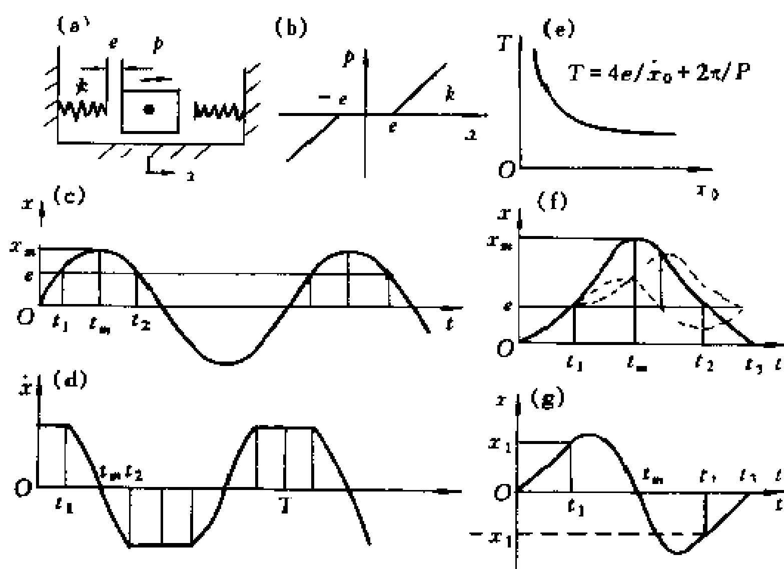


图2-3 分段线性的非线性振动系统

(a) 力学模型图；(b) 弹性恢复力；(c) 位移曲线；(d) 速度曲线；(e) 周期与初始速度的关系曲线；
(f) 等值力作用下的位移曲线；(g) 等值力作用下的速度曲线

在上述情况下，自由振动的周期取决于间隙的大小及其他一些参数。假设在时间 $t=0$ 处，质体的初始位移为零，初始速度为 $\dot{x}_0$，则穿过间隙 e 所需的时间可由下式求出

$$t_1=\frac{e}{\dot{x}_0} \tag{2-34}$$

穿过间隙 e 之后，该质体与右边弹簧接触，此后所发生的运动为简谐运动，直到时间 t_m 时质体的速度为零。速度由 $\dot{x}_0$ 变为零的过程中的时间等于该振动系统周期的四分之一。设位移达最大值的时间为

$$t_m=t_1+\frac{\pi}{2p}=\frac{e}{\dot{x}_0}+\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{2-35}$$

式中 m——该质体质量；

k——间隙弹簧刚度；

p——固有频率，$p=\sqrt{k/m}$。

因而该振动系统的周期为

$$T=4t_m=\frac{4e}{\dot{x}_0}+\frac{2\pi}{p}=\frac{4e}{\dot{x}_0}+2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{2-36}$$

初始速度引起的质体的最大位移，即等于间隙 e 与以前所述的谐和振动的振幅之和

$$x_m=e+\frac{\dot{x}_0}{p}=e+\dot{x}_0\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{2-37}$$

对于该系统的自由振动，其位移与速度的变化过程示于图 2-3(c)，(d)中。应该注意到当质体与任一弹簧不发生接触时，速度为常数。

由式(2-36)可以看出，周期 T 取决于初始速度 $\dot{x}_0$、间隙 e、质量 m 和刚度 k，且与 $\dot{x}_0$ 的关系极为密切。当 $\dot{x}_0$ 的值接近于零时，该周期趋于无穷大；当速度变得很大时，周期接近于 $\frac{2\pi}{p}$。图 2-3(e)表示这种变化图。

2.2.2 分段线性非线性系统在等值力作用下的振动[12]

设图 2-3(a)中的系统开始处于静止，而由于等值力 Q_n 的作用将产生振动，运动微分方程式为

$$m\ddot{x} + f(x) = Q_n$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -e < x < e \\ k(x-e), & x \geqslant e \\ k(x+e), & x \leqslant -e \end{cases}$$

在间隙内该质体的加速度为 $q_n = \frac{Q_n}{m}$，而其速度和位移可由下式求出

$$\dot{x} = q_n t \qquad x = \frac{q_n t^2}{2} \tag{2-38}$$

由 $t=0$ 至 $t=t_1$，图 2-3(f)中所给的位移—时间曲线为抛物线。而在图 2-3(g)中速度—时间曲线为一直线。在此情形下，质体穿过间隙所需的时间

$$t_1 = \sqrt{\frac{2e}{q_n}} \tag{2-39}$$

在时间 t_1 处的速度为

$$\dot{x}_{t_1} = q_n t_1 = \sqrt{2q_n e}$$

当质体接触右边弹簧时，它的速度为 $\dot{x}_1$，在时间 $t_1 \leqslant t \leqslant t_m$ 的范围内，位移变化特性为

$$x = e + \frac{\dot{x}_1}{p}\sin p(t-t_1) + \frac{Q_n}{k}[1-\cos p(t-t_1)] \tag{2-40}$$

其中，右边第二项是由于速度 $\dot{x}_1$ 产生的自由振动，而最后一项是由常值力 Q_n 所引起的。这两项在图 2-3(f)中 $t_1 \leqslant t \leqslant t_m$ 的时间范围内均以虚线表示，所有三项之和为图中所示的钟形实线。

对式(2-40)求导，可以求出最大位移 x_m 发生于如下时间 t_m 处

$$t_m = t_1 + \frac{1}{p}\arctan\left(\frac{-\dot{x}_1 k}{Q_n p}\right) \tag{2-41}$$

而其最大位移

$$x_m = e + \frac{Q_n}{k} + \sqrt{\left(\frac{Q_n}{k}\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}_1}{p}\right)^2} \tag{2-42}$$

因为钟形曲线对时间 t_m 成对称，所以当达到下式所给定的时间 t_2 时，位移又达到 e，而

$$t_2 = 2t_m - t_1 \tag{2-43}$$

然后质体不与右边弹簧接触，并在 $t_2 \leqslant t \leqslant t_1 + T$ 时间范围内遵循抛物线轨迹运动，如图 2-3(f)所示。此抛物线对时间 t_3 成对称，t_3 和 $t_1 + T$ 可由式(2-44)计算

$$t_3 = t_2 + t_1 \qquad t_1 + T = t_2 + 2t_1 \tag{2-44}$$

在时间 $t_1 + T$ 处，质体又与左边弹簧不发生接触，位移图将继续出现（图 2-3(f)中从略）。从图 2-3(g)所示的速度曲线中看出，质体与弹簧不发生接触的时间内，速度为一直线。

如果在时间 t_n 处，常值 Q_n 突然移去，那么我们得到矩形冲量，在时间 t_n 处，该系统具有某位移 x_n 和某速度 $\dot{x}_n$，可以从图 2-3(f)和 2-3(g)中确定出来。用这些量作为初始条件，以后所发生的自由振动便可以按图 2-3(c)和图 2-3(d)中的曲线推演出来。

2.2.3 具有库仑阻尼系统的自由振动

图 2-4(a)中的质体 m 在 $-\Delta \leqslant x \leqslant \Delta$ 范围内（式中 $\Delta = \frac{F_0}{k}$），可以实现静力平衡，因为在这一范围内弹性力 $k\Delta$ 小于极限摩擦力 F_0 而

$$F_0 = mgf_0 \tag{2-45}$$

式中　f_0——质体与平面的滑动摩擦系数。

摩擦力 F_0 始终与质体的运动速度方向相反，所以系统的运动方程为

$$m\ddot{x} + kx = \begin{cases} -F_0 & \dot{x} \geqslant 0 \\ F_0 & \dot{x} \leqslant 0 \end{cases} \tag{2-46}$$

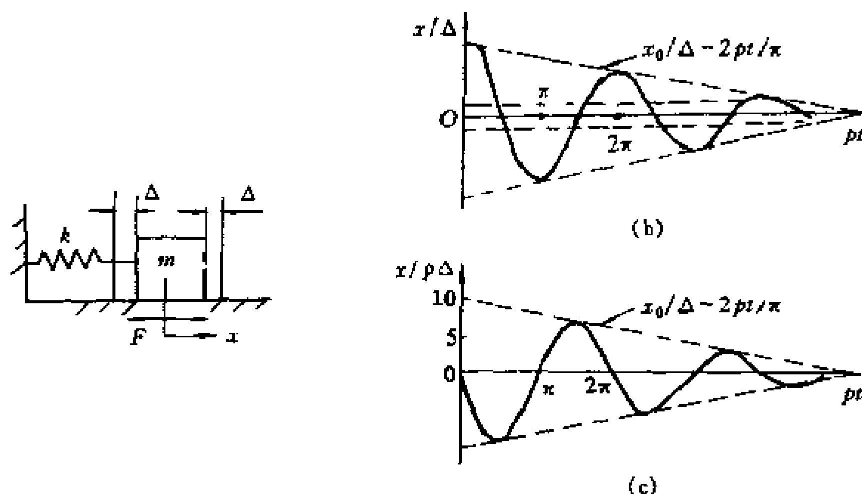


图 2-4 具有库仑阻尼的系统

(a) 力学模型图　(b) 位移曲线　(c) 速度曲线

假设质体 m 先向右移动一个初始位移，且 $x_0 \geqslant \Delta$，当放松质体时，该质体开始向左运动，该方程的解为

$$x = A\sin pt + B\cos pt + \frac{F_0}{k} \tag{2-47}$$

而速度

$$\dot{x} = Ap\cos pt - Bp\sin pt \tag{2-48}$$

当 $t = 0$ 时，$x = x_0$，$\dot{x} = 0$，代入上式得

$$x_0 = B + \frac{F_0}{k} \quad 即 \quad B = x_0 - \frac{F_0}{k} \tag{2-49}$$

所以有

$$Ap = 0 \quad 即 \quad A = 0 \tag{2-50}$$

于是方程的解为

$$x = \frac{F_0}{k} + \left(x_0 - \frac{F_0}{k}\right)\cos pt = \Delta + (x_0 - \Delta)\cos pt \tag{2-51}$$

而速度

$$\dot{x} = -p(x_0 - \Delta)\sin pt \tag{2-52}$$

这样，在 $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{p}$ 的时间范围内，其运动为简谐运动，$p = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 代表此运动的圆频率。当 $t = \frac{\pi}{p}$ 时，则由式(2-51)可求得

$$x = \Delta + (x_0 - \Delta)\cos p\frac{\pi}{p} = -(x_0 - 2\Delta) \tag{2-53}$$

速度方向由负变为正，在 $\frac{\pi}{p} \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{p}$ 的时间范围内质体向右运动。由方程(2-46)第一式可求得如下的解

$$x = -(x_0 - 3\Delta)\cos pt \tag{2-54}$$

因而在下半周运动也是简谐运动，并且具有相同的圆频率 p。

由式(2-51)和式(2-54)可以看出，当质体向左运动时，它以振幅为 $x_0 - \Delta$ 及以 $x = \Delta$ 为中心产生振动。当向右运动时，质体以振幅为 $x_0 - 3\Delta$ 及以 $x = -\Delta$ 为中心产生振动。每相隔 $\frac{\pi}{p}$ 时间，最大位移减小 2Δ，每一周期振幅减小 4Δ，然后质体于 $-\Delta \leqslant x \leqslant \Delta$ 的位移范围内在某一端的位置处停止。图 2-4(b)及图 2-4(c)表示图 2-4(a)中的质体由于初始条件 $x_0 = 10.5$ 和 $\dot{x} = 0$ 所产生的位移和速度图。

2.3 应用举例

【例 2.3.1】 直接积分法求 Duffing 方程的精确解。

在解方程前进行无量纲化，有如下形式的 Duffing 方程

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0 \tag{1}$$

初始条件为

$$x(0) = x_0 \qquad \dot{x}(0) = x_0 \tag{2}$$

这一问题的解是 t, ε 的函数，标记为 $x = x(t, \varepsilon)$

该方程为没有一阶导数项的二阶方程，通过变量代换 $\dot{x} = y$ 及将自变量从 t 变为 x 可以实现求积分。由

$$\ddot{x} = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = y\frac{dy}{dx} \tag{3}$$

原式变为

$$y\frac{dy}{dx} + x + \varepsilon x^3 = 0 \tag{4}$$

分离变量后变为

$$y\,dy = -(x + \varepsilon x^3)dx \tag{5}$$

求积分得到

$$\frac{1}{2}y^2 = -\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\varepsilon x^4\right) + C = -F(x) + C \tag{6}$$

其中 C 为积分常数。上式中 $\frac{1}{2}y^2$ 对应系统的动能；$F(x)$ 与系统的势能成正比例，C 则与系统的总能量成正比例。

在上式中利用初始条件(2)，有

$$\frac{1}{2}\dot{x}_0^2 = -\left(\frac{1}{2}x_0^2+\frac{1}{4}\varepsilon x_0^4\right)+C \tag{7}$$

因此

$$C=\frac{1}{2}\dot{x}_0^2+\frac{1}{2}x_0^2+\frac{1}{4}\varepsilon x_0^4 \tag{8}$$

由于 $y=\dot{x}$，由(6)式可得

$$\dot{x}=\pm\sqrt{2C-x^2-\varepsilon x^4/2} \tag{9}$$

$\pm$ 号对应 x 轴上方和下方的运动，分离变量后，(9)式变为

$$\mathrm{d}t=\pm\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2C-x^2-\varepsilon x^4/2}} \tag{10}$$

积分上式

$$t=\pm\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2C-x^2-\varepsilon x^4/2}} \tag{11}$$

下面研究 Duffing 方程周期运动的周期的精确解。

周期运动关于 x 轴对称。可以设与 x 轴的两个交点为 $(x_0,0)$ 和 $(-x_0,0)$，此时

$$C=\frac{1}{2}x_0^2+\frac{1}{4}\varepsilon x_0^4 \tag{12}$$

则(11)中根号内成分为

$$2C-x^2-\frac{1}{2}\varepsilon x^4=x_0^2+\frac{1}{2}\varepsilon x_0^4-x^2-\frac{1}{2}\varepsilon x^4=(x_0^2-x^2)\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon x_0^2+\frac{1}{2}\varepsilon x^2\right) \tag{13}$$

式(11)变为

$$t=\pm\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x_0^2-x^2}\sqrt{1+\frac{1}{2}\varepsilon x_0^2+\frac{1}{2}\varepsilon x^2}} \tag{14}$$

当引进变换 $x=-x_0\cos\theta$ 时，上式可化为标准的椭圆积分形式，且 $x=\pm x_0$，对应 $\theta_0=0$ 和 π。故上式变为

$$\begin{aligned}
t&=\pm\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{x_0\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{x_0^2(1-\cos^2\theta)}\sqrt{1+\frac{1}{2}\varepsilon x_0^2+\frac{1}{2}\varepsilon x_0^2\cos^2\theta}}=\pm\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\varepsilon x_0^2+\frac{1}{2}\varepsilon x_0^2\cos^2\theta}}\\
&=\pm\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1+\varepsilon x_0^2-\frac{1}{2}\varepsilon x_0^2\sin^2\theta}}=\pm\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon x_0^2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0^2}\sin^2\theta}}\\
&=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon x_0^2}}\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\alpha\sin^2\theta}}
\end{aligned} \tag{15}$$

相平面从点 $(-x_0,0)$ 到点 $(x_0,0)$ 是 $\frac{1}{2}$ 个周期，故周期 T 为

$$T=\frac{2}{\sqrt{1+\varepsilon x_0^2}}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\alpha\sin^2\theta}} \tag{16}$$

此式为第一类完全椭圆积分，可以查表得到。这样就求得了 Duffing 方程的精确周期。表 2-1 给出精确解的有关数值结果。

表 2-1　　　Duffing 方程的精确解

α	0	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10
ϵx_0^2	0	0.042	0.087	0.136	0.190	0.250
T	6.283	6.187	6.088	5.986	5.879	5.767

计算与思考

1. 一振动系统，运动微分方程为 $m\ddot{x}+F(x)=0$，其中恢复力为

$$F(x)=kx+F_0\mathrm{sgn}(x)$$

运动初始条件为 $x(0)=A, \dot{x}(0)=0$。试用分段积分法求系统的振动周期。

2. 一车辆水平冲击减振器，减振弹簧的弹性恢复力 $F(x)=k(x+\alpha x^3)$，车辆的质量为 m，车辆撞击减振器的初速度为 v_0。假设车辆与减振器相撞后保持接触而不分离，并略去减振器的质量。试求减振器的最大位移。

3. 一振动系统的运动微分方程为

$$\ddot{x}+\omega_0^2x+\epsilon f(x)+2\epsilon\mu\dot{x}=0$$

其中 ϵ 为小参数，μ 为阻力系数，均为已知，恢复力为

$$f(x)=\begin{cases}(k'-k'')x & -x_0\leqslant x\leqslant x_0\\(k'-k'')x & x_0\leqslant x<\infty\\(k'-k'')x & -\infty<x\leqslant 0\end{cases}$$

k' 和 k'' 均为已知，试用分段积分法求其响应。

4. 试用积分法求解 Duffing 方程

$$\ddot{x}+x+\epsilon x^3=0$$

初始条件为 $x(0)=1, \dot{x}(0)=0$

5. 一振动系统的振动微分方程为

$$\ddot{x}+k^2x=0$$

k 为常数。试用直接积分法求振动周期与位移的关系。

6. 试用直接积分法求单摆的运动周期，初始条件为 $x(0)=x_0, \dot{x}(0)=0$。

7. 设一具有平方阻尼的自治系统，其恢复力为 $f(x)$，其运动微分方程为

$$\ddot{x}+\frac{\delta}{2}\dot{x}^2+\omega_0^2f(x)=0$$

试用直接积分法求出运动周期的积分表达式。

8. 细长弹性杆两端受轴压力 p 作用而产生弯曲振动，可用振动微分方程

$$m\ddot{x}+\left(k_1-\frac{2p}{l}\right)x+\left(k_3-\frac{p}{l^3}\right)x^3=0$$

来描述，试用积分法求其运动周期。

第三章　等价线性化法、谐波平衡法、迦辽金—里兹法与迭代法

3.1　等价线性化法

我们用等价线性化法分别研究自治非线性系统和非自治非线性系统两种情形。

3.1.1　自治系统

已知某非线性振动方程，其阻尼力与弹性力具有非线性特征，其振动方程可表示为以下形式

$$m\ddot{x}+f_m(\ddot{x},\dot{x})+f_k(\dot{x},x)=0 \tag{3-1}$$

式中　$f_m(\ddot{x},\dot{x})$——非线性惯性力与非线性阻尼力的综合表达式；

$f_k(x,\dot{x})$——非线性阻尼力与非线性弹性力的综合表达式。

用等价线性化方法求非线性振动方程的解，首先应建立一个与非线性振动方程相对应的等价线性化振动方程，即

$$m_e\ddot{x}+c_e\dot{x}+k_ex=0 \tag{3-2}$$

式中　m_e——等价质量；

c_e——等价阻力系数；

k_e——等价弹簧刚度。

设等价线性振动方程(3-2)有以下形式的解

$$x=a\cos(\omega_et+\theta)=a\cos\psi,\quad \dot{x}=-a\omega_e\sin\psi,\quad \ddot{x}=-a\omega_e^2\cos\psi \tag{3-3}$$

对于小阻尼情况，式中的振幅 a 和等效阻尼比 δ_e 与等效固有频率 ω_e 可表示为

$$a=a_0e^{-\delta_et},\quad \delta_e=\frac{c_e}{2m_e},\quad \omega_e=\sqrt{\omega^2-\delta_e^2},\quad 且\ \omega=\sqrt{\frac{k_e}{m_e}} \tag{3-4}$$

将式(3-3)代入式(3-1)和式(3-2)中，并将非线性函数展为富氏级数，便可求出等价质量 m_e、等价阻力系数 c_e 与等价弹簧刚度 k_e 的值。

首先将非线性函数展为富氏级数，即

$$f_m(\ddot{x},\dot{x})=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos n\psi+d_n\sin n\psi) \tag{3-5}$$

$$f_k(\dot{x},x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\psi+b_n\sin n\psi)$$

对于一般非线性振动系统，按富氏级数展开的一次谐波力远大于二次及其他高次谐波力，因此可以将后者看作是小量，近似计算时可略去。这时可取一次近似为

$$
\begin{aligned}
f_m(\ddot{x},\dot{x}) &\approx c_0 + c_1\cos\psi + d_1\sin\psi \\
f_k(x,\dot{x}) &\approx a_0 + a_1\cos\psi + b_1\sin\psi
\end{aligned}
\tag{3-6}
$$

为便于表达，记

$$
\begin{aligned}
f_m(a,\psi) &= f_m(-a\omega_e^2\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi) \\
f_k(a,\psi) &= f_k(a\cos\psi,\ -a\omega_e\sin\psi)
\end{aligned}
$$

则，按照富氏级数的公式，系数 c_0, c_1, d_1 和 a_0, a_1, b_1 可按下式计算

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_m(a,\psi)\mathrm{d}\psi \\
c_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_m(a,\psi)\cos\psi\mathrm{d}\psi \quad d_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_m(a,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi \\
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_k(a,\psi)\mathrm{d}\psi \\
a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_k(a,\psi)\cos\psi\mathrm{d}\psi \quad b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_k(a,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi
\end{aligned}
\tag{3-7}
$$

将式(3-6)和式(3-7)代入式(3-1)中，可得

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &+ \left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_m(a,\psi)\cos\psi\mathrm{d}\psi\right]\cos\psi + \left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_m(a,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi\right]\sin\psi \\
&+ \left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_k(a,\psi)\cos\psi\mathrm{d}\psi\right]\cos\psi + \left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_k(a,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi\right]\sin\psi \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{3-8}
$$

当考虑(3-3)式的近似值并去除不变作用力项 c_0, a_0 时，有

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &- \left[\frac{1}{\pi\omega_e^2 a}\int_0^{2\pi} f_m(a,\psi)\cos\psi\mathrm{d}\psi\right]\ddot{x} - \left[\frac{1}{\pi\omega_e a}\int_0^{2\pi} f_m(a,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi\right]\dot{x} \\
&+ \left[\frac{1}{\pi a}\int_0^{2\pi} f_k(a,\psi)\cos\psi\mathrm{d}\psi\right]x - \left[\frac{1}{\pi\omega_e a}\int_0^{2\pi} f_k(a,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi\right]\dot{x} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

对应于式(3-2)的等价质量 m_e、等价阻力系数 c_e 与等价刚度 k_e 分别为

$$
\begin{aligned}
m_e &= m - \left[\frac{1}{\pi\omega_e^2 a}\int_0^{2\pi} f_m(a,\psi)\cos\psi\mathrm{d}\psi\right] \\
c_e &= -\left[\frac{1}{\pi\omega_e a}\int_0^{2\pi} f_m(a,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi\right] - \left[\frac{1}{\pi\omega_e a}\int_0^{2\pi} f_k(a,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi\right] \\
k_e &= \left[\frac{1}{\pi a}\int_0^{2\pi} f_k(a,\psi)\cos\psi\mathrm{d}\psi\right]
\end{aligned}
\tag{3-9}
$$

将式(3-9)的值代入式(3-4)中，便可求出等价衰减系数 δ_e 与等价固有频率 ω_e

$$
\delta_e = \frac{c_e}{2m_e} = -\frac{1}{2\pi m_e\omega_e a}\left[\int_0^{2\pi} f_m(a,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi + \int_0^{2\pi} f_k(a,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi\right] \tag{3-10}
$$

$$
\omega_e = \sqrt{\frac{k_e}{m_e}} = \sqrt{\frac{1}{\pi a}\int_0^{2\pi} f_k(a,\psi)\cos\psi\mathrm{d}\psi \Big/ \left\{m - \left[\frac{1}{\pi\omega_e^2 a}\int_0^{2\pi} f_m(a,\psi)\cos\psi\mathrm{d}\psi\right]\right\}}
$$

3.1.2 非自治系统

假如已知某非线性振动方程，其阻尼力与弹性力具有非线性特征，其振动方程可表示为

以下形式

$$m\ddot{x} + f_m(\ddot{x}, \dot{x}) + f_k(x, \dot{x}) = F\sin\nu t \tag{3-11}$$

式中　$f_m(\ddot{x}, \dot{x})$——非线性惯性力与非线性阻尼力的综合表达式；

$f_k(x, \dot{x})$ ——非线性阻尼力与非线性弹性力的综合表达式。

非线性振动方程(3-11)相对应的等价线性化振动方程为

$$m_e\ddot{x} + c_e\dot{x} + k_e x = F_0 + F\sin\nu t \tag{3-12}$$

式中　m_e —等价质量；

c_e ——等价阻力系数；

k_e——等价弹簧刚度；

F_0 —不变的作用力

只要求出等价质量 m_e、等价阻力系数 c_e 和等价弹簧刚度k_e，非线性振动方程就可以近似地按照线性振动方程进行求解。由于阻尼的存在，自由振动在经过一定时间后将会消失，所以可设等价线性振动方程(3-12)有以下形式的强迫振动解

$$x = A_0 + A\sin(\nu t - \beta) = A_0 + A\sin\varphi,\quad \dot{x} = A\nu\cos\varphi,\quad \ddot{x} = -A\nu^2\sin\varphi \tag{3-13}$$

因此，等价线性化振幅 A、相位差角 β 分别可由下式求出

$$A = \frac{F\cos\beta}{k_e - m_e\nu^2},\quad \beta = \arctan\frac{c_e\nu}{k_e - m_e\nu^2},\quad A_0 = \frac{F_0}{k_e} \tag{3-14}$$

等价质量 m_e、等价阻力系数 c_e 与等价弹簧刚度k_e 的值，可以通过将非线性惯性力、非线性阻尼力与非线性弹性力按富氏级数展开的方法得出

$$\begin{aligned} f_m(\ddot{x}, \dot{x}) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos n\varphi + d_n\sin n\varphi) \\ f_k(x, \dot{x}) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi) \end{aligned} \tag{3-15}$$

对于一般非线性振动系统，按富氏级数展开的一次谐波力远大于二次和其他高次谐波力及常数项，因此可以将后者看作是小量，近似计算时略去。这时可取近似值为

$$\begin{aligned} f_m(\ddot{x}, \dot{x}) &= c_0 + c_1\cos\varphi + d_1\sin\varphi \\ f_k(x, \dot{x}) &= a_0 + a_1\cos\varphi + b_1\sin\varphi \end{aligned} \tag{3-16}$$

为便于表达，记

$$f_m(A, \varphi) = f_m(-A\nu^2\sin\varphi, A\nu\cos\varphi)$$

$$f_k(A_0, A, \varphi) = f_k(A_0 + A\sin\varphi, A\nu\cos\varphi)$$

按照富氏级数的公式，系数 c_0, c_1, d_1 和 a_0, a_1, b_1 可按下式计算

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_m(A, \varphi)\mathrm{d}\varphi \\ c_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_m(A, \varphi)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi,\quad d_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_m(A, \varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi \\ a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_k(A_0, A, \varphi)\mathrm{d}\varphi \\ a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_k(A_0, A, \varphi)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi,\quad b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_k(A_0, A, \varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi \end{aligned} \tag{3-17}$$

将式(3-16)和式(3-17)代入式(3-11)中，可得

$$m\ddot{x}+\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_m(A,\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\right]\sin\varphi+\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_m(A,\varphi)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\right]\cos\varphi$$

$$+\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_k(A_0,A,\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\right]\sin\varphi+\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_k(A_0,A,\varphi)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\right]\cos\varphi$$

$$=F\sin\nu t-\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_m(A,\varphi)\mathrm{d}\varphi\right]-\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_k(A_0,A,\varphi)\mathrm{d}\varphi\right]\tag{3-18}$$

或

$$m\ddot{x}-\left[\frac{1}{\pi\nu^2A}\int_0^{2\pi}f_m(A,\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\right]\ddot{x}+\left[\frac{1}{\pi\nu A}\int_0^{2\pi}f_m(A,\varphi)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\right]\dot{x}$$

$$+\left[\frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi}f_k(A_0,A,\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\right]x+\left[\frac{1}{\pi\nu A}\int_0^{2\pi}f_k(A_0,A,\varphi)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\right]\dot{x}$$

$$=F\sin\nu t-\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_m(A,\varphi)\mathrm{d}\varphi\right]-\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_k(A_0,A,\varphi)\mathrm{d}\varphi\right]\tag{3-19}$$

等价质量 m_e、等价阻力系数 c_e 与等价刚度 k_e、等价衰减系数 δ_e 与等价固有频率 ω_e 分别为

$$\begin{aligned}
m_e&=m-\left[\frac{1}{\pi\nu^2A}\int_0^{2\pi}f_m(A,\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\right]\\
c_e&=\left[\frac{1}{\pi\nu A}\int_0^{2\pi}f_m(A,\varphi)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\right]+\left[\frac{1}{\pi\nu A}\int_0^{2\pi}f_k(A_0,A,\varphi)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\right]\\
k_e&=\left[\frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi}f_k(A,\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\right]\\
F_0&=-\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}f_m(A,\varphi)\mathrm{d}\varphi+\int_0^{2\pi}f_k(A_0,A,\varphi)\mathrm{d}\varphi\right]\\
\delta_e&=\frac{1}{2\pi m_e\nu A}\left[\int_0^{2\pi}f_m(A,\varphi)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi+\int_0^{2\pi}f_k(A_0,A,\varphi)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\right]\\
\omega_e&=\sqrt{\frac{k_e}{m_e}}=\sqrt{\frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi}f_k(A_0,A,\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\Big/\left\{m-\left[\frac{1}{\pi\nu^2A}\int_0^{2\pi}f_m(A_0,A,\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\right]\right\}}
\end{aligned}\tag{3-20}$$

将式(3-20)的值代入式(3-14)中便可求出等价线性化振幅 A 及相位差 β。

【例3.1-2】 用等价线性化方法求下列非线性振动方程的等价阻力系数 c_e 与等价弹簧刚度 k_e。

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx+bx^3+dx^5=F\sin\nu t$$

式中　b,d——与位移成三次及五次方的恢复力系数。

解　设方程的强迫振动解为

$$x=A\sin(\nu t-\beta)=A\sin\varphi$$

$$\dot{x}=A\nu\cos(\nu t-\beta)=A\nu\cos\varphi$$

按照式(3-20)第二式，求等价阻力系数

$$c_e=\frac{1}{\pi\nu A}\int_0^{2\pi}[c(A\nu\cos\varphi)+k(A\sin\varphi)+b(A\sin\varphi)^3+d(A\sin\varphi)^5]\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=c$$

非线性弹性力对等价阻力系数 c_e 的值没有影响。

按照式(3-20)第三式可求出等价弹簧刚度

$$k_e=\frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi}[c(A\nu\cos\varphi)+k(A\sin\varphi)+b(A\sin\varphi)^3+d(A\sin\varphi)^5]\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$k + \frac{3}{4}bA^2 + \frac{5}{8}dA^4$$

【例 3.1.3】 已知非线性方程

$$m\ddot{x} + f_k(x) = F\sin\nu t$$

式中　$f_k(x)$——非线性弹性力；

$$f_k(x)\begin{cases} kx & -e \leqslant x \leqslant e \\ kx + \Delta k(x-e) & x \geqslant e \\ kx + \Delta k(x+e) & x \leqslant -e \end{cases}$$

求等价刚度、等价固有频率及受迫振动的振幅。

解　在一次近似的情况下，方程的近似解为

$$x = A\sin(\nu t - \beta) = A\sin\varphi$$

非线性弹性力在一次近似情况下可改写为以下形式

$$f_k(A\sin\varphi) = \begin{cases} kA\sin\varphi & \varphi_e \geqslant \varphi \geqslant 2\pi - \varphi_e,\quad \pi + \varphi_e \geqslant \varphi \geqslant \pi - \varphi_e \\ kA\sin\varphi + \Delta k(A\sin\varphi - e) & \varphi_e \leqslant \varphi \leqslant \pi - \varphi_e \\ kA\sin\varphi + \Delta k(A\sin\varphi + e) & \pi + \varphi_e \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \varphi_e \end{cases}$$

式中　φ_e——间隙 e 所对应的相位角；

$$\varphi_e = \arcsin\frac{e}{A}$$

该系统的等价弹簧刚度为

$$k_e = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f(A\sin\varphi)\sin\varphi \mathrm{d}\varphi$$

将 x 的值代入，并进行分段积分，可求得

$$k_e = k + \Delta k\left\{1 - \frac{2}{\pi}\left[\arcsin\frac{e}{A} + \frac{e}{A}\sqrt{1 - \left(\frac{e}{A}\right)^2}\right]\right\} = k + \Delta k\left[1 - \frac{2}{\pi}\left(\varphi_e + \frac{1}{2}\sin 2\varphi_e\right)\right]$$

因为$\frac{e}{A} < 1$，可将 $\arcsin\frac{e}{A}$ 和 $\frac{e}{A}\sqrt{1 - \left(\frac{e}{A}\right)^2}$ 展为幂级数，于是有

$$k_e = k + \Delta k\left\{1 - \frac{4}{\pi}\frac{e}{A}\left[1 - \frac{1}{6}\left(\frac{e}{A}\right)^2 - \frac{1}{40}\left(\frac{e}{A}\right)^4\right]\right\}$$

等价固有频率　$$\omega_e = \sqrt{\frac{k_e}{m}}$$

等价线性化振幅为　$$a = \frac{F}{k_e - m\nu^2}$$

3.2 谐波平衡法

谐波平衡法是将非线性方程的解假设为各次谐波叠加的形式，然后将方程的解代入非线性方程中，消去方程中的正弦项与余弦项，即可得到能求出含有未知系数的相应多个代数方程式，进而可求得方程的解。

设有非线性方程

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) \tag{3-21}$$

若 $f(x, \dot{x}, t)$是 t 的周期为 T 的函数，并且方程存在着周期等于 T 或 T 的整倍的周期

解的情形，方程右边 $f(x,\dot{x},t)$ 在 $x,\dot{x}$ 的有限区域内分别满足来伯尼兹条件，方程的解是惟一的，而且是分段可微的，因此有可能展成为富氏级数. 所以可设方程的解为

$$x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi) \tag{3-22}$$

将它代入等式的两边。等式两边的常数项 a_0 及 $\cos n\varphi, \sin n\varphi$ 的系数必须分别相等，如果只取到 n 次谐波，则可得 $2n+1$ 个方程，由此可求出包含有 n 次谐波的近似解。这一方法称为谐波平衡法。

【例 3.2.1】　用谐波平衡法求以下有阻尼 Duffing 方程的次谐波解(亚谐振动)[27]。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k(x + bx^3) = Q\cos\omega t$$

解　设

$$\gamma = \frac{c}{\sqrt{mk}},\quad \tau = \omega_0 t,\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},\quad \zeta = \sqrt{\pm b}\,x,\quad F = \sqrt{\pm b}\,\frac{Q}{k},\quad \nu = \frac{\omega}{\omega_0}$$

将自变量换成 τ，因变量变换成 ζ，便可写成

$$\zeta'' + \gamma\zeta' + \zeta + \beta\zeta^3 = F\cos\nu\tau$$

$$(\beta = \pm 1)\qquad \left(' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\right)$$

如果设

$$\theta = \nu\tau - \delta,\quad F\cos\delta = H,\quad F\sin\delta = G$$

则上述方程为

$$\nu^2\zeta'' + \gamma\nu\zeta' + \zeta + \beta\zeta^3 = H\cos\theta - G\sin\theta,\quad \left(' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right)$$

假设它的次谐波振动解

$$\zeta = A_{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta}{3} + B_{\frac{1}{3}}\sin\frac{\theta}{3} + A_1\cos\theta + B_1\sin\theta + \cdots$$

将上式代入前式，进行谐波平衡，可得

$$1 - \frac{\nu^2}{9} + \frac{3}{4}\beta\left(A_{\frac{1}{3}}^2 + A_{\frac{1}{3}}A_1 + 2A_1^2 + 2B_1^2\right) = 0$$

$$-\frac{1}{3}\gamma\nu + \frac{3}{4}\beta B_1 A_{\frac{1}{3}} = 0$$

$$(1-\nu^2)A_1 + \frac{1}{4}\beta\left(A_{\frac{1}{3}}^3 + 6A_1B_{\frac{1}{3}}^2 + 3A_1^3 + 3A_1B_1^2\right) + \gamma\nu B_1 = H$$

$$(1-\nu^2)B_1 + \frac{3}{4}\beta B_1\left(2A_{\frac{1}{3}}^2 + B_1^2 + A_1^2\right) - \gamma\nu B_1 = G$$

$$A_{\frac{1}{3}}^2 + B_{\frac{1}{3}}^2 = \rho^2,\quad A_1^2 + B_1^2 = \alpha^2,\quad H^2 + G^2 = F^2$$

则有

$$\left[1 - \frac{\nu^2}{9} + \frac{3}{4}\beta\rho^2 + \frac{2}{3}\beta\alpha^2\right]^2 + \frac{1}{9}\nu^2\gamma^2 = \frac{9}{16}\beta^2\rho^2\alpha^2$$

$$\left\{\left[1 - \nu^2 + \frac{3}{2}\beta\rho^2 + \frac{3}{4}\beta\alpha^2\right]^2 + \alpha^2\nu^2\right\}\alpha^2 - \frac{2}{3}\left[1 - \frac{1}{9}\nu^2 + \frac{3}{4}\beta\rho^2 + \frac{2}{3}\beta\alpha^2\right]$$

$$\times\left[1 - \nu^2 + \frac{2}{3}\beta\rho^2 + \frac{3}{4}\beta\alpha^2\right]\rho^2 + \frac{2}{9}\alpha^2\nu^2\rho^2 + \frac{1}{16}\beta^2\rho^6 = F^2$$

考虑 $\beta = \dfrac{1}{\beta} = \pm 1$，解第一式，得

$$\rho^2 = \begin{Bmatrix}\rho_1^2\\ \rho_2^2\end{Bmatrix} = \frac{1}{6}\left\{8\beta\left(\frac{1}{9}\nu^2 - 1\right) - 9\alpha^2 \pm \sqrt{\left[48\beta\left(\frac{1}{9}\nu^2 - 1\right)\alpha^2 - 63\alpha^4 - \frac{64}{9}\gamma^2\nu^2\right]}\right.$$

由第二式得

$$\alpha^2 = \left\{F^2 + \frac{2}{3}\rho^2\left(1 - \frac{1}{9}\nu^2 + \frac{3}{4}\beta\rho^2 + \frac{3}{2}\beta\alpha^2\right)\left(1 - \nu^2 + \frac{3}{2}\beta\rho^2 + \frac{3}{4}\beta\alpha^2\right) - \frac{2}{9}\alpha^2\nu^2\rho^2 - \frac{1}{16}\rho^6\right\}$$
$$\times \left\{\left[1 - \nu^2 + \frac{3}{2}\beta\rho^2 + \frac{3}{2}\beta\alpha^2\right]^2 + \gamma^2\nu^2\right\}^{-1}$$

式中 $\beta = \pm 1$，软特性为 -1，硬特性为 $+1$。

用电子计算机进行迭代求解，可得次谐波振动的幅值 ρ_1, ρ_2 与 γ, ν 的关系，以及基波幅值 α_1, α_2 与 γ, ν 的关系（见图 3-1）。

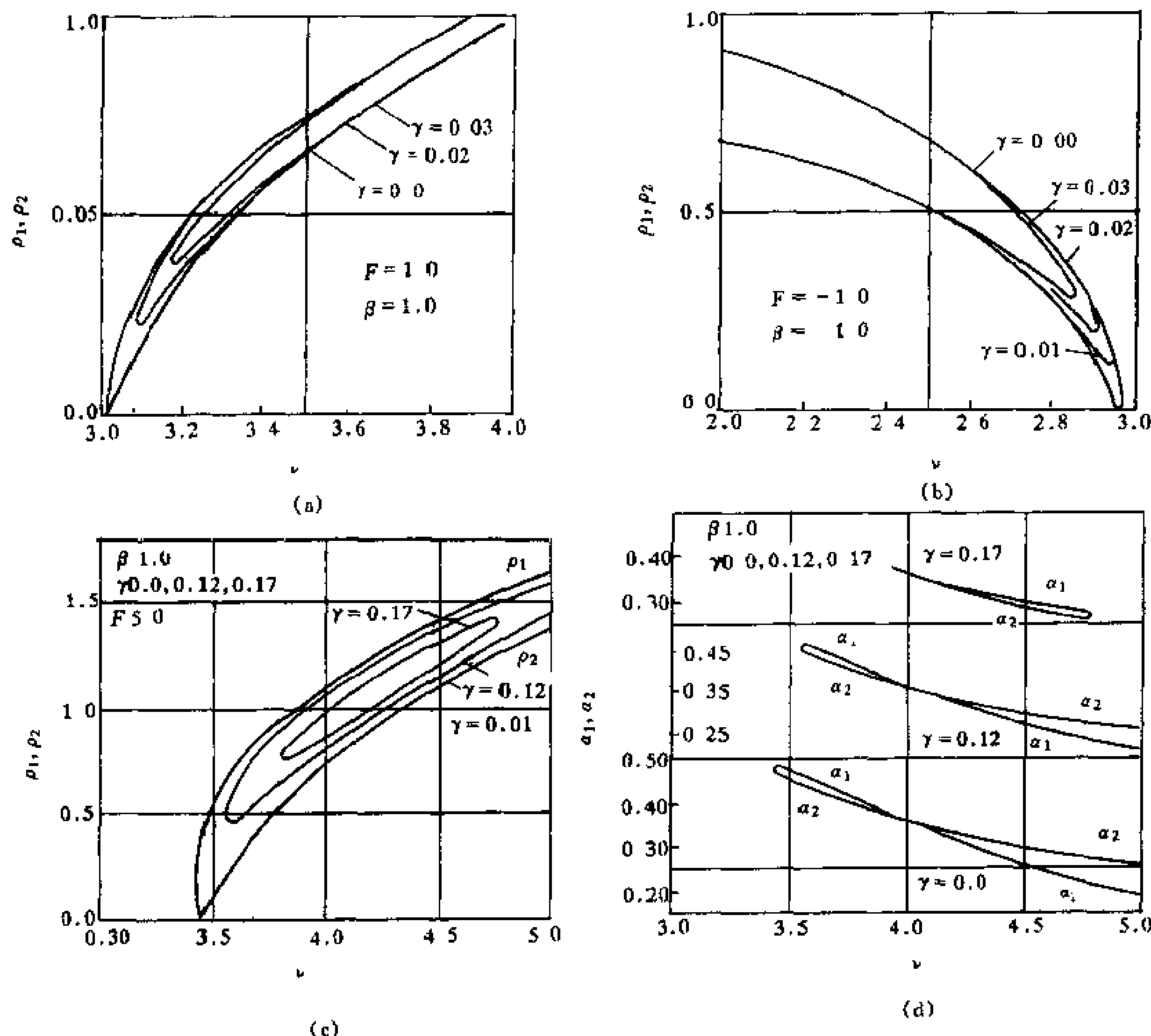


图 3-1　ρ_1, ρ_2 及 α_1, α_2 与 γ, ν 的关系

(a),(b),(c)　ρ_1, ρ_2 与 γ, ν 的关系；(d)　α_1, α_2 与 γ, ν 的关系

3.3　迦辽金法与里兹法[27]

3.3.1　迦辽金法

采用微分算子 $D = \frac{d}{dt}$，可以将非线性方程写成

$$f(D, x, t) = 0 \tag{3-23}$$

式中的 $f(\mathrm{D}, x, t)$ 一般是算子 D、因变量 x 和自变量 t 的某种非线性函数。对于精确解 $x(t)$，函数 $f(\mathrm{D}, x, t)=0$，而对于近似解 $X(t)$，函数 $f(\mathrm{D}, X, t)\neq 0$，或多或少会产生余项，或称误差 $\varepsilon(t)$，即有

$$f(\mathrm{D}, X(t), t)=\varepsilon(t) \tag{3-24}$$

对微分方程的近似解可以采用最小二乘法处理，这种方法便是迦辽金法。

在这种情况下，如果设我们所考察的自变量区域为 $a\leqslant t\leqslant b$，误差为 $\varepsilon(t)$，而"误差的平方和"可以用以下积分式来表示

$$J=\int_a^b \varepsilon^2(t)\mathrm{d}t \tag{3-25}$$

假设近似解 $X(t)$ 可以用适当的函数 $\varphi_i(t)$ 的线性组合来表示，即用

$$X(t)=\varphi_0(t)+\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(t) \tag{3-26}$$

作为方程(3-23)的最合适的近似解，利用最小二乘法原理来确定近似解 $X(t)$。其中的常数 c_i 可以从积分取最小值的条件加以确定。即从下述联立方程式

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial J}{\partial c_1}=\int_a^b 2\varepsilon(t)\frac{\partial\varepsilon(t)}{\partial c_1}\mathrm{d}t=0\\
&\cdots\cdots\\
&\frac{\partial J}{\partial c_n}=\int_a^b 2\varepsilon(t)\frac{\partial\varepsilon(t)}{\partial c_n}\mathrm{d}t=0
\end{aligned} \tag{3-27}$$

来解出 c_i。函数 $\varphi_0(t)$ 可以从物理和其他方面的考虑来选取，使它成为比较逼近的近似解，并且使它满足初始条件。这样，对于 $\varphi_i(t)$ 来说初始值都等于零。通常地，可将 $X(t)$ 假设为各次谐波的迭加

$$X(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i\sin(i\omega t-\alpha_i) \tag{3-28}$$

【例 3.3.1】 用迦辽金法求以下 Duffing 方程的解。

$$\ddot{x}+ax+bx^3=0$$

解 当 b 甚小时，它的周期解近似于谐振动，所以取圆频率为 ω，振幅为 A，即取

$$X(t)=A\cos\omega t$$

作为近似解。这相当于取 $\varphi_0=0$，$\varphi_1=c_1\cos\omega t$，$c_1=A$。这时误差 ε 为

$$\varepsilon=\left(-\omega^2A+aA+\frac{3}{4}bA^3\right)\cos\omega t+\frac{1}{4}bA^3\cos3\omega t$$

区间 (a, b) 可以取为一个周期 $(0, 2\pi)$，因而最适宜的条件可写成

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial A}&=2\int_0^{2\pi}\varepsilon\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial A}\right)\mathrm{d}(\omega t)\\
&=2\int_0^{2\pi}\left[\left(-\omega^2A+aA+\frac{3}{4}bA^3\right)\cos\omega t+\frac{1}{4}bA^3\cos3\omega t\right]\\
&\quad\times\left[\left(-\omega^2+a+\frac{9}{4}bA^2\right)\cos\omega t+\frac{3}{4}bA^2\cos3\omega t\right]\mathrm{d}(\omega t)=0
\end{aligned}$$

即有

$$\left(-\omega^2A+aA+\frac{3}{4}bA^3\right)\left(-\omega^2+a+\frac{9}{4}bA^2\right)+\frac{3}{16}b^2A^5=0$$

由此得 $A=0$

或
$$(a-\omega^2)^2+3bA^2(a-\omega^2)+\frac{15}{8}b^2A^4=0$$
这是一个关于 bA^2 的一元二次方程，解之得
$$\omega^2-a=kbA^2$$
其中 $k=\frac{1}{4}(6\pm\sqrt{6})$，即 $k=0.89$ 或 $k=2.11$。

$A=0$ 给出方程的显然解，这相当于 $k=+\infty$，这时 $J=0$。而系数 0.89 与 2.11 究竟那一个给出 J 的极小值，可以通过下面的分析弄清楚。

因为对于光滑曲线来说，极大值与极小值往往是交替发生的，考虑到这一点，由于 $k=+\infty$ 时，有 $J=0$，它给出最小值，所以 $k=2.11$ 对应于 J 取极大值，而 $k=0.89$ 对应于 J 取极小值。k 的精确解为 0.75，按这种方法求解有一定误差。

3.3.2　里兹法

前一种方法是用误差平方的积分来评价近似解的近似程度。除了上述积分之外，还有其它多种形式的积分，其中之一即拉格朗日函数 $L=T_S-U$ 的积分，或称为哈密顿作用量
$$J=\int_{t_1}^{t_2}L\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}(T_S-U)\mathrm{d}t \tag{3-29}$$
式中　T_S——系统的动能；

U——系统的势能。

对于方程的周期解来说，哈密顿的作用量 J 的变分可取为 0，即
$$\begin{aligned}\delta J&=\delta\int_0^T(T_S-U)\mathrm{d}t\\&=\int_0^T\sum\{(X_i-m_i\ddot{x}_i)\delta x_i+(Y_i-m_i\ddot{y}_i)\delta y_i+(Z_i-m_i\ddot{z}_i)\delta z_i\}\mathrm{d}t=0\end{aligned} \tag{3-30}$$
式中　T——周期；

X_i, Y_i, Z_i——三个坐标方向上的有势力；

m_i——质体 i 的质量；

$\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i$——质体 i 在三个坐标方向上的加速度。

采用以上方法，可以求出方程的解。

下面来看前面列举的非线性方程 $f(\mathrm{D},x,t)=0$。假设该方程是二阶方程，那么它就可以看作是一个力，即相当于式(3-30)中的 $X_i-m_i\ddot{x}_i$，因而方程 $f(\mathrm{D},x,t)=0$ 应满足式(3-30)的条件，即
$$\int_0^T f(\mathrm{D},x,t)\delta x\mathrm{d}t=0 \tag{3-31}$$
使式(3-29)中的 J 取最小值的近似解为 $X(t)$，也可以把它看作是近似度最好的近似解。所以式(3-24)的解可由下式求得
$$\int_0^T\varepsilon(t)\delta X\mathrm{d}t=\int_0^T f(\mathrm{D},X,t)\delta X\mathrm{d}t=0 \tag{3-32}$$
可设方程的解
$$X(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(t) \tag{3-33}$$

因而有

$$\delta X(t) = \sum_{i=1}^{n} \delta c_i \varphi_i(t) \tag{3-34}$$

按照哈密顿原理

$$\int_0^T f(\mathrm{D}, X, t)\,\delta c_i \varphi_i(t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{3-35}$$

即

$$\int_0^T f(\mathrm{D}, X, t)\,\varphi_i(t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{3-36}$$

待定系数 c_i 便可由上式确定。

对于无阻尼非线性系统，可设方程的近似解为

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \sin i\omega t \quad 或 \quad X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cos i\omega t \tag{3-37}$$

对于有阻尼的非线性系统，可设方程的近似解为

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \sin(i\omega t - \alpha_i) \tag{3-38}$$

或

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} (a_i \sin i\omega t + b_i \cos i\omega t) \tag{3-39}$$

由(3-38)有

$$\delta X(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[\delta c_i \sin(i\omega t - \alpha_i) - c_i \cos(i\omega t - \alpha_i)\,\delta\alpha_i\right] \tag{3-40}$$

将(3-40)代入(3-36)式，待定系数 c_i 与 α_i 可由下式求出

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^T f(\mathrm{D}, X, t)\sin(i\omega t - \alpha_i)\,\mathrm{d}t = 0\\&\int_0^T f(\mathrm{D}, X, t)\cos(i\omega t - \alpha_i)\,\mathrm{d}t = 0\end{aligned}\right\} \tag{3-41}$$

将近似解代入上式中，完成积分计算，便可得到一个代数方程或代数方程组。因此用迦辽金—里兹法时，其问题归结于代数方程组的求解。但有时得到的代数方程是超越方程或超越方程组，计算往往是相当复杂的。

【例 3.3.2】 某非线性方程

$$m\ddot{x} + f_k(x) = F\sin\nu t$$

$$f_k(x) = \begin{cases} kx & -e \leqslant x \leqslant e \\ kx + \Delta k(x - e) & x \geqslant e \\ kx + \Delta k(x + e) & x \leqslant -e \end{cases}$$

试用本节的方法求方程的解。

解　由上式得

$$f(D, x, t) = m\ddot{x} + f_k(x) - F\sin\nu t = 0$$

设一次近似解为

$$X(t) = A\sin\nu t$$

代入式(3-36)中，得

$$\int_0^T f(D,X,t)\varphi_i \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left[-m\nu^2 A\sin\nu t + f_k(x) - F\sin\nu t\right]\sin\nu t\,\mathrm{d}t = 0$$

将非线性函数 $f(X)$ 的近似值代入上式，进行分段积分，并化简得

$$\left(\frac{\Delta k + k - m\nu^2}{\Delta k}\right)\frac{A}{e} - \frac{F}{\Delta k e} = \pm\frac{2}{\pi}\left[\frac{A}{e}\arcsin\frac{e}{A} + \sqrt{1-\left(\frac{e}{A}\right)^2}\right]$$

整理后可得

$$A = \frac{F}{k + \Delta k\left\{1 - \frac{2}{\pi}\left[\arcsin\frac{e}{A} + \frac{e}{A}\sqrt{1-\left(\frac{e}{A}\right)^2}\right]\right\} - m\nu^2}$$

因为 $\frac{e}{A}<1$，可将 $\arcsin\frac{e}{A}$ 和 $\frac{e}{A}\sqrt{1-\left(\frac{e}{A}\right)^2}$ 展为幂级数，于是有

$$A = \frac{F}{k + \Delta k\left\{1 - \frac{4}{\pi}\frac{e}{A}\left[1 - \frac{1}{6}\left(\frac{e}{A}\right)^2 - \frac{1}{40}\left(\frac{e}{A}\right)^4\right]\right\} - m\nu^2}$$

为了求得 A 值，可采用图解法或数值方法。由上面解式可见，等号左边和右边分别为

$$y_1 = \pm\frac{2}{\pi}\left[\frac{A}{e}\arcsin\frac{e}{A} + \sqrt{1-\left(\frac{e}{A}\right)^2}\right]$$

$$y_2 = \left(\frac{\Delta k + k - m\nu^2}{\Delta k}\right)\frac{A}{e} - \frac{F}{\Delta k e}$$

上式若以 $\frac{A}{e}$ 为自变量，用坐标横轴来表示；而 y_1 和 y_2 为纵坐标，则第一方程为两条曲线 $A''B''$ 和 $A'B'$，第二方程为直线。这两条线的交点即为方程的解。

用数值方法计算时，将具体数值代入上式，利用两式相等的条件，即可求出 $\frac{A}{e}$，当 e 值确定后，便可求出 A 值。

3.4 迭代法

3.4.1 杜芬迭代法

杜芬方程的近似解可用杜芬迭代法求出。设杜芬方程有以下形式

$$\ddot{x} + ax + bx^3 = F\cos\nu t \tag{3-42}$$

假设 b 很小，F 也很小，而且 ν^2 接近于 a，这时方程可写成

$$\ddot{x} + \nu^2 x = (\nu^2 - a)x - bx^3 + F\cos\nu t \tag{3-43}$$

在上述假设下，方程右端为小量，因此可以先将它略去，方程成为

$$\ddot{x}_0 + \nu^2 x_0 = 0 \tag{3-44}$$

其解为

$$x_0 = A\cos\nu t \tag{3-45}$$

并作为零次近似解。将它代入式(3-43)右端，有

$$\ddot{x}_1 + \nu^2 x_1 = \left[(\nu^2 - a)A - \frac{3}{4}bA^3 + F\right]\cos\nu t - \frac{1}{4}bA^3\cos 3\nu t \tag{3-46}$$

根据上式来确定一次近似解时，为保证 x_1 是周期的，即方程的解中不出现长期项(或

称永年项，久期项）$t\sin\nu t$ 与 $t\cos\nu t$，上式右端 $\cos\nu t$ 的系数应等于零，因而有

$$\nu^2 = a + \frac{3}{4}bA^2 - \frac{F}{A} \tag{3-47}$$

式(3-46)去掉永年项后求解，再加上零次解，得到一次近似解如下

$$x_1(t) = A\cos\nu t + \frac{1}{32}\frac{bA^3}{\nu^2}\cos3\nu t \tag{3-48}$$

式中的 ν 由(3-47)确定。在这一方程中，我们有意不给定 ν，而把它看作是基波振幅 A 的函数。

将一次近似解代入式(3-43)的右端，再按方程(3-46)确定二次近似解 $x_2(t)$。假设代入后右端可写成以下形式

$$P_1(A)\cos\nu t + P_3(A)\cos3\nu t + P_5(A)\cos5\nu t + \cdots\cdots \tag{3-49}$$

则为了使 $x_2(t)$ 是周期等于$\frac{2\pi}{\nu}$的周期函数，须有 $P_1(A) = 0$，即

$$\nu^2 = a + \frac{3}{4}bA^2 - \frac{F}{A} + \frac{3}{128}\frac{b^2A^4}{\nu^2} + \frac{3}{2048}\frac{b^3A^6}{\nu^4} \tag{3-50}$$

而二次近似解为

$$x_2(t) = A\cos\nu t - \frac{P_3(A)}{8\nu^2}\cos3\nu t - \frac{P_5(A)}{24\nu^2}\cos5\nu t + \cdots\cdots \tag{3-51}$$

以下各次近似解可依次类推。

式(3-47)可看作以激振力幅 F 为参数的共振曲线或响应曲线的一次近似关系式，即

$$A = \frac{F}{a + \frac{3}{4}bA^2 - \nu^2} \tag{3-52}$$

如果 $b = 0$，它就退化为线性强迫振动共振曲线的关系式。按照式(3-52)作图，利用(A, ν^2)平面，它可以由抛物线 $\nu^2 = a + \frac{3}{4}bA^2$ 和双曲线 $\nu^2 = -\frac{F}{A}$横坐标迭加得出(图 3-2)。由图可见，ν^2 作为 A 的函数是单值的，相反 A 作为ν^2 的函数在某些区域是三值的。

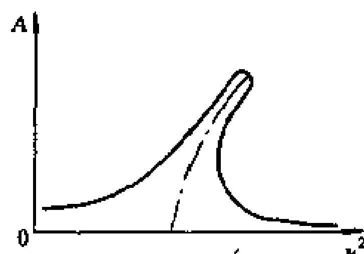


图 3-2　A 与 ν^2 的关系曲线

对于具有线性阻尼的杜芬方程，可以用类似的迭代法进行求解。

3.4.2　拉舍迭代法

这种方法仅要求激振力幅 F 为小量，非线性函数 $f(x)$则可以是任意的。因而对于方程

$$\ddot{x} + f(x) = F\cos\nu t \tag{3-53}$$

可设

$$\theta = \nu t \tag{3-54}$$

将变量 t 置换成变量θ，式(3-53)可改写成

$$\nu^2 x'' + f(x) = F\cos\theta \qquad \left(' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right) \tag{3-55}$$

为说明方便，假定非线性特性有反对称性，即 $f(-x) = -f(x)$，但拉舍法也适用于不存在反对称的情况。

这种方法仍然是给定 A 值，并将 ν 看作是 A 的函数。并且以非线性自由振动方程

$$\nu_0^2 x''_0 + f(x_0) = 0 \tag{3-56}$$

的解 x_0 作为零次近似进行迭代求解。先确定其周期为 2π，初始条件 $x_0(0)=A, x'_0=0$。求解 $x_0(0)$ 和 ν_0 可由第二章所述简单求积分法进行求解，即设

$$F(x) = \int_0^x f(x)\mathrm{d}x \tag{3-57}$$

取 θ 为 x 的函数

$$\theta = \theta_0 = \nu_0 \int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2[F(A)-F(x)]}} \tag{3-58}$$

由于 $f(-x) = -f(x)$，所以有

$$\frac{1}{\nu_0} = \frac{2}{\pi}\int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2[F(A)-F(x)]}} \tag{3-59}$$

这样求得零次近似解后，一次近似解可由以下方程求出周期为 2π 的周期解。

$$\nu_1^2 x''_1 + f(x_1) - F\cos(\theta_0(x_1)) = 0 \tag{3-60}$$

同样可在初始条件下 $x_1(0)=A, x(0)=0$，以及周期性条件 $x_1(\theta+2\pi)=x_1(\theta)$ 下，再一次用简单求积分法求出 $x_1(\theta)$ 与 ν_1。而 n 次近似解 $x_n(\theta)$ 与 ν_n 可以从以下方程解得

$$\nu_n^2 x''_n + f(x_n) - F\cos(\theta_{n-1}(x_n)) = 0 \tag{3-61}$$

且应满足下列条件 $x_n(0)=A, x'_n(0)=0$，以及 $x_n(\theta+2\pi)=x_n(\theta)$。前面假定 $\theta_{n-1}(x)$ 是 $n-1$ 次近似中直接得到的正好是 $\theta_0(x), \cdots, \theta_{n-1}(x)$。必须指出，拉舍法假定了函数 $x(\theta)$ 在半周期内是 θ 的单调函数，如果不是单调函数的话，则不存在惟一对应的反函数，因而拉舍法是不适用的。

3.5 应用举例

【例3.5.1】 系统的方程为

$$\ddot{x} + \mathrm{sgn}(x) = 0 \tag{1}$$

用谐波平衡法求其幅频关系，并与精确结果进行比较。

解 设近似解为

$$x = a\cos\omega t \tag{2}$$

将 $\mathrm{sgn}(a\cos\omega t)$ 展成富氏级数。由于它为偶函数，故富氏级数中没有正弦项

$$\mathrm{sgn}(a\cos\omega t) = \alpha_0(a) + \alpha_1(a)\cos\omega t + \text{高次谐波} \tag{3}$$

式中

$$\begin{aligned}
\alpha_0(a) &= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \mathrm{sgn}(a\cos\omega t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{\omega}{2\pi}\left(\int_0^{\pi/(2\omega)}\mathrm{d}t - \int_{\pi/(2\omega)}^{3\pi/(2\omega)}\mathrm{d}t + \int_{3\pi/(2\omega)}^{2\pi/\omega}\mathrm{d}t\right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1(a) &= \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \mathrm{sgn}(a\cos\omega t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{\omega}{\pi}\left(\int_0^{\pi/(2\omega)}\cos\omega t\,\mathrm{d}t - \int_{\pi/(2\omega)}^{3\pi/(2\omega)}\cos\omega t\,\mathrm{d}t + \int_{3\pi/(2\omega)}^{2\pi/\omega}\cos\omega t\,\mathrm{d}t\right) \\
&= 4/\pi
\end{aligned}$$

因此，将 $x = a\cos\omega t$ 代入原方程可得

$$-\omega^2 a\cos\omega t = -\frac{4}{\pi}\cos\omega t + \text{高次谐波} \tag{5}$$

比较上式两边 $\cos\omega t$ 的系数，可得

$$\omega = 2/\sqrt{\pi a} \tag{6}$$

此式即为所求的幅频关系。

方程可以用精确积分方法求出精确解。原式写成

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \mp 1(\text{当 } x > \text{或} < 0)\end{aligned} \tag{7}$$

积分得 $y^2 = -2x + C$ 或 $y^2 = 2x + C$。

当 $x>0$ 时，对微分方程 $\ddot{x} = -1$ 进行积分，可得

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -t + C_1 \\ x(t) &= -\frac{1}{2}t^2 + C_1 t + C_2\end{aligned} \tag{8}$$

设 t_1 为振幅为 a 时周期 T 的 1/4，则有 $x(0) = 0$，$\dot{x}(t_1) = 0$，故积分常数 $C_1 = t_1$，$C_2 = 0$，有

$$x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t_1 t \tag{9}$$

又 $x(t_1) = a$，故知 $t_1 = \sqrt{2a}$，从而周期

$$T = 4t_1 = 4\sqrt{2a} = 5.657\sqrt{a} \tag{10}$$

比较谐波平衡法得到的结果 $T = 2\pi/\omega = \pi\sqrt{\pi a} = 5.568\sqrt{a}$，可知周期差别为 1.6%。

【例 3.5.2】 用 Duffing 迭代法求解下式方程。

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon b x^3 = F_1\cos\Omega_1 t + F_2\cos\Omega_2 t \tag{11}$$

解 将它写成

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \varepsilon b x^3 + F_1\cos\Omega_1 t + F_2\cos\Omega_2 t \tag{12}$$

作为第一次近似，可取

$$x_0 = A_1\cos\Omega_1 t + A_2\cos\Omega_2 t \tag{13}$$

于是有

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -\omega_0^2 x_0 - \varepsilon b x_0^3 + F_1\cos\Omega_1 t + F_2\cos\Omega_2 t \\ &= \left[-\omega_0^2 A_1 - \varepsilon b\left(\frac{3A_1^3}{4} + \frac{3A_1A_2^2}{2}\right) + F_1\right]\cos\Omega_1 t \\ &\quad + \left[-\omega_0^2 A_2 - \varepsilon b\left(\frac{3A_2^3}{4} + \frac{3A_2A_1^2}{2}\right) + F_2\right]F\cos\Omega_2 t \\ &\quad - \varepsilon b\left[\frac{3}{4}A_1^2A_2(\cos(2\Omega_1 + \Omega_2)t + \cos(2\Omega_1 - \Omega_2)t)\right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4}A_2^2A_1(\cos(2\Omega_2 + \Omega_1)t + \cos(\Omega_1 - 2\Omega_2)t)\right] \\ &\quad - \varepsilon b\left(\frac{A_1^3}{4}\cos 3\Omega_1 t + \frac{A_2^3}{4}\cos 3\Omega_2 t\right)\end{aligned} \tag{14}$$

积分两次，得

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{\Omega_1^2}\left[\omega_0^2 A_1 + \frac{3}{4}\varepsilon b A_1(A_1^2 + 2A_2^2) - F_1\right]\cos\Omega_1 t \\ &\quad + \frac{1}{\Omega_2^2}\left[\omega_0^2 A_2 + \frac{3}{4}\varepsilon b A_2(A_2^2 + 2A_1^2) - F_2\right]\cos\Omega_2 t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{3\varepsilon bA_1^3}{36\Omega_1^2}\cos3\Omega_1 t+\frac{3\varepsilon bA_2^3}{36\Omega_2^2}\cos3\Omega_2 t \\
&+\frac{3}{4}\varepsilon bA_1^2A_2\left[\frac{\cos(2\Omega_1+\Omega_2)t}{(2\Omega_1+\Omega_2)^2}+\frac{\cos(2\Omega_1-\Omega_2)t}{(2\Omega_1-\Omega_2)^2}\right] \\
&+\frac{3}{4}\varepsilon bA_2^2A_1\left[\frac{\cos(\Omega_1+2\Omega_2)t}{(\Omega_1+2\Omega_2)^2}+\frac{\cos(\Omega_1-2\Omega_2)t}{(\Omega_1-2\Omega_2)^2}\right]
\end{aligned} \tag{15}
$$

式中　$\cos\Omega_1 t$ 和 $\cos\Omega_2 t$ 项的系数应是 A_1 和 A_2，可得

$$
\begin{aligned}
&(\omega_0^2-\Omega_1^2)A_1+\frac{3}{4}\varepsilon bA_1(A_1^2+2A_2^2)=F_1 \\
&(\omega_0^2-\Omega_2^2)A_2+\frac{3}{4}\varepsilon bA_2(A_2^2+2A_1^2)=F_2
\end{aligned} \tag{16}
$$

上式是振幅 A_1 和 A_2 与外激励频率 Ω_1 和 Ω_2 的响应关系式。

式中除了主谐波外，还包括有超谐波和组合谐波。值得注意的是，当用迭代法继续进行下去时，所得到的近似式将包括越来越多的项，其分母中所含的 $\pm p\Omega_1\pm q\Omega_2$（$p$，$q$ 为整数）的幂次将越来越高。根据 Kronecker 理论，若 Ω_1/Ω_2 为无理数，则存在无穷个不同的整数 p 和 q，使得 $\pm p\Omega_1\pm q\Omega_2$ 任意接近于 0，因而对应的系数将任意增大，故其收敛性不能保证。这一点 Poincare 称之为“小除数困难(difficulty of small divisors)”。当然在某些情况下，如当存在粘性阻尼时，小除数困难可以消除。

计算与思考

用本章的几种方法求下列方程的近似解。

1．$\ddot{x}+\omega_0^2x-(\dot{x}-\dot{x}^3)=F\cos\nu t$

2．$\ddot{x}+x=-\varepsilon x|x|+F\cos\nu t$

3．$\ddot{x}+x+\varepsilon x^2\dot{x}=F\cos\nu t$

4．$\ddot{x}+x-\varepsilon\dot{x}^3=F\cos\nu t$

5．用迭代法求

$$\ddot{x}+\omega_0^2x-\beta_1^2x^3+\beta_2^2x^5=F\cos\nu t$$

的主谐波周期解，画出共振曲线，研究跳跃现象。

6．试用等价线性化法求有阻尼的 Duffing 方程的等效刚度和等效阻尼系数。

7．试用迦辽金法求非线性自治系统方程 $m\ddot{x}+kx+\alpha x^3=0$ 的解。

8．试用迦辽金法求解对称分段线性非线性共振筛的振幅表达式。

9．试用谐波平衡法求某振动系统 $\ddot{x}+\varepsilon x^3=0$ 的频响方程。

10．某振动系统的运动方程为 $\ddot{x}+\sum\limits_{j=1}^{n}a_jx^j=0$，试用谐波平衡法求解。

11．试用谐波平衡法求有阻尼 Duffing 方程 $\ddot{x}+c\dot{x}+kx+\beta x^3=F\cos\nu t$ 的二阶近似解。

12．试用里兹法求振动系统 $\ddot{x}+k^2x^n=0$ 的解。

13．试用里兹法求 Duffing 方程 $\ddot{x}+k^2(x+\mu^2x^3)=F\cos\nu t$ 的频响方程。

14．试用里兹法求解 van der Pol 方程 $\ddot{x}+\varepsilon(x^2-1)\dot{x}+k^2x=0$。

15．试用杜芬迭代法求解 Duffing 方程 $\ddot{x}+\dot{x}+\mu(\alpha x+\beta x^3)=\mu F\cos\nu t$，式中 μ 为小参数。（要求迭代二次以上）。

第四章　传统小参数法

小参数法也称摄动法，传统的小参数法是庞加莱(Poincare)等人于 19 世纪末在研究天体力学时提出来的。后来多位学者如马尔金[13]、奈弗[4]等人发展了这种方法。传统的小参数法只能求出稳态解，即只能对定常情况进行分析，而在此基础上发展起来的现代摄动法，如平均法、多尺度法、渐近法等都可用来对非定常情况[$a(t)$, $\beta(t)$]进行分析。下面通过对一般非线性系统的讨论来说明传统小参数法的基本思想和求解弱非线性方程的方法。

4.1　一般弱非线性自治系统

假设有一振动系统，其运动可用以下二阶非线性方程来描述

$$\ddot{x}+x=\varepsilon f(x,\dot{x}) \tag{4-1}$$

设以上方程的解可由小参数 ε 的幂级数的形式来表示

$$x(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\cdots \tag{4-2}$$

4.1.1　直接展开法

将式(4-2)的解代入方程(4-1)中，得

$$\ddot{x}_0+\varepsilon\ddot{x}_1+x_0+\varepsilon x_1+\cdots=\varepsilon f(x_0+\varepsilon x_1+\cdots,\dot{x}_0+\varepsilon\dot{x}_1+\cdots)=\varepsilon f(x_0,\dot{x}_0)+\cdots \tag{4-3}$$

将上式展开，并令等式两边 ε 同次幂的系数相等，得

$$\begin{aligned}&\ddot{x}_0+x_0=0\\&\ddot{x}_1+x_1=f(x_0,\dot{x}_0)\\&\cdots\cdots\end{aligned} \tag{4-4}$$

先求上式中的第一个方程，即派生方程的解，其通解为

$$x_0=a\cos(t+\beta) \tag{4-5}$$

式中 a 和 β 为任意常数。将上式代入式(4-4)的第二式，得

$$\ddot{x}_1+x_1=f[a\cos(t+\beta),-a\sin(t+\beta)] \tag{4-6}$$

可将上式右端的非线性函数展为富氏级数的形式，即

$$\begin{aligned}&f[a\cos(t+\beta),-a\sin(t+\beta)]\\&=f_0(a)+\sum_{n=1}^{\infty}[f_n(a)\cos n(t+\beta)+g_n(a)\sin n(t+\beta)]\end{aligned} \tag{4-7}$$

式中

$$\begin{aligned}f_0(a)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a,\varphi)\mathrm{d}\varphi\\f_n(a)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(a,\varphi)\cos n\varphi\mathrm{d}\varphi\\g_n(a)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(a,\varphi)\sin n\varphi\mathrm{d}\varphi\\f(a,\varphi)&=f(a\cos\varphi,-a\sin\varphi)\end{aligned} \tag{4-8}$$

因此可将 x_1 的方程改写为

$$\ddot{x}_1 + x_1 = f_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[f_n(a)\cos n(t+\beta) + g_n(a)\sin n(t+\beta)\right] \tag{4-9}$$

进而根据微分方程的一般求解方法可以求出

$$\begin{aligned} x_1 = {} & f_0 + \frac{1}{2}\left[f_1 t\sin(t+\beta) - g_1 t\cos(t+\beta)\right] \\ & + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{1-n^2}\left[f_n(a)\cos n(t+\beta) + g_n(a)\sin n(t+\beta)\right] \end{aligned} \tag{4-10}$$

和以前一样,非线性方程的解为

$$\begin{aligned} x = {} & a\cos(t+\beta) + \varepsilon\left\{f_0 + \frac{1}{2}\left[f_1 t\sin(t+\beta) - g_1 t\cos(t+\beta)\right]\right. \\ & \left. + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{1-n^2}\left[f_n(a)\cos n(t+\beta) + g_n(a)\sin n(t+\beta)\right]\right\} + \cdots \end{aligned} \tag{4-11}$$

我们注意到,上式右端存在显含时间的长期项,它对于较长的时间 t 是无效的。因此,用直接展开法无法求得有效解,只能得到非一致有效解。为此,必须采取引进变换的办法。

4.1.2 重正规化法

对于式(4-11),设

$$\begin{aligned} & \tau = \omega t, \quad \omega = 1 + \varepsilon\omega_1 + \cdots \\ & t = \omega^{-1}\tau = \tau(1+\varepsilon\omega_1+\cdots)^{-1} = \tau - \varepsilon\omega_1\tau + \cdots \end{aligned} \tag{4-12}$$

将上面求得的值代入非线性方程的解(4-11)中,可得

$$\begin{aligned} x = {} & a\cos(\tau - \varepsilon\omega_1\tau + \beta + \cdots) + \varepsilon\left\{f_0 + \frac{1}{2}\left[f_1(\tau - \varepsilon\omega_1\tau + \cdots)\sin(\tau - \varepsilon\omega_1\tau + \beta + \cdots)\right.\right. \\ & \left. - g_1(\tau - \varepsilon\omega_1\tau + \cdots)\cos(\tau - \varepsilon\omega_1\tau + \beta + \cdots)\right] \\ & \left. + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{1-n^2}\left[f_n(a)\cos n(\tau - \varepsilon\omega_1\tau + \beta + \cdots) + g_n(a)\sin n(\tau - \varepsilon\omega_1\tau + \beta + \cdots)\right]\right\} + \cdots \end{aligned} \tag{4-13}$$

按照泰勒级数,下式可表示为

$$\begin{aligned} & \cos n(\tau - \varepsilon\omega_1\tau + \beta + \cdots) = \cos n(\tau+\beta) + \varepsilon\omega_1 n\tau\sin n(\tau+\beta) + \cdots \\ & \sin n(\tau - \varepsilon\omega_1\tau + \beta + \cdots) = \sin n(\tau+\beta) - \varepsilon\omega_1 n\tau\cos n(\tau+\beta) + \cdots \end{aligned} \tag{4-14}$$

利用这个展开式,可以把方程的解写成

$$\begin{aligned} x = {} & a\cos(\tau+\beta) + \varepsilon\left\{f_0 + \left[\left(\frac{1}{2}f_1 + \omega_1 a\right)\tau\sin(\tau+\beta) - \frac{1}{2}g_1\tau\cos(\tau+\beta)\right]\right. \\ & \left. + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{1-n^2}\left[f_n(a)\cos n(\tau+\beta) + g_n(a)\sin n(\tau+\beta)\right]\right\} + \cdots \end{aligned} \tag{4-15}$$

与直接展开法不同,那里的混合长期项不能消去,而上式中的长期项可通过选择 ω_1 的值使它消去,即

$$\begin{aligned} & \omega_1 a + \frac{1}{2}f_1(a) = 0 \\ & g_1 = 0 \end{aligned} \tag{4-16}$$

这时由(4-12)有

$$\omega = 1 - \frac{\varepsilon}{2a}f_1(a) + \cdots$$
$$= 1 - \frac{\varepsilon}{2\pi a}\int_0^{2\pi} f(a,\varphi)\cos\varphi \mathrm{d}\varphi + \cdots \tag{4-17}$$

以上方程的解是一致有效的。

庞加莱等提出的小参数法是将方程中的非线性函数按其量级展成小参数 ε 的幂级数，并且设 ε 足够小时，它是 ε 的解析函数。

设 $\varepsilon = 0$，即不考虑这些小项的影响，则得简化方程式，这个方程式称为派生方程式，其周期解称为派生解。

这种方法把求得的解作为非线性方程的周期解的第一次近似值。但庞加莱等指出，方程含 ε 的项虽然很小，但对系统的周期运动可能发生本质的影响。对派生解来说，非线性方程可能不存在周期解，也可能有几个或多个周期解，即派生解不永远对应原系统的周期解。摄动法的根本任务是研究在什么条件下，原系统有这样的周期解，它在 $\varepsilon \to 0$ 时等于某派生解，并且证明在 ε 足够小时，非线性方程的周期解能展成 ε 的收敛的幂级数。

4.2　无强迫力作用的杜芬方程的传统小参数法求解

设有以下非线性方程

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0 \tag{4-18}$$

下面以无阻尼 Duffing 方程为例讨论三种传统的小参数法，即直接展开法、林特斯德特-庞加莱法和重正规化法。

4.2.1　直接展开法的失效

对方程(4-18)，当 $\varepsilon = 0$，则得派生方程

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0 \tag{4-19}$$

上式的通解为

$$x_0 = a_0\cos(t + \beta_0) \tag{4-20}$$

式中 a_0 和 β_0 为任意常数。

当 ε 为不等于零的小量时，方程的通解不再由上式给出，而必须加以校正。我们来试用 ε 幂级数形式的校正，即

$$x(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots \tag{4-21}$$

这里我们只限讨论校正级数中的第一项，即找形式为

$$x(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + O(\varepsilon^2) \tag{4-22}$$

的近似解。因为在校正级数中只保留一项，我们称上式为一阶展开式。

将上式代入非线性方程，得到

$$\ddot{x}_0 + \varepsilon \ddot{x}_1 + O(\varepsilon^2) + x_0 + \varepsilon x_1 + O(\varepsilon^2) + \varepsilon(x_0 + \varepsilon x_1 + O(\varepsilon^2))^3 = 0 \tag{4-23}$$

将上式展开，并令 ε 同次幂的系数之和为零，得

$$\begin{aligned}&\ddot{x}_0 + x_0 = 0\\&\ddot{x}_1 + x_1 + x_0^3 = 0\end{aligned} \tag{4-24}$$

先对上式中的第一个方程进行求解，其通解为

$$x_0 = a_0\cos(t+\beta_0) \tag{4-25}$$

将上式代入式(4-24)的第二式，得

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -a_0^3\cos^3(t+\beta_0) = -\frac{3}{4}a_0^3\cos(t+\beta_0) - \frac{1}{4}a_0^3\cos3(t+\beta_0) \tag{4-26}$$

上式的解由通解和特解组成

$$x_1 = a_1\cos(t+\beta_0) - \frac{3}{8}a_0^3\cdot t\cos(t+\beta_0) + \frac{1}{32}a_0^3\cos3(t+\beta_0) \tag{4-27}$$

非线性方程的解为

$$x = a_0\cos(t+\beta_0) + \varepsilon\left[a_1\cos(t+\beta_0) - \frac{3}{8}a_0^3\cdot t\cos(t+\beta_0) + \frac{1}{32}a_0^3\cos3(t+\beta_0)\right] + \cdots \tag{4-28}$$

因为

$$a_0 = a + O(\varepsilon) \qquad \beta_0 = \beta + O(\varepsilon) \tag{4-29}$$

所以有

$$\begin{aligned} x &= a\cos(t+\beta_0) \\ &+ \varepsilon\left[-\frac{3}{8}[a+O(\varepsilon)]^3\cdot t\cos(t+\beta+O(\varepsilon)) + \frac{1}{32}[a+O(\varepsilon)]^3\cos3(t+\beta+O(\varepsilon))\right] + \cdots \end{aligned} \tag{4-30}$$

式(4-30)等号后第二项称为长期项，仅仅当 εt 很小时，方程的解才有效。事实上，上式对于长时间显然是非一致有效的或者说是失效的。这是因为直接展开法把非线性方程的固有频率看作是固定不变的常数而引起的。为此，下面用另两种方法进行进一步分析。

4.2.2 林特斯德特-庞加莱(Lindstedt-Poincare)法

L-P 法的基本思想在于认识到系统的频率受非线性项的影响而发生变化，为了考虑频率对非线性的依赖关系，在微分方程中明显地示出系统的频率是小参数 ε 的函数。为此引入如下变换

$$\tau = \omega t \tag{4-31}$$

式中 ω 是依赖于 ε 的常数。这时，我们需要将自变量由 t 变为 τ，因此有

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} = \omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} &= \omega\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau} = \omega\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} = \omega^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} \end{aligned} \tag{4-32}$$

这时上述非线性方程可写为

$$\omega^2\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0 \tag{4-33}$$

式中的 x 和 ω 可表示为 ε 幂级的形式，$\omega_0 = 1$，即

$$\begin{aligned} x &= x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \cdots \\ \omega &= 1 + \varepsilon\omega_1 + \cdots \end{aligned} \tag{4-34}$$

将上式代入非线性方程，得

$$(1+\varepsilon\omega_1+\cdots)^2(\ddot{x}_0+\varepsilon\ddot{x}_1+\cdots) + x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots + \varepsilon(x_0+\varepsilon x_1+\cdots)^3 = 0 \tag{4-35}$$

令 ε 的同次幂的系数等于零，可得

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0$$
$$\ddot{x}_1 + x_1 = -x_0^3 - 2\omega_1 \ddot{x}_0 \tag{4-36}$$

先对上式中的第一个方程进行求解,其通解为

$$x_0 = a\cos(\tau + \beta) \tag{4-37}$$

将上式代入式(4-36)的第二式,得

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -a^3\cos^3(\tau + \beta) + 2\omega_1 a\cos(\tau + \beta) \tag{4-38}$$

或

$$\ddot{x}_1 + x_1 = \left(2\omega_1 a - \frac{3}{4}a^3\right)\cos(\tau + \beta) - \frac{1}{4}a^3\cos3(\tau + \beta) \tag{4-39}$$

上式的特解为

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(2\omega_1 a - \frac{3}{4}a^3\right)\cdot\tau\cos(\tau + \beta) + \frac{1}{32}a^3\cos3(\tau + \beta) \tag{4-40}$$

我们注意到上面的解中包含有一个混合长期项,它会使展开式非一致有效。与直接展开法不同,那里不能消灭长期项,除非是 $a=0$,而在这里可以通过选择参数 ω_1 消除长期项,即令长期项的系数等于零,即

$$2\omega_1 a - \frac{3}{4}a^3 = 0 \quad 或 \quad \omega_1 = \frac{3}{8}a^2 \tag{4-41}$$

这时,方程的特解为

$$x_1 = \frac{1}{32}a^3\cos3(\tau + \beta) \tag{4-42}$$

由此可求得非线性方程的解

$$x = a\cos(\tau + \beta) + \frac{\varepsilon}{32}a^3\cos3(\tau + \beta) \tag{4-43}$$

而固有频率为

$$\omega = 1 + \frac{3}{8}\varepsilon a^2 + \cdots \tag{4-44}$$

由于 $\tau = \omega t$,我们可将上式写成

$$x = a\cos\left[\left(1 + \frac{3}{8}\varepsilon a^2\right)t + \beta\right] + \varepsilon\frac{1}{32}a^3\cos3\left[\left(1 + \frac{3}{8}\varepsilon a^2\right)t + \beta\right] + \cdots \tag{4-45}$$

上面求得的解是一致有效的解。

4.2.3 重正规化方法

在上一节中,我们设 $\tau = \omega t$,因而有

$$t = \omega^{-1}\tau = \tau(1 + \varepsilon\omega_1 + \cdots)^{-1} = \tau - \varepsilon\omega_1\tau + \cdots \tag{4-46}$$

将上面求得的值代入非线性方程的解中,可得

$$x = a\cos(\tau - \varepsilon\omega_1\tau + \beta + \cdots) + \varepsilon a^3\left[-\frac{3}{8}(\tau - \varepsilon\omega_1\tau + \cdots)\sin(\tau - \varepsilon\omega_1\tau + \beta + \cdots) + \frac{1}{32}\cos(\tau - \varepsilon\omega_1\tau + \beta + \cdots)\right] \tag{4-47}$$

按照泰勒级数,下式可表示为

$$\cos n(\tau - \varepsilon\omega_1\tau + \beta + \cdots) = \cos n(\tau + \beta) + \varepsilon\omega_1 n\tau\sin n(\tau + \beta) + \cdots$$
$$\sin n(\tau - \varepsilon\omega_1\tau + \beta + \cdots) = \sin n(\tau + \beta) - \varepsilon\omega_1 n\tau\cos n(\tau + \beta) + \cdots \tag{4-48}$$

将上面求得的值代入用直接展开法求得的非线性方程的解中,可得

$$x = a\cos(\tau+\beta) + \varepsilon\left[\left(2\omega_1 a - \frac{3}{4}a^3\right)\tau\cdot\cos(\tau+\beta)\right] + \frac{1}{32}a^3\cos3(\tau+\beta) + \cdots \tag{4-49}$$

与直接展开法不同，那里的混合长期项不能消去，而上式中的长期项可通过选择 ω_1 的值使它消去，即

$$2\omega_1 a - \frac{3}{4}a^3 = 0 \quad 或 \quad \omega_1 = \frac{3}{8}a^2 \tag{4-50}$$

这时，非线性方程的解为

$$x = a\cos(\tau+\beta) + \frac{1}{32}a^3\varepsilon\cos3(\tau+\beta) \tag{4-51}$$

以上结果与上一节的完全相同。

4.3 弱非线性的非自治系统

非自治系统的微分方程为

$$\ddot{x} + x + \varepsilon f(x, \dot{x}) = F\cos\omega t \tag{4-52}$$

对于非自治系统，可以分两种情况进行研究，即非共振情况和共振情况。

4.3.1 直接展开法(非共振情况，$\nu \neq (p/q)\omega$，p，q 为互质数)

设方程的解为

$$x = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \cdots \tag{4-53}$$

将上式代入非线性方程(4-52)，得

$$\ddot{x}_0 + \varepsilon\ddot{x}_1 + \cdots + x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots + \varepsilon f(x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots, \dot{x}_0 + \varepsilon\dot{x}_1 + \cdots) = F\cos\omega t \tag{4-54}$$

令 ε 的同次幂的系数等于零，可得

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_0 + x_0 = F \\ &\ddot{x}_1 + x_1 = -f(x_0, \dot{x}_0) \end{aligned} \tag{4-55}$$

先对上式中的第一个方程进行求解，即对派生方程求解，其通解为

$$\begin{aligned} &x_0 = a\cos\varphi + A\cos\theta \\ &\varphi = t + \beta, \quad \theta = \omega t, \quad A = \frac{F}{1-\omega^2} \end{aligned} \tag{4-56}$$

式中 a 和 β 为任意常数。将上式代入式(4-55)的第二式，得

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -f(a\cos\varphi + A\cos\theta, \ -a\sin\varphi - A\omega\sin\theta) \tag{4-57}$$

可将上式右端的非线性函数展为富氏级数的形式，即

$$f(a, \varphi, \theta) = \sum_m^{\infty}\sum_n^{\infty}\left[f_{nm}^{(0)}\cos(n\theta + m\varphi) + g_{nm}^{(0)}\sin(n\theta + m\varphi)\right] \tag{4-58}$$

式中的富氏系数可由下式求出

$$\begin{aligned} f_{nm}^{(0)} &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a, \varphi, \theta)\cos(n\theta + m\varphi)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ g_{nm}^{(0)} &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a, \varphi, \theta)\sin(n\theta + m\varphi)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \end{aligned} \tag{4-59}$$

因此，x_1 可由下式求出

$$x_1(a, \varphi, \theta) = \frac{1}{2}\left[f_{01}(a)\cdot t\cos\varphi + g_{01}(a)\cdot t\sin\varphi\right]$$

$$+\sum_{(m^2-1)^2+n^2\neq 0}\sum\left[\bar{f}_{nm}^{(0)}(a)\cos(n\theta+m\varphi)+\bar{g}_{nm}^{(0)}(a)\sin(n\theta+m\varphi)\right] \tag{4-60}$$

式中

$$\begin{aligned}\bar{f}_{nm}^{(0)}(a)&=\frac{f_{nm}^{(0)}(a)}{\omega^2-(n\omega+m)^2}\\ \bar{g}_{nm}^{(0)}(a)&=\frac{g_{nm}^{(0)}(a)}{\omega^2-(n\omega+m)^2}\\ n^2+(m^2&-1)^2\neq 0\end{aligned} \tag{4-61}$$

由于在富氏级数中存在一次谐波项,因此方程的一次近似解中出现了长期项,而用直接展开法不能消去长期项。下面用另外的方法进行求解。

4.3.2 Lindstedt－Poincare 法(非共振情况)

设

$$\begin{aligned}x&=x_0+\varepsilon x_1+\cdots\\ \tau&=\omega t\\ \omega&=1+\varepsilon\omega_1+\cdots\end{aligned} \tag{4-62}$$

对原方程进行变换,变成对 τ 的微分方程

$$\omega^2x''+x=-\varepsilon f(x,x')+F\cos\theta \tag{4-63}$$

式中 $\theta=\nu t$,代入整理得

$$\begin{aligned}x''_0+x_0&=F\cos\theta\\ x''_1+x_1&=f(x_0,x'_0)-2\omega_1x''_0\end{aligned} \tag{4-64}$$

式中 $\varphi=\tau+\beta$。

式(4-64)中第一式的通解为

$$x_0=a\cos\varphi+A\cos\theta \tag{4-65}$$

先代入 $f(x_0,\dot{x}_0)$ 并将其展成二维富氏级数

$$f(\theta,a,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_{mn}\cos(m\varphi+n\theta)+B_{mn}\sin(m\varphi+n\theta)\right) \tag{4-66}$$

第二式可以写成

$$\begin{aligned}x''_1+x_1=&A_{10}\cos\varphi+B_{10}\sin\varphi+A_{01}\cos\theta+B_{01}\sin\theta\\ &+\sum_{(m-1)^2+n^2\neq 0}^{\infty}\ \sum_{m^2+(n-1)^2\neq 0}^{\infty}\left(A_{mn}\cos(m\varphi+n\theta)+B_{mn}\sin(m\varphi+n\theta)\right)\\ &-2\omega_1(-a\cos\varphi-v^2A\cos\theta)\end{aligned} \tag{4-67}$$

消除长期项,得到频率与振幅的关系如下

$$\begin{aligned}A_{10}+2\omega_1a&=0,\qquad B_{10}=0\\ A_{01}+2\omega_1v^2A&=0,\qquad B_{01}=0\end{aligned} \tag{4-68}$$

在此基础上求得 x_1,代入 x 的展开式,即得到了方程的近似解。

4.3.3 重正规化法(非共振情况)

和式(4-46)相同,在非线性方程中引进变换

$$t = \tau - \varepsilon\omega_1\tau + \cdots \tag{4-69}$$

于是有

$$\begin{aligned} x &= a\cos(\tau - \varepsilon\omega_1 + \cdots) \\ &+ \frac{1}{2}\left[f_{10}(\tau - \varepsilon\omega_1 + \cdots)\cos(\tau - \varepsilon\omega_1 + \cdots) + g_{10}(\tau - \varepsilon\omega_1 + \cdots)\sin(\tau - \varepsilon\omega_1 + \cdots)\right] \\ &+ \sum_{(m^2-1)^2+n^2\neq 0}\sum \left[\bar{f}_{nm}^{(0)}(a)\cos(n\theta + m\varphi) + g_{nm}^{(0)}(a)\sin(n\theta + m\varphi)\right] \end{aligned} \tag{4-70}$$

将上式及式(4-60)代入式(4-53)，得

$$\begin{aligned} \cos n(\tau - \varepsilon\omega_1\tau + \beta + \cdots) &= \cos n(\tau + \beta) + \varepsilon\omega_1 n\tau\sin n(\tau + \beta) + \cdots \\ \sin n(\tau - \varepsilon\omega_1\tau + \beta + \cdots) &= \sin n(\tau + \beta) - \varepsilon\omega_1 n\tau\cos n(\tau + \beta) + \cdots \end{aligned} \tag{4-71}$$

代入前式，得

$$\begin{aligned} x &= a\cos(\tau + \beta) \\ &+ \varepsilon\left[\left(\frac{1}{2}f_{10} + \omega_1 a\right)\cdot\tau\cos(\tau + \beta) - g_{10}\cdot\tau\sin(\tau + \beta)\right] \\ &+ \sum_{(m^2-1)^2+n^2\neq 0}\sum \left[f_{nm}^{(0)}(a)\cos(n\theta + m(\tau + \beta)) + \bar{g}_{nm}^{(0)}(a)\sin(n\theta + m(\tau + \beta))\right] \end{aligned} \tag{4-72}$$

从上式中消去长期项，要求

$$\begin{aligned} \omega_1 a + \frac{1}{2}f_{10} &= 0 \\ g_{10} &= 0 \end{aligned} \tag{4-73}$$

由上式，可求出

$$\begin{aligned} \omega &= 1 - \frac{\varepsilon}{2a}f_{10}(a) + \cdots \\ &= 1 - \frac{\varepsilon}{4\pi^2 a}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a, \varphi, \theta)\cos(n\theta + m\varphi)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \end{aligned} \tag{4-74}$$

利用 Lindstedt Poincare 法和重正规化法求共振情况下方程的解，求解过程与非共振情况类似，这里不再重复。

4.5 应用举例

【例 4.5.1】 用 Lindstedt Poincare 法求 van der Pol 方程的周期解。

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \tag{1}$$

式中 $\varepsilon > 0$，为小参数。

上式重新写成

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) \tag{2}$$

的形式，即 $\omega_0^2 = 1$，$f(x, \dot{x}) = (1 - x^2)\dot{x}$。有

$$\begin{aligned} &x''_0 + x_0 = 0 \\ &x''_1 + x_1 = 2\omega_1 x''_0 + (1 - x_0^2)x'_0 \\ &x''_2 + x_2 = -2\omega_1 x''_1 - (\omega_1^2 + 2\omega_2)x''_0 - x_0 x'_0 x_1 + (\omega_1 x'_0 + x'_1)(1 - x_0^2) \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \tag{3}$$

由上式第一式，并考虑到初始条件 $x_0(0) = A_0$，$x'_0(0) = 0$，得

$$x_0 = A_0\cos\tau \tag{4}$$

代入上式第二式,得

$$x''_1 + x_1 = 2\omega_1 A_0\cos\tau + (1 - A_0^2\cos^2\tau)(-A_0\sin\tau) \tag{5}$$

令上式中 $\sin\tau,\cos\tau$ 的系数为 0,得

$$-A_0 + A_0^3/4 = 0, \qquad 2\omega_1 A_0 = 0 \tag{6}$$

故得 $A_0 = 0$(平凡解)或 $A_0 = 2,\ \omega_1 = 0$。

由本题结果可以得出如下结论 当 $f(x_0, \omega_0 x'_0)$ 不是 τ 的偶函数时,若保证系统的解为周期解, $A_0, A_1, A_2, \cdots$ 不能取任意值。

x_1 的微分方程为

$$x''_1 + x_1 = \frac{A_0^3}{4}\cos 3\tau \tag{7}$$

即

$$x''_1 + x_1 = 2\cos 3\tau \tag{8}$$

考虑初始条件 $x_1(0) = A_1,\ x'_1(0) = 0$,上式的解为

$$x_1 = A_1\cos\tau + \frac{3}{4}\sin\tau - \frac{1}{4}\sin 3\tau \tag{9}$$

将 $\omega_1 = 0$ 和 $A_0 = 2$ 代入关于 x_2 的第三式,得

$$\begin{aligned} x''_2 + x_2 = & \ 2\omega_2(-2\cos\tau) - 4\cos\tau(-2\sin\tau)\left(-\frac{1}{4}\sin 3\tau + A_1\cos\tau + \frac{3}{4}\sin\tau\right) \\ & + (1 - 4\cos^2\tau)\left(-\frac{3}{4}\cos 3\tau - A_1\sin\tau + \frac{3}{4}\cos\tau\right) \end{aligned} \tag{10}$$

令上式右边 $\sin\tau,\cos\tau$ 的系数为 0,得

$$2A_1 = 0, \qquad 4\omega_2 + \frac{1}{4} = 0 \tag{11}$$

故知

$$A_1 = 0, \qquad \omega_2 = -\frac{1}{16} \tag{12}$$

x_2 的微分方程为

$$x''_2 + x_2 = -\frac{3}{2}\cos 3\tau + \frac{5}{4}\cos 5\tau \tag{13}$$

考虑初始条件 $x_2(0) = A_2,\ x'_2(0) = 0$,上式的解为

$$x_2 = \left(A_2 - \frac{13}{96}\right)\cos\tau + \frac{3}{16}\cos 3\tau - \frac{5}{96}\cos 5\tau \tag{14}$$

A_2 及 ω_3 将由 x_3 的微分方程中 $\sin\tau,\cos\tau$ 的系数为 0 时求出。

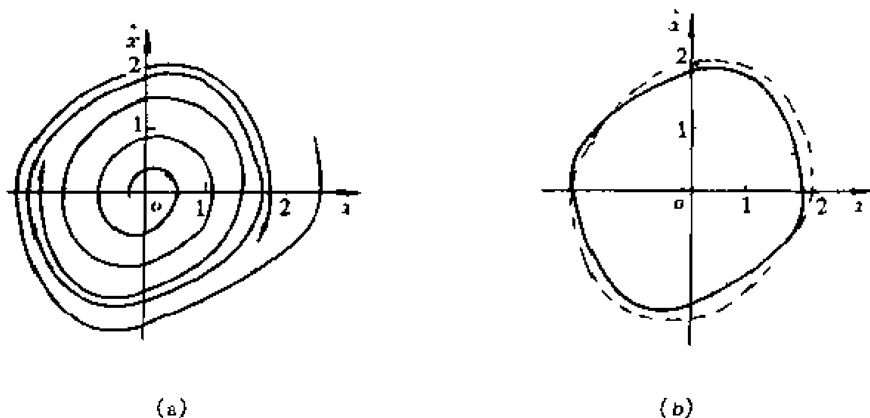
故 van der Pol 方程的解为

$$x = 2\cos\tau + \frac{1}{4}\varepsilon(3\sin\tau - \sin 3\tau) + \cdots \tag{15}$$

式中 $\tau = \omega t$,且

$$\omega = 1 - \frac{1}{16}\varepsilon^2 + \cdots \tag{16}$$

图 4-1 所示为 $\varepsilon = 0.3$ 时的相图,并与数值解进行了比较。



例图 4-1 解析法与数值法计算结果的比较(虚线为数值法的结果)

计算与思考

1. 用小参数法求解 Rayleigh 方程。

$$\ddot{x}+\omega_0^2x-\varepsilon\dot{x}\left(1-\frac{1}{3}\dot{x}^2\right)=0$$

2. 用 Lindstedt－Poincare 法求解下列系统，求至 ε^2 项。

$$\ddot{x}+\varepsilon(x^2-a)\dot{x}+x=0$$

$$\ddot{x}+\varepsilon(x^2+\dot{x}^2-4)\dot{x}+x=0$$

$$\ddot{x}+\varepsilon\dot{x}|\dot{x}|+x=0$$

3. 用重正规化法使各方程的展开式一致有效

(1) $u(t,\varepsilon)=a\cos(\omega t+\beta)+\varepsilon a^3t\sin(\omega t+\beta)+O(\varepsilon^2)$

(2) $u(t,\varepsilon)=a\cos(\omega t+\beta)+\varepsilon[a^2t\sin(\omega t+\beta)+(1-a^2)at\cos(\omega t+\beta)]+O(\varepsilon^2)$

4. 对如下方程

$$\ddot{u}+\omega_0^2u=\varepsilon u^2u \qquad \varepsilon\ll1$$

$$\ddot{u}+4u+\varepsilon\dot{u}^2u=0$$

$$\ddot{u}+\frac{\omega^2}{1+u^2}u=0$$

$$\ddot{u}+\omega_0^2u-\varepsilon u^3=0$$

(1)用重正规化法使各方程的直接展开式一致有效；

(2)用 Lindstedt－Poincare 法求它们的一阶一致有效展开式。

5. 质点在转动的抛物线上运动的方程

$$(1+4p^2x^2)\ddot{x}+\Lambda x+4p^2\dot{x}^2x=0$$

式中 p,Λ 为常数，对于小而有限的 x，用重正规化法或 Lindstedt－Poincare 法求其一阶一致有效展开式。

6. $$\left(1+\frac{u^2}{1-u^2}\right)\ddot{u}+\frac{u\dot{u}^2}{(1-u^2)^2}+\omega_0^2u+\frac{g}{l}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}=0$$

(1)对于小的 u 值作摄动展开，保留至立方项。

(2)对小而有限的 u，用重正规化法或 Lindstedt－Poincare 法求其一阶一致有效展开式。

7. $(l^2+r^2-2rl\cos\theta)\ddot{\theta}+gr\theta\cos\theta=0$

式中 g, r, l 为常数，先对小的 θ 展开至立方项，然后对小而有限的 θ，用重正规化法或 Lindstedt - Poincare 法求其一阶一致有效展开式。

8. $\left(\frac{1}{12}l^2+r^2\theta^2\right)\ddot{\theta}+r^2\theta\dot{\theta}^2+gr\theta\cos\theta=0$

式中 $g、r、l$ 为常数，对小而有限的 θ，用重正规化法或 Lindstedt - Poincare 法求其一阶一致有效展开式。

9. $m\ddot{x}+kx(x^2+l^2)^{-1/2}\left[[x^2+l^2]^{1/2}-\frac{1}{2}l\right]=0$

对小而有限的 x，用重正规化法或 Lindstedt - Poincare 法求其一阶一致有效展开式。

10. $\begin{cases}\ddot{u}+\omega_0^2u=2\epsilon[(1-v)\dot{u}-vu]\\ \dot{v}+v=u^2\end{cases}$

对 u 和 v 求一阶一致有效展开式。

11. 用重正规化法或 L - P 法求 Duffing 方程 $\ddot{x}+\omega_0^2(x+\epsilon x^3)=0$ 的解。

第五章　多尺度法

5.1　多尺度法的基本思想

多尺度法首先是由 Sturrock(1957)，Cole(1963)和 Nayfeh(1965)等提出的，此后得到了进一步的发展。下面介绍该法的基本思想[3]。

我们考虑形式为

$$\ddot{q}+f(q)=0 \tag{5-1}$$

的方程所控制的系统，设方程的解为

$$q=q_0+x=q_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\cdots \tag{5-2}$$

将原点移至中心位置 $q=q_0$。于是有

$$x=q-q_0 \tag{5-3}$$

此时式(5-1)可写成

$$\ddot{x}+f(x+q_0)=0 \tag{5-4}$$

假设 f 可以展为泰勒级数，则上式可写为

$$\ddot{x}+\sum_{n=1}^{N} a_n x^n=0 \tag{5-5}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(q_0) \tag{5-6}$$

而 $f^{(n)}$ 表示关于自变量的 n 阶导数，对于中心，$f(q_0)=0$，而 $f^{(n)}(q)>0$。

我们可以把方程的解看成是多个自变量的函数，而不是一个自变量的函数，也就是我们可以把 x 看成是 t 和 $\varepsilon t,\cdots\varepsilon^n t$ 的函数。多尺度法的基本思想是将表示响应的展开式考虑成为多个自变量(或多个尺度)的函数。

引进自变量

$$T_n=\varepsilon^n t \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{5-7}$$

即

$$T_0=t \qquad T_1=\varepsilon t \qquad T_2=\varepsilon^2 t \qquad \cdots \tag{5-8}$$

因此关于 t 的导数变成了关于 T_n 的偏导数的展开式，即

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}T_0}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial T_0}+\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial T_1}+\cdots=\mathrm{D}_0+\varepsilon\mathrm{D}_1+\cdots\\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}&=\mathrm{D}_0^2+2\varepsilon\mathrm{D}_0\mathrm{D}_1+\varepsilon^2(\mathrm{D}_1^2+2\mathrm{D}_0\mathrm{D}_2)+\cdots\end{aligned} \tag{5-9}$$

然后代入方程进行求解，求出 $x_1,x_2,x_3,\cdots$。这时，方程的解可写成

$$x(t,\varepsilon)=\varepsilon x_1(T_0,T_1,T_2,\cdots)+\varepsilon^2 x_2(T_0,T_1,T_2,\cdots)+\cdots\cdots \tag{5-10}$$

按照小参数法(摄动法)建立 ε 的各阶方程，进而求出 $x_1,x_2,x_3,\cdots$。

5.2 含非线性弹性力的自治系统的多尺度法

5.2.1 自治保守系统

方程为

$$\ddot{q}+f(q)=0 \tag{5-11}$$

设 $x=q-q_0$,类似式(5-5),可将方程(5-11)变换为

$$\ddot{x}+\sum_{n=1}^{N} a_n x^n=0 \tag{5-12}$$

将 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$ 及 $x=\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\cdots$ 代入上式,得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\cdots)+a_1(\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\cdots)$$
$$+a_2(\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\cdots)^2+a_3(\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\cdots)^3+\cdots=0 \tag{5-13}$$

使 ε 的同次幂的系数之和为零,得

$$\begin{aligned}
&\varepsilon:\quad \mathrm{D}_0^2 x_1+\omega_0^2 x_1=0\\
&\varepsilon^2:\quad \mathrm{D}_0^2 x_2+\omega_0^2 x_2=-2\mathrm{D}_0\mathrm{D}_1 x_1-a_2 x_1^2\\
&\varepsilon^3:\quad \mathrm{D}_0^2 x_3+\omega_0^2 x_3=-2\mathrm{D}_0\mathrm{D}_1 x_2-\mathrm{D}_1^2 x_1-2\mathrm{D}_0\mathrm{D}_2 x_1-2a_2 x_1 x_2-a_3 x_1^3
\end{aligned} \tag{5-14}$$

式中 $\omega_0^2=a_1$。

先求上式中第一个方程的解,得

$$x_1=A(T_1,T_2)\exp(i\omega_0 T_0)+\overline{A}(T_1,T_2)\exp(-i\omega_0 T_0) \tag{5-15}$$

式中 A 为未知的复函数,而 $\overline{A}$ 是 A 的共轭。

A 的控制方程从要求 x_1, x_2 是周期为 T_0 的周期函数得出。

将 x_1 代入方程(5-14)的第二式,得

$$\mathrm{D}_0^2 x_2+\omega_0^2 x_2=-2i\omega_0\mathrm{D}_1 A\exp(i\omega_0 T_0)-a_2[A^2\exp(2i\omega_0 T_0)+A\overline{A}]+CC \tag{5-16}$$

式中 CC 表示前面各项的共轭,除非

$$\mathrm{D}_1 A=0 \tag{5-17}$$

否则,式(5-16)的任一特解中均包含有因子为 $T_0\exp(i\omega_0 T_0)$ 的永年项。所以 A 必须与 T_1 无关,在 $\mathrm{D}_1 A=0$ 的情况下,式(5-16)的解为

$$x_2=\frac{a_2 A^2}{3\omega_0^2}\exp(2i\omega_0 T_0)-\frac{a_2}{\omega_0^2}A\overline{A}+CC \tag{5-18}$$

将 x_1, x_2 代入第三个方程,得

$$\mathrm{D}_0^2 x_3+\omega_0^2 x_3=-\left[2i\omega_0\mathrm{D}_2 A-\frac{10a_2^2-9a_3\omega_0^2}{3\omega_0^2}A^2\overline{A}\right]\exp(i\omega_0 T_0)$$
$$-\frac{3a_3\omega_0^2+2a_2^2}{3\omega_0^2}A^3\exp(3i\omega_0 T_0)+CC \tag{5-19}$$

为了消去长期项,必须使

$$2i\omega_0\mathrm{D}_2 A-\frac{10a_2^2-9a_3\omega_0^2}{3\omega_0^2}A^2\overline{A}=0 \tag{5-20}$$

将上式中的 A 表示成极坐标的形式

$$A=\frac{1}{2}\rho\exp(i\beta) \tag{5-21}$$

式中 ρ 和 β 是 T_2 的实常数。

将结果代入前式，得

$$\begin{aligned}&\omega_0\rho=0\\&\omega_0\rho\beta+\frac{10a_2^2-9a_3\omega_0^2}{24\omega_0^2}\rho^3=0\end{aligned} \tag{5-22}$$

上式中 ρ和 β表示 ρ 和 β 关于 T_2 的导数。由此得出

$$\begin{aligned}&\rho=\text{常数}\\&\beta=\frac{9a_3\omega_0^2-10a_2^2}{24\omega_0^3}\rho^2T_2+\beta_0\end{aligned} \tag{5-23}$$

式中 β_0 为常数。

于是得

$$A=\frac{1}{2}\rho\exp\left[i\frac{9a_3\omega_0^2-10a_2^2}{24\omega_0^3}\varepsilon^2\rho^2t+i\beta_0\right] \tag{5-24}$$

将求得的 x_1,x_2 代入 x 式中，得

$$x=\varepsilon\rho\cos(\omega t+\beta_0)-\frac{\varepsilon^2\rho^2a_2}{2a_1}\left[1-\frac{1}{3}\cos(2\omega t+2\beta_0)\right]+O(\varepsilon^3) \tag{5-25}$$

式中

$$\omega=\sqrt{a_1}\left[1+\frac{9a_3a_1-10a_2^2}{24a_1^2}\varepsilon^2\rho^2\right]+O(\varepsilon^3) \tag{5-26}$$

5.2.2 自治非保守系统

自治非保守系统的微分方程如下式所示

$$\ddot{x}+2c\dot{x}+\omega_0^2x=\varepsilon f(x,\dot{x}) \tag{5-27}$$

设该方程的解为

$$x=x_0(T_0,T_1,T_2,\cdots)+\varepsilon x_1(T_0,T_1,T_2,\cdots)+\cdots \tag{5-28}$$

同理可得

$$\begin{aligned}&D_0^2x_0+\omega_0^2x_0=0\\&D_0^2x_1+\omega_0^2x_1=-2D_0D_1x_0+f(x_0,D_0x_0)\\&\cdots\cdots\\&D_0^2x_n+\omega_0^2x_n=F(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})\qquad n\geqslant2\end{aligned} \tag{5-29}$$

由以上方程的第一式可得

$$x_0=A(T_1,T_2,\cdots)\exp(i\omega_0T_0)+\overline{A}(T_1,T_2,\cdots)\exp(-i\omega_0T_0) \tag{5-30}$$

而

$$\begin{aligned}D_0^2x_1+\omega_0^2x_1=&-2i\omega_0D_1A\exp(i\omega_0T_0)-2i\omega_0D_1\overline{A}\exp(-i\omega_0T_0)\\&+f(A\exp(i\omega_0T_0)+\overline{A}\exp(-i\omega_0T_0),i\omega_0A\exp(i\omega_0T_0)-i\omega_0\overline{A}\exp(-i\omega_0T_0))\end{aligned} \tag{5-31}$$

与函数 A 有关，上式的特解都包含正比于 $T_0\exp(\pm i\omega_0T_0)$的项（即长期项）。因此对于大

的 t 值，εt_1 可以大大超过 x_0，结果得到了一个非一致有效的展开式。我们这样来选择函数 A，使得 x_0 中消去长期项，从而得到一致有效的展开式。为此目的，我们将 $f[x_0, D_0x_0]$ 展成富氏级数

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(A, \overline{A})\exp(in\omega_0 T_0) \tag{5-32}$$

式中

$$f_n(A, \overline{A}) = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} f\exp(-in\omega_0 T_0)\mathrm{d}T_0$$

所以消去永年项的条件是

$$2i\mathrm{D}_1 A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} f\exp(-i\omega_0 T_0)\mathrm{d}T_0 \tag{5-33}$$

对于一次近似，我们把 A 考虑成仅仅是 T_1 的函数，并且将解算到这一项为止。为了对上式进行求解，方便的做法是把 $A(T_1)$ 表示为复数的形式，即

$$A(T_1) = \frac{1}{2}\rho(T_1)\exp[i\beta(T_1)] \tag{5-34}$$

因此，将 x_0 的表示式(5-30)改写成

$$x_0 = \rho(T_1)\cos\varphi, \quad \varphi = \omega_0 T_0 + \beta(T_1) \tag{5-35}$$

将式(5-34)代入式(5-33)，得

$$i(\dot{\rho} + i\rho\dot{\beta}) = \frac{1}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi} f(\rho\cos\varphi, -\omega_0\rho\sin\varphi)\exp(-i\varphi)\mathrm{d}\varphi \tag{5-36}$$

将上式分成实部与虚部，得

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\frac{1}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi} f(\rho\cos\varphi, -\omega_0\rho\sin\varphi)\cdot\sin\varphi\mathrm{d}\varphi \\ \dot{\beta} &= -\frac{1}{2\pi\omega_0\rho}\int_0^{2\pi} f(\rho\cos\varphi, -\omega_0\rho\sin\varphi)\cdot\cos\varphi\mathrm{d}\varphi \end{aligned} \tag{5-37}$$

所以方程的一次近似解为

$$x = \rho(T_1)\cos[\omega_0 T_0 + \beta(T_1)] + O(\varepsilon) \tag{5-38}$$

式中的 ρ 和 β 由前面的式子给出。

5.3 含非线性弹性力的非自治系统的多尺度法

这里我们考虑方程

$$\ddot{x} + 2c\dot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) + F(t) \tag{5-39}$$

所控制的系统，式中 ε 是个小参数，f 是 x 与 $\dot{x}$ 的非线性函数，F 为外干扰力，或称为外激励。外激励分为两种，一种是理想能源，这种能源被假定为无限大的，或者大到被激系统对它的影响可以忽略。在这种情况下 $F = F(t)$，即 F 并不是系统状态 x，$\dot{x}$ 的函数。另一种是非理想能源，即激励利用了有限的能源，因而它是被激系统状态的函数。

我们将处理理想系统，并将激励考虑成 N 项之和，它和每一项是简谐的

$$F(t) = \sum_{n=1}^{N} F_n\cos(\nu_n t + \beta_n) \tag{5-40}$$

如果幅值 F_n、频率 ν_n 和相角 β_n 都是常数，则激励称为平稳的，否则的话称为非平稳的，当幅值与频率是时间的慢变函数时，这种摄动方法适用于非平稳系统的分析。

若

$$F(t)=F_1\cos(\nu_1 t+\beta_1)+F_2\cos(\nu_2 t+\beta_2) \tag{5-41}$$

我们可以改写为

$$F(t)=F\cos(\nu_1 t+\beta) \tag{5-42}$$

式中

$$\begin{aligned}
&F^2=(F_1+F_2\cos\varphi)^2+F_2^2\sin^2\varphi=F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos\varphi\\
&\beta=\beta_1+\arctan\left(\frac{F_2\sin\varphi}{F_1+F_2\cos\varphi}\right)\\
&\varphi=(\nu_2-\nu_1)t+\beta_2-\beta_1
\end{aligned} \tag{5-43}$$

因此，如果 $\nu_1=\nu_2$，则激励可以考虑成为带有慢变幅值与频率的单频激励。

下面研究带立方的非线性系统，其方程为

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=-2\varepsilon c\dot{x}-\varepsilon b x^3+F(t) \tag{5-44}$$

式中 $c>0$，而 b 可为正(硬弹簧)，可为负(软弹簧)。

我们假设

$$F(t)=F\cos\nu T_0 \tag{5-45}$$

即系统受单频外激励。

下面分别研究它的非共振、主共振、超谐波共振、次谐波共振和组合共振情况。

5.3.1 非共振情况

已知 $F(t)=F\cos\nu T_0$，设

$$x(t,\varepsilon)=x_0(T_0,T_1)+\varepsilon x_1(T_0,T_1)+\cdots \tag{5-46}$$

代入方程，得

$$\begin{aligned}
&D_0^2x_0+\omega_0^2x_0=F\cos\nu T_0\\
&D_0^2x_1+\omega_0^2x_1=-2D_0D_1x_0-2cD_0x_0-bx_0^3
\end{aligned} \tag{5-47}$$

因

$$x_0=A(T_1)\exp(i\omega_0T_0)+\Lambda\exp(i\nu T_0)+CC \tag{5-48}$$

式中　$\Lambda=\frac{1}{2}F(\omega_0^2-\nu^2)^{-1}$

将 x_0 代入式(5-47)第二式，得

$$\begin{aligned}
D_0^2x_1+\omega_0^2x_1=&-[2i\omega_0(A'+cA)+6bA\Lambda^2+3bA^2\bar{A}]\exp(i\omega_0T_0)\\
&-b\{A^3\exp(3i\omega_0T_0)+\Lambda^3\exp(3i\nu T_0)+3A^2\Lambda\exp[i(2\omega_0+\nu)T_0]\\
&+3\bar{A}^2\Lambda\exp[i(\nu-2\omega_0)T_0]+3A\Lambda^2\exp[i(\omega_0+2\nu)T_0]+3A\Lambda^2\\
&\times\exp[i(\omega_0-2\nu)T_0]\}-\Lambda\{2ic\nu+3b\Lambda^2+6bA\bar{A}\}\exp(i\nu T_0)+CC
\end{aligned} \tag{5-49}$$

在非共振情况下，如果

$$2i\omega_0(A'+cA)+6bA\Lambda^2+3bA^2\bar{A}=0 \tag{5-50}$$

则长期项可消去，设

$$A=\frac{1}{2}\rho\exp[i\beta] \tag{5-51}$$

代入方程(5-50),分离实虚部,可得

$$\begin{aligned}\dot{\rho}&=-c\rho\\ \omega_0\rho\dot{\beta}&=3b\left(A^2+\frac{1}{8}\rho^2\right)\rho\end{aligned} \tag{5-52}$$

所以作为一次近似解为

$$x=\rho\cos(\omega_0 t+\beta)+F(\omega_0^2-\nu^2)^{-1}\cos\nu t+O(\varepsilon) \tag{5-53}$$

5.3.2 主共振情况

此时,$\nu\approx\omega_0$ 或 $\nu=\omega_0+\varepsilon\sigma$,$\sigma$ 为解谐参数。设方程的解为

$$x(t,\varepsilon)=x_0(T_0,T_1)+\varepsilon x_1(T_0,T_1)+\cdots \tag{5-54}$$

其中 $T_0=t$,$T_1=\varepsilon t$,而在主共振情况下,外激励可以看作小参数,并设它为简谐的

$$F(t)=\varepsilon F\cos(\omega_0 T_0+\sigma T_1)$$

代入方程(5-44),得

$$\begin{aligned}&D_0^2x_0+\omega_0^2x_0=0\\ &D_0^2x_1+\omega_0^2x_1=-2D_0D_1x_0-2cD_0x_0-bx_0^3+F\cos(\omega_0T_0+\sigma T_1)\end{aligned} \tag{5-55}$$

由第一式可解出

$$x_0=A(T_1)\exp(i\omega_0T_0)+\overline{A}(T_1)\exp(-i\omega_0T_0) \tag{5-56}$$

将 $F\cos(\omega_0T_0+\sigma T_1)$表示为复数形式$\frac{1}{2}F\exp[i(\omega_0T_0)+\sigma T_1)]+CC$,即得

$$\begin{aligned}D_0^2x_1+\omega_0^2x_1&=-[2i\omega_0(\dot{A}+cA)+3bA^2\overline{A}]\exp(i\omega_0T_0)\\&\quad-bA^3\exp(3i\omega_0T_0)+\frac{1}{2}F\exp[i(\omega_0T_0+\sigma T_1)]+CC\end{aligned} \tag{5-57}$$

由以下方程式可解出 A

$$2i\omega_0(\dot{A}+cA)+3bA^2\overline{A}-\frac{1}{2}F\exp(i\sigma T_1)=0 \tag{5-58}$$

设

$$A=\frac{1}{2}\rho\exp[i\beta] \tag{5-59}$$

分成实部与虚部

$$\begin{aligned}\dot{\rho}&=-c\rho+\frac{1}{2}\frac{F}{\omega_0}\sin(\sigma T_1-\beta)\\ \rho\dot{\beta}&=\frac{3}{8}\frac{b\rho^3}{\omega_0}-\frac{1}{2}\frac{F}{\omega_0}\cos(\sigma T_1-\beta)\end{aligned} \tag{5-60}$$

一次近似解为

$$x=\rho\cos(\omega_0t+\beta)+O(\varepsilon) \tag{5-61}$$

如设 $\gamma=\sigma T_1-\beta$,则

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -c\rho + \frac{1}{2}\frac{F}{\omega_0}\sin\gamma \\ \rho\dot{\gamma} &= \sigma\rho - \frac{3}{8}\frac{b\rho^3}{\omega_0} + \frac{1}{2}\frac{F}{\omega_0}\cos\gamma \end{aligned} \tag{5-62}$$

当 $\dot{\rho} = \dot{\gamma} = 0$ 时,则

$$\begin{aligned} c\rho &= \frac{1}{2}\frac{F}{\omega_0}\sin\gamma \\ \sigma\rho - \frac{3}{8}\frac{b\rho^3}{\omega_0} &= -\frac{1}{2}\frac{F}{\omega_0}\cos\gamma \end{aligned} \tag{5-63}$$

或
$$\left[c^2 + \left(\sigma - \frac{3}{8}\frac{b}{\omega_0}\rho^2\right)^2\right]\rho^2 = \frac{F^2}{4\omega_0^2} \qquad \tan\gamma = \frac{-c}{\sigma - \frac{3}{8}\frac{b\rho^2}{\omega_0}}$$

因此稳态情况下的一次近似解为

$$x = \rho\cos(\omega_0 t + \varepsilon\sigma t - \gamma) + O(\varepsilon) = \rho\cos(\nu t - \gamma) + O(\varepsilon) \tag{5-64}$$

5.3.3 超谐波共振($\nu \approx \frac{1}{3}\omega_0$)

设 $3\nu = \omega_0 + \varepsilon\sigma$,其中 σ 为解谐参数。

在方程(5-49)的解中,除了式(5-50)中正比例于 $\exp(\pm i\omega_0 T_0)$ 的一些项外,还有另外一项使 x_1 中产生长期项,这就是 $b\Lambda^3\exp(\pm 3i\nu T_0)$。为了消去这些长期项,我们将下式

$$3\nu T_0 = (\omega_0 + \varepsilon\sigma)T_0 = \omega_0 T_0 + \sigma T_1 \tag{5-65}$$

用 $\omega_0 T_0$ 来表示 $3\nu T_0$,利用式(5-49),可以发现,如果

$$2i\omega_0(\dot{A} + cA) + 6b\Lambda^2 A + 3bA^2\bar{A} + b\Lambda^3\exp(i\sigma T_1) = 0 \tag{5-66}$$

则 x_1 中的长期项就消失。设上式中的 $A = \frac{1}{2}\rho\exp[i\beta]$(这里 ρ 和 β 是实数),并分成实部与虚部,有

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -c\rho + \frac{b\Lambda^3}{\omega_0}\sin(\sigma T_1 - \beta) \\ \rho\dot{\beta} &= \frac{3b}{\omega_0}\left(\Lambda^2 + \frac{1}{8}\rho^2\right)\rho + \frac{b\Lambda^3}{\omega_0}\cos(\sigma T_1 - \beta) \end{aligned} \tag{5-67}$$

设
$$\gamma = \sigma T_1 - \beta \tag{5-68}$$

方程(5-67)变换为一个自治系统,从而得到

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -c\rho + \frac{b\Lambda^3}{\omega_0}\sin\gamma \\ \rho\dot{\gamma} &= \left(\sigma - \frac{3b\Lambda^2}{\omega_0}\right)\rho - \frac{3b}{8\omega_0}\rho^3 - \frac{b\Lambda^3}{\omega_0}\cos\gamma \end{aligned} \tag{5-69}$$

所以方程的一次近似解为

$$x = \rho\cos(3\nu t - \gamma) + F(\omega_0^2 - \nu^2)^{-1}\cos\nu t + O(\varepsilon)$$

在稳态情况下,$\dot{\rho} = \dot{\gamma} = 0$。有方程组

$$\begin{aligned} c\rho &= \frac{b\Lambda^3}{\omega_0}\sin\gamma \\ \left(\sigma - \frac{3b\Lambda^2}{\omega_0}\right)\rho - \frac{3b}{8\omega_0}\rho^3 &= \frac{b\Lambda^3}{\omega_0}\cos\gamma \end{aligned} \tag{5-70}$$

两个方程平方后相加，得频率方程

$$\left[c^2+\left(\sigma-3\frac{b\Lambda^3}{\omega_0}-\frac{3b\rho^2}{8\omega_0}\right)^2\right]\rho^2=\frac{b^2\Lambda^6}{\omega_0^2} \tag{5-71}$$

从上述方程解出 σ，得

$$\sigma=3\frac{b\Lambda^3}{\omega_0}+\frac{3b\rho^2}{8\omega_0}\pm\left(\frac{b^2\Lambda^6}{\omega_0^2\rho^2}-c^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5-72}$$

所以与线性情况不同，尽管存在着正阻尼，在 $\nu\approx\frac{1}{3}\omega_0$ 时，自由振动并不衰减为零，而非线性性质调整了自由振动项的频率，使之精确地三倍于激励频率，从而响应成为周期的。这种共振称为超谐共振。

5.3.4 次谐波共振($\nu\approx3\omega_0$)

我们设

$$\nu\approx3\omega_0+\varepsilon\sigma \tag{5-73}$$

因而方程的解中除了正比于 $\exp(\pm i\omega_0T_0)$的一些项外，正比于 $\exp[\pm i(\nu-2\omega_0)T_0]$的项也在 x_1 中产生长期项。我们将$(\nu-2\omega_0)T_0$ 表示为

$$(\nu-2\omega_0)T_0=\omega_0T_0+\varepsilon\sigma T_0=\omega_0T_0+\sigma T_1 \tag{5-74}$$

所以为了在式(5-49)中消去 x_1 中产生长期项的一些项，可以写出

$$2i\omega_0(A'+cA)+6b\Lambda^2A+3bA^2\bar{A}+3b\Lambda\bar{A}^2\exp(i\sigma T_1)=0 \tag{5-75}$$

在上式中设 $A=\frac{1}{2}\rho\exp[i\beta]$(这里 ρ 和 β 是实数)，并分成实部和虚部，可以得到

$$\begin{aligned}\rho'&=-c\rho+\frac{3b\Lambda}{4\omega_0}\rho^2\sin(\sigma T_1-3\beta)\\ \rho\beta'&=\frac{3b}{\omega_0}\left(\Lambda^2+\frac{1}{8}\rho^2\right)\rho+\frac{3b\Lambda}{4\omega_0}\rho^2\cos(\sigma T_1-3\beta)\end{aligned} \tag{5-76}$$

设

$$\gamma=\sigma T_1-3\beta \tag{5-77}$$

于是得到

$$\begin{aligned}\rho'&=-c\rho+\frac{3b\Lambda}{4\omega_0}\rho^2\sin\gamma\\ \rho\gamma'&=\left(\sigma-\frac{9b\Lambda^2}{\omega_0}\right)\rho-\frac{9b}{8\omega_0}\rho^3-\frac{9b\Lambda}{4\omega_0}\rho^2\cos\gamma\end{aligned} \tag{5-78}$$

所以一次近似解为

$$x=\rho\cos\left(\frac{1}{3}\nu t-\gamma\right)+F(\omega_0^2-\nu^2)^{-1}\cos\nu t+O(\varepsilon) \tag{5-79}$$

稳态振动对应的振动方程为

$$\begin{aligned}-c\rho&=\frac{3b\Lambda}{4\omega_0}\rho^2\sin\gamma\\ \left(\sigma-\frac{9b\Lambda^2}{\omega_0}\right)\rho-\frac{9b}{8\omega_0}\rho^3&=\frac{9b\Lambda}{4\omega_0}\rho^2\cos\gamma\end{aligned} \tag{5-80}$$

由上式可得频率方程

$$-c\rho=\frac{3b\Lambda}{4\omega_0}\rho^2\sin\gamma$$

$$\left[9c_2+\left(\sigma-\frac{9b\Lambda^2}{\omega_0}-\frac{9b}{8\omega_0}\rho^2\right)^2\right]=\frac{81b^2\Lambda^2}{16\omega_0^2}\rho^2 \tag{5-81}$$

次谐波共振在工程实际中时常遇到。例如，飞机的某些零件的振动可以被远大于它们的固有频率的角速度运转的发动机所激发。1956 年，拉法萨茨描述过一架商用飞机，由于螺旋浆的回转引发了机翼的 $\frac{1}{2}$ 阶的次谐波振动，而机翼又进而引发舵面的 $\frac{1}{4}$ 阶的次谐波振动，这种猛烈振动使得飞机遭受破坏。

5.3.5 两项激励的组合共振

假如激振力由频率不等的两个部分所组成

$$F(t)=F_1\cos(\nu_1 t+\beta_1)+F_2\cos(\nu_2 t+\beta_2) \tag{5-82}$$

式中 F_n，ν_n 和 β_n 都是常数。此外我们还假设 $F_n=O(1)$，并排除主共振 $\omega_0\approx\nu_n(n=1,2,\cdots)$ 的情况，我们假定方程的解为

$$x(t,\varepsilon)=x_0(T_0,T_1)+\varepsilon x_1(T_0,T_1)+\cdots \tag{5-83}$$

代入方程，令方程两端的 ε^0 和 ε 的系数相等，就得到

$$\begin{aligned}&D_0^2x_0+\omega_0^2x_0=F_1\cos(\nu_1T_0+\beta_1)+F_2\cos(\nu_2T_0+\beta_2)\\&D_0^2x_1+\omega_0^2x_1=-2D_0D_1x_0-2cD_0x_0-bx_0^3\end{aligned} \tag{5-84}$$

方程(5-84)第一方程的通解为

$$x_0=A(T_1)\exp(i\omega_0T_0)+\Lambda_1\exp(i\nu_1T_0)+\Lambda_2\exp(i\nu_2T_0)+CC \tag{5-85}$$

式中

$$\Lambda_n=\frac{1}{2}F_n(\omega_0^2-\nu_n^2)^{-1}\exp(i\beta_n) \tag{5-86}$$

将 x_0 代入第二式，得出

$$\begin{aligned}D_0^2x_1+\omega_0^2x_1=&-[2i\omega_0(A'+cA)+3b(A\bar{A}+2\Lambda_1\bar{\Lambda}_1+2\Lambda_2\bar{\Lambda}_2)A]\exp(i\omega_0T_0)\\&-[2i\nu_1c+3b(2A\bar{A}+\Lambda_1\bar{\Lambda}_1+2\Lambda_2\bar{\Lambda}_2)]\Lambda_1\exp(i\nu_1T_0)\\&-[2i\nu_2c+3b(2A\bar{A}+2\Lambda_1\bar{\Lambda}_1+\Lambda_2\bar{\Lambda}_2)]\Lambda_2\exp(i\nu_2T_0)\\&-bA^3\exp(3i\omega_0T_0)-b\Lambda_1^3\exp(3i\nu_1T_0)-b\Lambda_2^3\exp(3i\nu_2T_0)\\&-3bA^2\Lambda_1\exp[i(2\omega_0+\nu_1)T_0]-3bA^2\Lambda_2\exp[i(2\omega_0+\nu_2)T_0]\\&-3bA^2\bar{\Lambda}_1\exp[i(2\omega_0-\nu_1)T_0]-3bA^2\bar{\Lambda}_2\exp[i(2\omega_0-\nu_2)T_0]\\&-3bA\Lambda_1^2\exp[i(\omega_0+2\nu_1)T_0]-3bA\Lambda_2^2\exp[i(\omega_0+2\nu_2)T_0]\\&-3bA\bar{\Lambda}_1^2\exp[i(\omega_0-2\nu_1)T_0]-3bA\bar{\Lambda}_2^2\exp[i(\omega_0-2\nu_2)T_0]\\&-6bA\Lambda_1\Lambda_2\exp[i(\omega_0+\nu_1+\nu_2)T_0]-6bA\bar{\Lambda}_1\bar{\Lambda}_2\exp[i(\omega_0-\nu_1-\nu_2)T_0]\\&-6bA\bar{\Lambda}_1\Lambda_2\exp[i(\omega_0-\nu_1+\nu_2)T_0]-6bA\Lambda_1\bar{\Lambda}_2\exp[i(\omega_0+\nu_1-\nu_2)T_0]\\&-3b\Lambda_1^2\Lambda_2\exp[i(2\nu_1+\nu_2)T_0]-3b\Lambda_1^2\bar{\Lambda}_2\exp[i(2\nu_1-\nu_2)T_0]\\&-3b\Lambda_1\Lambda_2^2\exp[i(\nu_1+2\nu_2)T_0]-3b\bar{\Lambda}_1\Lambda_2^2\exp[i(-\nu_1+2\nu_2)T_0]+CC\end{aligned} \tag{5-87}$$

上式中显示出一些组合共振，其中一些在以前单频激励情况中遇到过，而另一些则是多频激励的特征。这些组合是

$\omega_0\approx3\nu_n$　　超谐波共振

$\omega_0\approx\frac{1}{3}\nu_n$　　次谐波共振

$$\omega_0 \approx |\pm 2\nu_m \pm \nu_n| \qquad \text{组合共振}$$

$$\omega_0 \approx \frac{1}{2}|\pm \nu_m \pm \nu_n| \qquad \text{组合共振}$$

式中 $m=1$ 和 2，$n=1$ 和 2，对于带三个或三个以上频率的激励，可以存在共振组合 $\omega_0 = |\pm \nu_m \pm \nu_n \pm \nu_k|$。

由此可见，对于多频激励，可以同时存在多于一个的共振条件，这就是说，可以同时存在超谐波共振、次谐波共振、或者同时存在超谐波共振和组合共振等等。对于双频激励，可以同时存在两个共振。如果激振频率为 ν_1 和 ν_2，这里 $\nu_2 > \nu_1$，能够存在的各次共振是

$$\omega_0 \approx 3\nu_1 \text{ 或 } 3\nu_2$$

$$\omega_0 \approx \frac{1}{3}\nu_1 \text{ 或} \frac{1}{3}\nu_2$$

$$\omega_0 \approx |\pm \nu_2 \pm 2\nu_1| \text{或 } 2\nu_1 - \nu_2$$

$$\omega_0 \approx |\pm 2\nu_2 + \nu_1|$$

$$\omega_0 \approx \frac{1}{2}|\pm \nu_2 \pm \nu_1|$$

下面考察 $\omega_0 \approx 2\nu_1 \pm \nu_2$ 的情况，如果

$$\omega_0 = 2\nu_1 + \nu_2 - \varepsilon\sigma \tag{5-88}$$

并将 $(2\nu_1 + \nu_2)T_0$ 表示为

$$(2\nu_1 + \nu_2)T_0 = \omega_0 T_0 + \varepsilon\sigma T_0 = \omega_0 T_0 + \sigma T_0 \tag{5-89}$$

当满足以下条件时，可以消去永年项

$$2i\omega_0(\dot{A} + cA) + 3b(A\bar{A} + 2\Lambda_1\bar{\Lambda}_1 + 2\Lambda_2\bar{\Lambda}_2)A + 3b\Lambda_1^2\Lambda_2\exp(i\sigma T_1) = 0 \tag{5-90}$$

设

$$A = \frac{1}{2}\rho\exp[i\beta] \tag{5-91}$$

代入式(5-90)，将实部与虚部分开，得

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -c\rho + b\Gamma_1\sin\gamma \\ \rho\dot{\beta} &= b\Gamma_2\rho + \frac{3b}{8\omega_0}\rho^3 + b\Gamma_1\cos\gamma \end{aligned} \tag{5-92}$$

式中

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{3}{8}F_1^2F_2\omega_0^{-1}(\omega_0^2 - \nu_1^2)^{-2}(\omega_0^2 - \nu_2^2)^{-1} \\ \Gamma_2 &= \frac{3}{4}\omega_0^{-1}[F_1^2(\omega_0^2 - \nu_1^2)^{-2} + F_2^2(\omega_0^2 - \nu_2^2)^{-2}] \\ \gamma &= \sigma T_1 - \beta + 2\beta_1 + \beta_2 \end{aligned} \tag{5-93}$$

消去 β，得出

$$\rho\dot{\gamma} = (\sigma - b\Gamma_2)\rho - \frac{3b}{8\omega_0}\rho^3 - b\Gamma_1\cos\gamma \tag{5-94}$$

所以方程的一次近似解为

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos[(2\nu_1 + \nu_2)t - \gamma + 2\beta_1 + \beta_2] \\ &\quad + F_1(\omega_0^2 - \nu_1^2)^{-1}\cos(\nu_1 t + \beta_1) + F_2(\omega_0^2 - \nu_2^2)^{-1}\cos(\nu_2 t + \beta_2) + O(\varepsilon) \end{aligned} \tag{5-95}$$

对于方程的稳态解，$\dot{\rho} = \dot{\gamma} = 0$，因而 ρ 和 γ 满足方程组

$$
\begin{aligned}
-c\rho &= b\Gamma_1\sin\gamma \\
(\sigma - b\Gamma_2)\rho - \frac{3b}{8\omega_0}\rho^3 &= b\Gamma_1\cos\gamma
\end{aligned}
\tag{5-96}
$$

消去 γ，得频率方程

$$
\left[c^2 + \left(\sigma - b\Gamma_2 - \frac{3b}{8\omega_0}\rho^2\right)^2\right]\rho^2 = b^2\Gamma_1^2 \tag{5-97}
$$

由此可得到振幅的峰值为

$$
\rho_{\max} = \frac{|b|\Gamma_1}{c} \tag{5-98}
$$

并且可按下式计算得出

$$
\sigma = b\Gamma_2 + \frac{3b}{8\omega_0}\rho^2 = b\Gamma_2 + \frac{3b^3}{8\omega_0 c^2}\Gamma_1^2 \tag{5-99}
$$

5.4　应用举例

【例 5.4.1】　用多尺度法求强迫软 Duffing 振子的二次近似解。

$$
\ddot{x} + 2c\dot{x} + x - bx^3 = f\cos\Omega t \qquad f, b > 0 \tag{1}
$$

假设 c, b, f 为小值，对于共振情况，上式重记为

$$
\ddot{x} + x = \varepsilon(-2c\dot{x} + bx^3 + f\cos\nu t) \tag{2}
$$

它的二阶近似解为

$$
x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots \tag{3}
$$

当 $\nu \approx 1, \nu \approx 1/3, \nu \approx 3$ 时均会产生共振。这里只讨论主共振情形。

$$
\nu^2 = 1 + \varepsilon\sigma \tag{4}
$$

σ 为调谐参数。这样原方程可以写成

$$
\ddot{x} + \nu^2 x = \varepsilon(\sigma x - 2c\dot{x} + bx^3 + f\cos\nu t) \tag{5}
$$

令

$$
x = x_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2) + \cdots \tag{6}
$$

$T_0 = t$ 是快尺度，$T_1 = \varepsilon t$，$T_2 = \varepsilon^2 t$，…为慢尺度，用来刻画非线性、阻尼和共振引起的振幅和相位的变化。时间微分写为

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \cdots \\
\frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + \varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2(2D_0D_2 + D_1^2) + \cdots
\end{aligned}
\tag{7}
$$

其中 $D_n = \dfrac{\partial}{\partial T_n}$，这样将上述式子代入式(5)，并令 ε 同幂次相等，得

$$
D_0^2 x_0 + \Omega^2 x_0 = 0 \tag{8}
$$

$$
D_0^2 x_1 + \Omega^2 x_1 = -2D_0D_1x_0 + \sigma x_0 - 2cD_0x_0 + bx_0^3 + f\cos\nu t \tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
D_0^2 x_2 + \nu^2 x_2 = &-2D_0D_2x_0 - 2D_0D_1x_1 - D_1^2 x_0 \\
&-2cD_0x_1 - 2cD_1x_0 + \sigma x_1 + 3bx_0^2 x_1
\end{aligned}
\tag{10}
$$

设式(8)的解为

$$
x_0(T_0, T_1, T_2) = A(T_1, T_2)\exp(i\nu T_0) + \overline{A}(T_1, T_2)\exp(-i\nu T_0) \tag{11}
$$

A 是一个关于 T_1, T_2 的复数，它将由下一阶渐近近似中的消除长期项条件来确定，即把式(11)代入式(9)后，得

$$D_0^2 x_1 + \nu^2 x_1 = [-2i\nu D_1 A + bA - 2ic\nu A]\exp(i\nu T_0) \tag{12}$$

$$+ bA^3\exp(3i\nu T_0) + 3bA^2\overline{A}\exp(i\nu T_0) + \frac{1}{2}f\exp(i\nu T_0) + CC$$

CC 为共轭项。消除长期项的条件是

$$-2i\nu D_1 A + \sigma A - 2ic\nu A + 3bA^2\overline{A} + \frac{1}{2}f = 0 \tag{13}$$

对于一阶近似，A 仅是 T_1 的函数，故可假设

$$A = \rho(T_1)\exp[i\beta(T_1)] \tag{14}$$

把式(14)代入式(13)中，分离实虚部得

$$\dot{\rho} = -c\rho - \frac{f}{2\nu}\sin\beta \tag{15}$$

$$\rho\dot{\beta} = -\frac{\sigma}{2\nu}\rho - \frac{3}{2}\frac{b}{\nu}\rho^3 - \frac{f}{4\rho}\cos\beta \tag{16}$$

其中 $\rho(T_1)$、$\beta(T_1)$ 是基频的振幅和相位差，即

$$x_0 = \rho\cos(\nu t + \beta) \tag{17}$$

同样，对于二阶近似也需要消除长期项。首先需求得 $x_1(T_0, T_1, T_2)$，由式(12)并考虑长期项已去掉，容易得出

$$x_1 = -\frac{bA^3}{8\nu^2}\exp(3i\nu T_0) + CC \tag{18}$$

把式(17)的 x_0 和式(18)的 x_1 代入式(10)得

$$D_0^2 x_2 + \nu^2 x_2 = (-2i\nu D_2 A - D_1^2 A - 2cD_1 A)\exp(i\nu T_0)$$

$$-\frac{3}{8}\frac{b^2}{\nu^2}A^2\overline{A}^2\exp(i\nu T_0) + NST + CC \tag{19}$$

其中 NST 为不会产生长期项的那些项。上式消除长期项的条件是

$$-2i\Omega D_2 A - D_1^2 A - 2\mu D_1 A - \frac{3}{8}\frac{\alpha^2}{\Omega^2}A^3\overline{A}^2 = 0 \tag{20}$$

这里要结合式(14)和式(20)求二阶近似时的振幅和相位，写成原时间 t 的形式，有

$$2i\nu\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} + \varepsilon[(\sigma - 2ic\Omega)A + bA^2\overline{A} + \frac{1}{2}f]$$

$$+ \varepsilon^2\left[\left(c^2 + \frac{\sigma^2}{4\nu^2}\right)A - \frac{3bf}{8\nu^2}A^2 + \left(\frac{3b\sigma}{2\nu^2} - \frac{3ibc}{\nu}\right)A^2\overline{A}\right] \tag{21}$$

$$+ \frac{3bf}{4\nu^2}A\overline{A} + \frac{15b^2}{8\nu^2}A^3\overline{A}^2 + \frac{icf}{4\nu} + \frac{\sigma f}{8\nu^2} = 0$$

这种情况下假设

$$A = \frac{1}{2}\rho(t)\exp[i\beta(t)] \tag{22}$$

代入式(21)中分离实虚部得

$$\dot{\rho} = -\varepsilon c\rho - \varepsilon^2\frac{3bc}{8\nu^2}\rho^3 + \varepsilon^2\frac{cf}{4\nu^2}\cos\beta - \left(\varepsilon\frac{f}{2\nu} + \varepsilon^2\frac{\sigma f}{8\nu^3} + \varepsilon^2\frac{9bf}{32\nu^3}\rho^2\right)\sin\beta \tag{23}$$

$$\rho\dot{\beta} = -\left(\varepsilon\frac{\sigma}{2\nu} + \varepsilon^2\frac{c^2}{2\nu} + \varepsilon^2\frac{\sigma^2}{8\nu^3}\rho\right) - \left(\varepsilon\frac{3b}{8\nu} + \varepsilon^2\frac{3b\sigma}{16\nu^3}\right)\rho^3 - \varepsilon^2\frac{15b^2}{256\nu^3}\rho^5 \tag{24}$$

$$-\left(\varepsilon\frac{f}{2\nu}+\varepsilon^2\frac{\sigma f}{8\nu^3}+\varepsilon^2\frac{3bf}{32\nu^3}\rho^2\right)\cos\beta-\varepsilon^2\frac{cf}{4\nu^2}\sin\beta$$

把 x_0, x_1 和 A 代入式(6),得二阶近似解($\Omega\approx1.0$)

$$x(t)=\rho\cos(\nu t+\beta)-\varepsilon\frac{b\rho^3}{32\nu^2}\cos(3\nu t+3\beta)+\cdots \tag{25}$$

其中 ρ,β 由式(23)、式(24)确定。

图 5-1 绘出了一次、二次近似解和数值积分结果的比较。

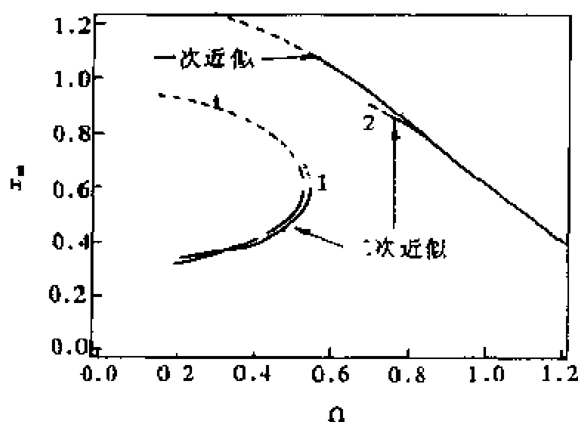


图 5-1 一次、二次近似解和数值积分结果的比较

【例 5.4.2】 用多尺度法求强迫 van der Pol 振子的共振解。

van der Pol 振子受一周期外力作用,在共振条件下,系统的方程为

$$\ddot{x}+x=\varepsilon(1-x^2)\dot{x}+\varepsilon F_0\cos\nu t \tag{26}$$

式中 ε 为正值小参数。取

$$\nu=1+\varepsilon\nu_1+\varepsilon\nu_2+\cdots$$

设只取两重时间尺度 T_0,T_1,将解 x 表示为

$$x=x_0(T_0,T_1)+\varepsilon x_1(T_0,T_1)+\cdots \tag{27}$$

则得

$$\begin{aligned}&D_0^2x_0+x_0=0\\&D_0^2x_1+x_1=-2D_0D_1x_0+(1-x_0^2)D_0x_0+F_0\cos(T_0+\nu_1T_1)\end{aligned} \tag{28}$$

为计算方便,式(28)中第一式的解写为

$$x_0=A(T_1)\exp(iT_0)+\overline{A}(T_1)\exp(-iT_0)$$

式中 $\overline{A}$ 表示 A 的共轭复数。因

$$\begin{aligned}-2D_0D_1x_0&=-2\left[i\frac{dA}{dT_1}\exp(iT_0)-i\frac{d\overline{A}}{dT_1}\exp(-iT_0)\right]\\(1-x_0^2)D_0x_0&=[1-A^2\exp(iT_0)-2A\overline{A}-\overline{A}^2\exp(-2iT_0)]\\&\quad\times[iA\exp(iT_0)-i\overline{A}\exp(-iT_0)]\\&=iA\exp(2iT_0)-i\overline{A}\exp(-iT_0)-iA^3\exp(i3T_0)\\&\quad+i\overline{A}^3\exp(-i3T_0)+iA^2\overline{A}\exp(iT_0)-iA\overline{A}^2\exp(-iT_0)\end{aligned}$$

故式(28)第二式成为

$$D_0^2x_1+x_1=\left[i\left(-2\frac{dA}{dT_1}+A-A^2\overline{A}\right)+\frac{F_0}{2}\exp(i\nu_1T_1)\right]\exp(iT_0)\tag{29}$$
$$-iA^3\exp(i3T_0)+CC$$

式中 CC 表示与方程右端前面各项共轭的项。

为了消除长期项,应有

$$i\left(-2\frac{dA}{dT_1}+A-A^2A\right)+\frac{F_0}{2}\exp(i\nu_1T_1)=0$$

或
$$2\frac{dA}{dT_1}=A-A^2\overline{A}-i\frac{F_0}{2}\exp(i\nu_1T_1)\tag{30}$$

令
$$A=\frac{1}{2}\rho\exp(i\varphi)\tag{31}$$

式中 $\rho=\rho(T_1)$, $\varphi=\varphi(T_1)$均为实函数。代入式(30)得

$$\exp(i\varphi)\left(\frac{d\rho}{dT_1}+i\rho\frac{d\varphi}{dT_1}\right)=\frac{\rho}{2}\exp(i\varphi)-\frac{\rho^2}{4}\exp(i2\varphi)\times\frac{\rho}{2}\exp(-i\varphi)-i\frac{F_0}{2}\exp(i\nu_1T_1)$$
$$=\exp(i\varphi)\left[\frac{\rho}{2}-\frac{\rho^3}{8}+\frac{F_0}{2}\exp(i\nu_1T_1-i\varphi)\right]$$

将上式中实部和虚部分开,可得

$$\frac{d\rho}{dT_1}=\frac{\rho}{2}-\frac{\rho^3}{8}+\frac{F_0}{2}\sin(\nu_1T_1-\varphi)$$
$$\frac{d\varphi}{dT_1}=-\frac{F_0}{2\rho}\cos(\nu_1T_1-\varphi)\tag{32}$$

令
$$\Psi=\nu_1T_1-\varphi\tag{33}$$

则式(32)成为

$$\frac{d\rho}{dT_1}=\frac{\rho}{2}-\frac{\rho^3}{8}+\frac{F_0}{2}\sin\Psi$$
$$\frac{d\Psi}{dT_1}=\nu_1+\frac{F_0}{2\rho}\cos\Psi\tag{34}$$

共振情况下的周期解对应着上式中 ρ, Ψ 为定值,即$\frac{d\rho}{dT_1}=0$, $\frac{d\Psi}{dT_1}=0$,由此消去 Ψ,可得共振曲线方程

$$\rho^2\left[4\nu_1^2+\left(1-\frac{\rho^2}{4}\right)^2\right]=F_0^2\tag{35}$$

【例 5.4.3】 振动方程为

$$\ddot{x}+\omega^2x=-2\varepsilon^2c\dot{x}+\varepsilon bx^2+\varepsilon dx^3\tag{36}$$

其中 c, b, d 分别对应阻尼项、平方和立方非线性位移项的系数,ε 为小参数。用多尺度法求其二阶近似解。

解 设转子振动方程的解为

$$x(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{2}\varepsilon^ix_i(T_0,T_1,T_2)+O(\varepsilon^3)\quad T_i=\varepsilon^it\tag{37}$$

引入微分记号 $D_i=\frac{\partial}{\partial T_i}$,取三个时间尺度 T_0, T_1 和 T_2,则有

$$D_0^2x_0+x_0=0\tag{38}$$
$$D_0^2x_1+x_1=-2D_0D_1x_0+bx_0^2+dx_0^3\tag{39}$$

$$D_0^2 x_2 + x_2 = -2cD_0 x_1 - (D_0^2 + 2D_0D_0)x_0 - 2D_0D_1 x_1 + 2bx_0x_1 + 3dx_0^2 x_1 \tag{40'}$$

设转子振动的零阶近似解为

$$\begin{aligned} x_0 &= A\exp(i\omega T_0) + \overline{A}\exp(-i\omega T_0) \\ A &= \frac{1}{2}\rho(T_1, T_2)\exp[i\varphi(T_1, T_2)] \end{aligned} \tag{41}$$

其中 $\overline{A}$ 是 A 的共扼项，将式(41)代入式(39)，有

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + \omega^2 x_1 = &-(2i\omega D_1 A + 3dA^2\overline{A})\exp(i\omega T_0) + bA^2\exp(i2\omega T_0) \\ &+ dA^3\exp(i3\omega T_0) + bA\overline{A} + CC \end{aligned} \tag{42}$$

其中 CC 为前几项的共轭项。

由消除长期项得一阶可解性条件

$$2i\omega D_1 A + 3dA^2 A = 0 \tag{43}$$

由此式得到确定 ρ 与 φ 的一阶偏微分方程组

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\rho}{\partial T_1} = 0 \\ &\omega\frac{\partial\varphi}{\partial T_1} + \frac{3}{8}d\rho^2 = 0 \end{aligned} \tag{44}$$

解之，得

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(T_2) \\ \varphi &= -\frac{3d}{8\omega}\rho^2 T_1 + \varphi_1(T_2) \end{aligned} \tag{45}$$

其中 $\rho(T_2)$和 $\varphi_1(T_2)$要由二阶解确定，从而转子振荡的一阶近似解为

$$x_1 = A\exp(i\omega T_0) - \frac{bA^2}{3\omega^2}\exp(i2\omega T_0) - \frac{dA^3}{8\omega^2}\exp(i3\omega T_0) + CC \tag{46}$$

再将 x_0 与 x_1 代入式(40)，并消除长期项，得到二阶可解性条件

$$-2ic\omega A - D_1^2 A - 2i\omega D_1^2 A + \frac{10b^2}{3\omega^2}A^2\overline{A} - \frac{3d^2}{8\omega^2}A^3\overline{A}^2 = 0 \tag{47}$$

由此式得到确定 $\rho(T_2)$与 $\varphi_1(T_2)$的一阶偏微分方程组

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\rho_1}{\partial T_2} = -\mu\rho_1 \\ &\frac{\partial\varphi_1}{\partial T_2} = -\frac{5}{12}\frac{b^2}{\omega^3}\rho_1^2 - \frac{15}{256}\frac{d^2}{\omega^3}\rho_1^4 \end{aligned} \tag{48}$$

解得

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho_0\exp(-cT_0) \\ \varphi_1 &= \frac{5}{24}\frac{b^2}{c\omega^3}\rho_1^2 + \frac{15}{256}\frac{d^2}{\omega^3}\rho_1^4 + \varphi_0 \end{aligned} \tag{49}$$

其中 ρ_0 和 φ_0 为初参数，由振荡的初始条件确定。从考虑式(40)和式(46)解得 x_2 后，将 x_0, x_1 及 x_2 代回式(36)，得到转子振荡在三重时间尺度下的二阶解为

$$\begin{aligned} x = \rho\cos\varphi &+ \varepsilon\left[\frac{b\rho^2}{2\omega^2}\left(1 - \frac{1}{3}\cos2\varphi\right) - \frac{d\rho^2}{32\omega^2}\cos3\varphi\right] \\ &+ \varepsilon^3\left[-\frac{31bd}{94\omega^4}\rho^4\cos2\varphi + \left(\frac{b\rho^3}{48\omega^4} - \frac{21d^2\rho^5}{1024\omega^4}\right)\cos3\varphi + \frac{bd\rho^4}{8\omega^4}\left(5 - \frac{1}{12}\cos4\varphi\right) + \frac{d^4\rho^5}{1024\omega^2}\cos5\varphi\right] \end{aligned} \tag{50}$$

式中

$$
\begin{aligned}
&\varphi = \omega_n t + \varphi_0 \\
&\omega_n = \left[1 - \frac{1}{16}\rho_0^2\left(1 + \frac{5}{3}tan^2\varphi_0 + \frac{5}{192}\rho_0^2\right)\right]\omega t
\end{aligned} \tag{51}
$$

【例 5.4.4】 在工程中，我们常常会遇到这样一些转子系统，其参数是随着时间而变化的。引起参数随时间变化的原因很多，有些是由于转子本身的物理或几何特性发生变化而引起系统参数变化。当转子出现裂纹时，会导致整个系统刚度随时间变化。转子在运转过程中，外部条件的变化也会引起其参数的变化。例如，转子在起动或停车过程中，其不平衡激振力也是随时间变化的。由于控制的引入，也会导致转子系统参数的变化。

下面以慢变刚度主动控制单盘转子振动为例，研究在控制过程中转子的振动特性。所谓慢变刚度，就是指转子的支承刚度在控制过程中随时间慢变，即刚度的变化是在很多振动周期的时间内缓慢地完成的。设转子的支承刚度在控制过程中始终保持对称，则可以用下式描述其在控制作用下的振动，即

$$
m\ddot{x} + c\dot{x} + k(\tau)x = me\omega^2\cos\omega t \tag{52}
$$

式中 $\tau = \varepsilon t$，ε 是小参数。

在实际控制过程中，支承刚度的变化可能是一个很复杂的非线性过程，但是不论支承刚度如何变化，只要它是随时间慢变的，就可以将其看成是分段线性的非线性过程，即

$$
k(\tau) = k_0 + \Delta k\tau \tag{53}
$$

设阻尼和刚度变化项为小参数，上式可改写成

$$
\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\varepsilon c_d\dot{x} - \varepsilon k_d\tau x + e\omega^2\cos\omega t \tag{54}
$$

式中 $\omega_0^2 = \frac{k_0}{m}, c_d = \frac{c}{m}, k_d = \frac{\Delta k}{m}$。

用多尺度法对方程(54)求解，设

$$
T_n = \varepsilon^n t, n = 0, 1, 2\cdots
$$

则有

$$
\begin{cases}
\frac{d}{dt} = \frac{dT_0}{dt}\frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt}\frac{\partial}{\partial T_1} + \cdots = D_0 + \varepsilon D_1 + \cdots \\
\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2(D_1^2 + 2D_0 D_2) + \cdots
\end{cases} \tag{55}
$$

式中 $D_0, D_1, D_2\cdots$分别是对 $T_0, T_1, T_2\cdots$求偏导的符号。

将式(55)代入式(54)得

$$
D_0^2 x + 2\varepsilon D_0 D_1 x + \omega_0^2 x = -\varepsilon c_d D_0\dot{x} - \varepsilon^2 c_d D_1 x - k_d\tau x + e\omega^2\cos\omega t \tag{56}
$$

设方程(56)的解为

$$
x = x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1) + \cdots \tag{57}
$$

将式(57)代入式(56)后可得

$$
\begin{aligned}
&D_0^2 x_0 + 2\varepsilon D_0 D_1 x_0 + \omega_0^2 x_0 + \varepsilon D_0^2 x_1 + 2\varepsilon^2 D_0 D_1 x_1 + \varepsilon\omega_0^2 x_1 \\
&= -\varepsilon c_d D_0\dot{x}_0 - k_d\tau x_0 + e\omega^2\cos\omega t + \cdots
\end{aligned} \tag{58}
$$

令 ε 同次幂项的系数相等，则有

$$
\varepsilon^0: D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = e\omega^2\cos\omega t \tag{59}
$$

$$
\varepsilon^1: D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - 2c_d D_0\dot{x}_0 - k_d\tau x_1 \tag{60}
$$

由式(59)得

$$x_0 = A(T_1)\exp(i\omega_0 T_0) + \Lambda\exp(i\omega T_0) + CC \tag{61}$$

式中 $\Lambda = \frac{1}{2}e\omega^2(\omega_0^2 - \omega^2)^{-1}$。

将式(61)代入式(60),得

$$D_0^2x_1 + \omega_0^2x_1 = [-2i\omega_0(A' + c_dA) - k_d\tau A]\exp(i\omega_0 T_0) + [-2i\omega\Lambda c_d - k_d\tau\Lambda]\exp(i\omega T_0) + CC \tag{62}$$

为了不出现长期项,有

$$-2i\omega_0(A' + c_dA) - k_d\tau A = 0 \tag{63}$$

由此可得

$$A = \frac{2i\omega_0}{2i\omega_0 c_d + k_d\tau}A' \tag{64}$$

设

$$A = a\exp(i\beta) \tag{65}$$

a,β 为 T_1 的函数,将式(65)代入式(64),分离实虚部得

$$\left.\begin{aligned} a' &= -c_d a \\ 2\omega_0\beta' &= k_d\tau \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

则原方程式(52)的解为

$$x = a\cos(\omega_0 t + \beta) + e\omega^2(\omega_0^2 - \omega^2)^{-1}\cos\omega t + O(\varepsilon) \tag{67}$$

由于 a 和 β 是 $T_1 = \varepsilon T$ 的函数,且与变刚度系数 k_d,即刚度变化的速度有关。根据实际情况适当选择 k_d,可以起到良好的减振作用。图 5-2 所示为不同的 k_d 时所得二维谱图,由图可见,当 $k_d = 10$ 时,振幅最小,即适当选取变刚度系数 k_d,可以有效地抑制系统的振动。

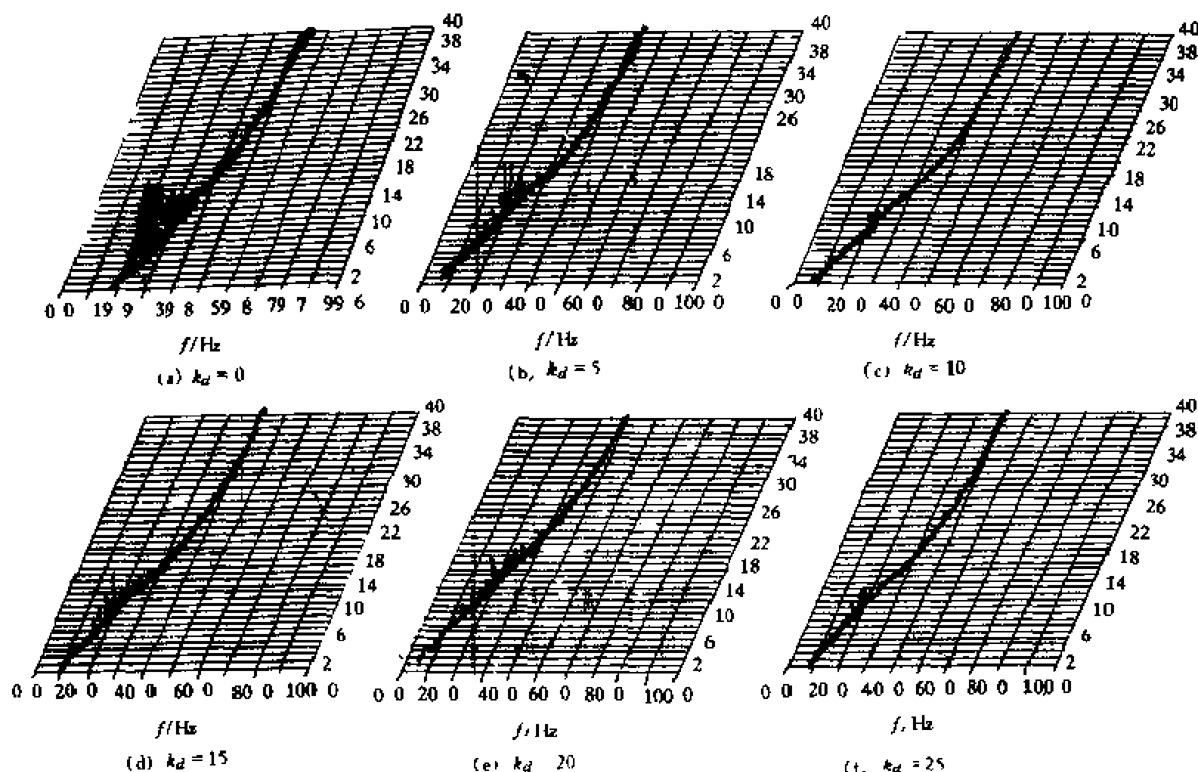


图 5-2 不同 k_d 时的转子振动的三维谱图

计算与思考

1. 用多尺度法求如下方程的一阶一致有效展开式。

(1) $\ddot{u}+\omega_0^2 u=\varepsilon u^2 \dot{u}$

(2) $\ddot{u}+4u+\varepsilon u^2\dot{u}=0$

(3) $\ddot{u}+\dfrac{\omega^2 u}{1+u^2}=0$

(4) $\ddot{u}+\omega_0^2 u=\varepsilon u^5$

(5) $\ddot{u}+\omega_0^2 u+\varepsilon \dot{u}^3=0$

(6) $\ddot{u}+\omega_0^2 u+2\varepsilon\mu u^2\dot{u}+\varepsilon u^3=0$

2. 对于小而有限的 θ，用多尺度法求

$$\ddot{\theta}+\omega^2\sin\theta+\frac{4\sin^2\theta}{1+4(1-\cos\theta)}\dot{\theta}=0$$

的通解的一阶一致有效表达式。

3. $\ddot{u}+\omega_0^2 x+\dfrac{\mu}{1-u^2}\dot{u}=0$

μ 为小值，用多尺度法求其一阶一致有效表达式。

4. 用多尺度法求解如下方程的二阶近似解。

(1) $\ddot{x}-2x-x^2+x^3=0$

(2) $\ddot{u}-u+u^4=0$

(3) $\ddot{u}-u+u^6=0$

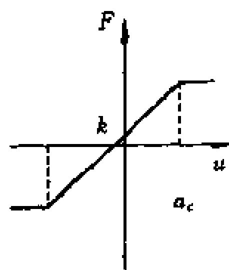
(4) $\ddot{x}+x-\dfrac{3}{16(1-x)}=0$

(5) $\ddot{u}+u+\varepsilon^2 u^3+\varepsilon u^2=0$

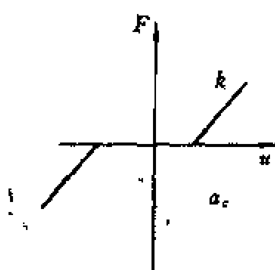
(6) $\ddot{u}+u+\varepsilon u^2+\varepsilon \dot{u}^2=0$

5. 对于如图 5-3 所示的三种形式的分段线性非线性方程，

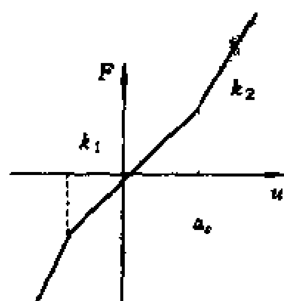
$$\ddot{u}+F(u)=0$$



(a)



(b)



(c)

图 5-3　题 5 图

$F(u)$ 均为对称分段线性，证明一次近似时的固有频率分别为

(1) $\omega_0^2=\dfrac{2k}{\pi}\left[\arcsin\left(\dfrac{a_c}{a}\right)+\dfrac{a_c}{a}\left(1-\dfrac{a_c^2}{a^2}\right)^{1/2}\right]$

(2) $\omega_0^2=k-\dfrac{2k}{\pi}\left[\arcsin\left(\dfrac{a_c}{a}\right)+\dfrac{a_c}{a}\left(1-\dfrac{a_c^2}{a^2}\right)^{1/2}\right]$

(3)$\omega_0^2=k_2-\frac{2}{\pi}(k_2-k_1)\left[\arcsin\left(\frac{a_c}{a}\right)+\frac{a_c}{a}\left(1-\frac{a_c^2}{a^2}\right)^{1/2}\right]$

6. 对于如下方程

$$\ddot{u}+\omega_0^2u=-2\varepsilon u\dot{u}-\varepsilon au^2+K\cos\Omega t$$

(1)用多尺度法求非共振解时的振幅的稳态解；

(2)当 $2\Omega=\omega_0+\varepsilon\sigma$ 时，用多尺度法求振幅的稳态解；

(3)当 $\Omega=2\omega_0+\varepsilon\sigma$ 时，用多尺度法确定振幅无界的条件。

7. 对于负阻尼硬式 Duffing 方程

$$\ddot{u}+\omega_0^2u=\varepsilon\left(\dot{u}+\frac{1}{3}\dot{u}^3\right)+\varepsilon K\cos\Omega t$$

(1)主共振时($\Omega=\omega_0+\varepsilon\sigma$)证明有如下结果

$$u=a\cos(\omega_0+\beta)+\cdots$$

$$\dot{a}=\frac{1}{2}\varepsilon\left(1-\frac{1}{4}\omega_0^2a^2\right)a+\frac{\varepsilon K}{2\omega_2}\sin(\varepsilon\sigma t-\beta)$$

$$a\dot{\beta}=-\frac{\varepsilon K}{2\omega_2}\cos(\varepsilon\sigma t-\beta)$$

(2)超谐波共振时($3\Omega=\omega_0+\varepsilon\sigma$)

$$u\approx a\cos(\omega_0+\beta)+\frac{K}{\Omega^2-\omega^2}\cos\Omega t$$

$$\dot{a}=\frac{1}{2}\varepsilon\left(\eta-\frac{1}{4}\omega_0^2a^2\right)a+\varepsilon\Gamma\cos(\varepsilon\sigma t-\beta)$$

$$a\dot{\beta}=\varepsilon\Gamma\sin(\varepsilon\sigma t-\beta)$$

试求 η,Γ。

(3)次谐波共振时($\Omega=3\omega_0+\varepsilon\sigma$)

$$u=a\cos(\omega_0+\beta)-\frac{K}{\Omega^2-\omega^2}\cos\Omega t$$

$$\dot{a}=\frac{1}{2}\varepsilon\left(\eta-\frac{1}{4}\omega_0^2a^2\right)a+\frac{1}{4}\varepsilon\omega_0^2\xi a^2\cos(\varepsilon\sigma t-3\beta)$$

$$a\dot{\beta}=\frac{1}{4}\varepsilon\omega_0\xi a^2\sin(\varepsilon\sigma t-3\beta)$$

试求 η,ξ。

(4)非共振时(Ω 不接近于 $3\omega_0,\omega_0,\omega_0/3,0$ 等)

$$u=a\cos(\omega_0+\beta)-\frac{K}{\Omega^2-\omega^2}\cos\Omega t$$

$$\dot{a}=\frac{1}{2}\varepsilon\left(\eta-\frac{1}{4}\omega_0^2a^2\right)a$$

$$\dot{\beta}=0$$

试求 η。

8. 试用多尺度法求方程

$$\ddot{x}+\sin x+2\mu x^2\dot{x}=F\cos\nu t$$

的解，试就(1)$\nu=1$，(2)$\nu=\frac{1}{3}$，(3)$\nu\approx3$ 三种情况加以分析。

9．试用多尺度法求解

$$\ddot{u}+\omega_0^2u+\varepsilon(2\mu\dot{u}+\alpha u^3)=F_1\cos(\nu_1t+\theta_1)+F_2\cos(\nu_2t+\theta_2)$$

两项激励的组合共振解。

10．试用多尺度法求有阻尼单摆的解

$$\ddot{u}+2\mu\dot{x}+\omega_0^2\sin x=0$$

11．受线性弹簧约束并受库仑阻尼和平方阻尼联合作用的质点的运动的微分方程为

$$u+\omega_0^2x+\varepsilon(\mu_0\mathrm{sgn}\dot{x}+\mu_2\dot{x}|\dot{x}|)=0$$

式中 $\mu_0,\mu_2>0,\varepsilon\ll1$ 试求一阶近似解。

12．试用多尺度法解 Rayleigh 方程

$$\ddot{y}+y=\varepsilon\left(1-\frac{1}{3}\dot{y}^2\right)\dot{y}$$

13．试用多尺度法求解 Mathieu 方程

$$\ddot{y}+(\delta+\varepsilon\cos2t)y=0$$

的前二阶一致有效展开式。

14．试用多尺度法求 van der Pol 方程的解

$$\ddot{x}+x=\varepsilon(1-x^2)\dot{x}$$

第六章　平均法

对于一个弱非线性振动系统，略去非线性项得到相应的线性系统。平均法的基本思想是将此线性系统的解的振幅和相位角看作是随时间缓慢变化的。将振幅与相位角对时间的导数展成富氏级数，并在一个周期取平均值，进而求出方程的解，平均法由此得名。几十年来，许多学者对平均法进行了较深入的研究，如文献[1,4,8,27,45]等。

6.1　平均法的由来

平均法是由常数变易法演变而来的求解非线性方程的一种独特的近似方法。为此，这里首先介绍常数变易法。根据常微分方程的基本知识，若已知齐次线性方程的基本解，根据常数变易法可以求出非齐次线性方程的解。微分方程组右边可以分成两个部分，即

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=f_1(x,y,t)+\varphi_1(x,y,t)\\ \frac{dy}{dt}&=f_2(x,y,t)+\varphi_2(x,y,t)\end{aligned}\tag{6-1}$$

略去 φ_1 和 φ_2，得简化方程式(称为派生方程)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=f_1(x,y,t)\\ \frac{dy}{dt}&=f_2(x,y,t)\end{aligned}\tag{6-2}$$

假设方程(6-2)的通解已知，即

$$\begin{aligned}x&=F_1(c_1,c_2,t)\\ y&=F_2(c_1,c_2,t)\end{aligned}\tag{6-3}$$

上式中的 c_1 和 c_2 为积分常数，这一简化方程式的解称为派生解。

常数变易法就是将派生解中所含积分常数 c_1, c_2 看作是新的因变量，再作为原始方程的解，这时，式(6-1)可以写为

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\frac{\partial F_1}{\partial t}+\frac{\partial F_1}{\partial c_1}\frac{dc_1}{dt}+\frac{\partial F_1}{\partial c_2}\frac{dc_2}{dt}=f_1(F_1,F_2,t)+\varphi_1(F_1,F_2,t)\\ \frac{dy}{dt}&=\frac{\partial F_2}{\partial t}+\frac{\partial F_2}{\partial c_1}\frac{dc_1}{dt}+\frac{\partial F_2}{\partial c_2}\frac{dc_2}{dt}=f_2(F_1,F_2,t)+\varphi_2(F_1,F_2,t)\end{aligned}\tag{6-4}$$

因为 F_1, F_2 是方程(6-2)的解，所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial t}&=f_1(F_1,F_2,t)\\ \frac{\partial F_2}{\partial t}&=f_2(F_1,F_2,t)\end{aligned}\tag{6-5}$$

因而可以写成

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial c_1}\frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial F_1}{\partial c_2}\frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}t}&=\varphi_1(F_1,F_2,t)\\
\frac{\partial F_2}{\partial c_1}\frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial F_2}{\partial c_2}\frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}t}&=\varphi_2(F_1,F_2,t)
\end{aligned}
\tag{6-6}
$$

由于 F_1,F_2 是该方程的通解，它必须满足任意给定的初始条件，所以有

$$
\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial F_1}{\partial c_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial c_2}\\
\dfrac{\partial F_2}{\partial c_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial c_2}
\end{vmatrix}
=\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(c_1,c_2)}\neq 0
\tag{6-7}
$$

因此，从方程(6-6)可解得两个变易的常数满足

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(c_1,c_2)}}\left[\frac{\partial F_2}{\partial c_2}\varphi_1(F_1,F_2,t)-\frac{\partial F_1}{\partial c_2}\varphi_2(F_1,F_2,t)\right]\\
\frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(c_1,c_2)}}\left[\frac{\partial F_1}{\partial c_1}\varphi_2(F_1,F_2,t)-\frac{\partial F_2}{\partial c_1}\varphi_1(F_1,F_2,t)\right]
\end{aligned}
\tag{6-8}
$$

如果方程(6-2)是可解的，则式(6-3)可以得出，那么根据式(6-8)，c_1，c_2 满足此微分方程，对其求解即可得原方程的解。式(6-3)可以看作是将因变量(x,y)变换成(c_1,c_2)的转换式。

例如若有以下非线性方程

$$
\ddot{x}+\omega^2 x=\varepsilon f(x,\dot{x})
\tag{6-9}
$$

其中 ε 为小参数，把它改写成一阶联立方程

$$
\begin{aligned}
\dot{x}&=y\\
\dot{y}&=-\omega^2 x+\varepsilon f(x,y)
\end{aligned}
\tag{6-10}
$$

令 $\varepsilon=0$，得派生方程

$$
\begin{aligned}
\dot{x}&=y\\
\dot{y}&=-\omega^2 x
\end{aligned}
\tag{6-11}
$$

其通解为

$$
\begin{aligned}
x&=\rho\cos(\omega t+\beta)\\
y&=-\rho\omega\sin(\omega t+\beta)
\end{aligned}
\tag{6-12}
$$

式中 ρ,β 是积分常数。

取这个解作为派生解，并把 ρ,β 看作新的变量，应用常数变易法，相应于式(6-8)，可求出

$$
\begin{aligned}
\dot{\rho}&=-\frac{\varepsilon}{\omega}f_0(\rho,\varphi)\sin\varphi\\
\dot{\beta}&=-\frac{\varepsilon}{\rho\omega}f_0(\rho,\varphi)\cos\varphi
\end{aligned}
\tag{6-13}
$$

$$
f_0(\rho,\varphi)=f(\rho\cos\varphi,-\rho\omega\sin\varphi),\qquad \varphi=\omega t+\beta
$$

这种方法是从派生解出发，应用常数变易来描述非线性项的影响，称为平均法。目前有多种平均法，如常数变易法、非线性函数直接展开法等。

6.2　含非线性弹性力和阻尼力的自治系统

6.2.1　常数变易法

在平均法中，把派生解的振幅与相位作为变易的常数，也就是说对派生解的正弦波加以振幅调制与频率调制来近似表示非线性振动系统的振动。

方程(6-13)可看作是原方程通过式(6-8)进行变量变换后，得到的关于变量 ρ,β 的微分方程。如果我们能精确求出方程(6-13)的解，那么问题就解决了，但事实上，往往无法求出方程的精确解。如果 ε 等于零，那么在稳态振动的情况下，ρ,β 都是常数；如果 ε 不为零，但很小，那末，ρ,β 将随时间 t 缓慢变化，但是仍可以看作平滑变化的量与小的振动变化量迭加而成的。用平均值，即平滑变化的量来表示 $\rho=\bar{\rho}(t),\beta=\bar{\beta}(t)$，而略去微小的波动。

当振幅 ρ 用平均值 $\bar{\rho}$ 表示，相位角 β 用平均值 $\bar{\beta}$ 表示，这时式(6-12)可写为

$$x=\bar{\rho}\cos(\omega t+\bar{\beta}) \tag{6-14}$$

对式(6-13)取平均值

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\rho}}&=-\frac{\varepsilon}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi}f_0(\bar{\rho},\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\ \dot{\bar{\beta}}&=-\frac{\varepsilon}{2\pi\bar{\rho}\omega}\int_0^{2\pi}f_0(\bar{\rho},\varphi)\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\ f_0(\bar{\rho},\varphi)&=f(\bar{\rho}\cos\varphi,-\bar{\rho}\omega\sin\varphi)\end{aligned} \tag{6-15}$$

当非线性函数已知时，可按上式计算出 $\dot{\rho}$ 和 $\dot{\beta}$ 的平均值。

假如我们要进一步求出包含高次谐波项在内的改进的一次近似解，也可以从式(6-13)出发，将式(6-13)中的 $\dot{\rho},\dot{\beta}$ 的右端项，展为富氏级数

$$\begin{aligned}\dot{\rho}&=-\frac{\varepsilon}{\omega}f_0(\rho,\varphi)\sin\varphi=-\frac{\varepsilon}{\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\left[g_n^{(1)}(\rho)\cos n\varphi+h_n^{(1)}(\rho)\sin n\varphi\right]\\ \dot{\beta}&=-\frac{\varepsilon}{\rho\omega}f_0(\rho,\varphi)\cos\varphi=-\frac{\varepsilon}{\rho\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\left[g_n^{(2)}(\rho)\cos n\varphi+h_n^{(2)}(\rho)\sin n\varphi\right]\\ f_0(\rho,\varphi)&=f(\rho\cos\varphi,-\rho\omega\sin\varphi)\end{aligned} \tag{6-16}$$

原先我们所取的平均值相当于上式中仅保留 $n=0$ 的项，即

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\rho}}(t)&=-\frac{\varepsilon}{\omega}g_0^{(1)}(\bar{\rho})\\ \dot{\bar{\beta}}(t)&=-\frac{\varepsilon}{\bar{\rho}\omega}g_0^{(2)}(\bar{\rho})\end{aligned} \tag{6-17}$$

式(6-15)与式(6-17)是等价的，如作更进一步的近似，则有

$$\begin{aligned}\rho&=\bar{\rho}(t)+\text{小的振动项}\\ \beta&=\bar{\beta}(t)+\text{小的振动项}\end{aligned} \tag{6-18}$$

对式(6-16)积分，即可求得

$$\begin{aligned}\rho&=\bar{\rho}-\frac{\varepsilon}{\omega^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[g_n^{(1)}(\bar{\rho})\sin n\varphi-h_n^{(1)}(\bar{\rho})\cos n\varphi\right]\\ \beta&=\bar{\beta}-\frac{\varepsilon}{\bar{\rho}\omega^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[g_n^{(2)}(\bar{\rho})\sin n\varphi-h_n^{(2)}(\bar{\rho})\cos n\varphi\right]\end{aligned} \tag{6-19}$$

6.2.2 非线性函数直接展开法

我们还可以先将非线性函数按富氏级数展开，即

$$f_0(\rho,\varphi)=f(\rho\cos\varphi,-\rho\omega\sin\varphi)=g_0(\rho)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[g_n(\rho)\cos n\varphi+h_n(\rho)\sin n\varphi\right] \tag{6-20}$$

其中的富氏系数 $g_0(\rho)$，$g_n(\rho)$和 $h_n(\rho)$可由下式求得

$$\begin{aligned}g_0(\rho)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_0(\bar{\rho},\varphi)\mathrm{d}\varphi\\ g_n(\rho)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_0(\bar{\rho},\varphi)\cos n\varphi\mathrm{d}\varphi\\ h_n(\rho)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_0(\bar{\rho},\varphi)\sin n\varphi\mathrm{d}\varphi\\ f_0(\bar{\rho},\varphi)&=f(\bar{\rho}\cos\varphi,-\bar{\rho}\omega\sin\varphi)\end{aligned} \tag{6-21}$$

由式(6-20)可以看出，$g_1(\bar{\rho})$和 $h_1(\rho)$已在式(6-17)中考虑，即式(6-17)可写为

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\rho}}(t)&=-\frac{\varepsilon}{2\omega}h_1(\rho)\\ \dot{\bar{\beta}}(t)&=-\frac{\varepsilon}{2\rho\omega}g_1(\bar{\rho})\end{aligned} \tag{6-22}$$

而将余下的非线性作用力中的常数项 $g_0(\rho)$及高次谐波项代入方程(6-9)，得

$$\ddot{x}_1+\omega^2x_1=\varepsilon g_0(\bar{\rho})+\varepsilon\sum_{n=2}^{\infty}\left[g_n(\rho)\cos n\varphi+h_n(\bar{\rho})\sin n\varphi\right] \tag{6-23}$$

该方程的解为

$$x_1=\frac{\varepsilon}{\omega^2}\left\{g_0(\rho)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{1-n^2}\left[g_n(\bar{\rho})\cos n\varphi+h_n(\rho)\sin n\varphi\right]\right\} \tag{6-24}$$

因此，方程(6-9)的一次近似解为

$$x=\bar{\rho}\cos(\omega t+\bar{\beta})+\frac{\varepsilon}{\omega^2}\left\{g_0(\bar{\rho})+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{1-n^2}\left[g_n(\rho)\cos n\varphi+h_n(\bar{\rho})\sin n\varphi\right]\right\} \tag{6-25}$$

【例 6.2.1】 已知如下非线性方程

$$\ddot{x}+ax+bx^3=0,\quad f=-bx^3,\omega^2=a$$

解 令派生解

$$x=\rho\cos\varphi\qquad y=-\rho\omega\sin\varphi\qquad \varphi=\omega t+\beta$$

根据式(6-13)可得

$$\rho-\frac{b\rho^3}{\omega}\cos^3\varphi\sin\varphi$$

$$\dot{\beta}=\frac{b\rho^2}{\omega}\cos^4\varphi$$

按照式(6-17)，有

$$\dot{\bar{\rho}}=0$$

$$\dot{\bar{\beta}}-\frac{3b\bar{\rho}^2}{8\omega}$$

积分后得

$$\rho = c_1$$

$$\beta = \frac{3bc_1^2}{8\omega}t + c_2$$

式中之 c_1, c_2 为积分常数，设初始条件为当 $t=0$ 时，有 $x=A, \dot{x}=0$，则一次近似为

$$x = A\cos\left(1+\frac{3bA^2}{8a}\right)\omega t$$

进而来求改进的一次近似解，由式(6-16)得

$$\dot{\rho} = \frac{b\rho^3}{\omega}\left(\frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{\sin 4\varphi}{8}\right)$$

$$\dot{\beta} = \frac{b\rho^2}{\omega}\left(\frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{\cos 4\varphi}{8}\right)$$

相当于式(6-19)有

$$\rho = \rho - \frac{b\bar{\rho}^3}{8\omega^2}\cos 2\bar{\varphi} - \frac{b\rho^3}{32\omega^2}\cos 4\bar{\varphi}$$

$$\beta = \bar{\beta} + \frac{b\bar{\rho}^2}{4\omega^2}\sin 2\bar{\varphi} + \frac{b\rho^2}{32\omega^2}\sin 4\bar{\varphi}$$

按照(6-25)，经简化得

$$x = \bar{\rho}\cos\varphi - \frac{3b\bar{\rho}^3}{16\omega^2}\cos\bar{\varphi} + \frac{b\bar{\rho}^3}{32\omega^2}\cos 3\bar{\varphi}$$

为满足初始条件，$\dot{x}(0)=0,\ x(0)=A$，应有 $c_2=0,\ A=\bar{\rho}-\frac{b\bar{\rho}^3}{32\omega^2}$，即 $\bar{\rho}=A+\frac{5A^3}{32\omega^2}$。最后有

$$x = A\cos\bar{\varphi} + \frac{bA^3}{32\omega^2}(\cos 3\bar{\varphi} - \cos\bar{\varphi}) \qquad \bar{\varphi} = \omega\left(1+\frac{3bA^2}{8a}\right)t$$

6.3　含非线性惯性力的自治系统

若有以下非线性振动方程式

$$m\ddot{x} + f_m(\ddot{x}, \dot{x}) + kx + f_k(x, \dot{x}) = 0 \tag{6-26}$$

式中　$f_m(\ddot{x}, \dot{x})$——非线性惯性力和阻尼力的综合表示式；

$f_k(x, \dot{x})$——非线性弹性力和阻尼力的综合表示式。

以上方程的派生方程为

$$m\ddot{x}_0 + kx_0 = 0 \tag{6-27}$$

设派生解为

$$\begin{aligned} x_0 &= \rho_0\cos\varphi \\ \dot{x}_0 &= -\rho_0\omega\sin\varphi \\ \ddot{x}_0 &= -\rho_0\omega^2\cos\varphi \\ \varphi &= \omega_0 t + \beta_0 \end{aligned} \tag{6-28}$$

在不考虑非线性函数的情况下，ρ_0 和 β_0 都是常数。当考虑非线性函数时，ρ_0 和 β_0 不再是常数，它们是时间 t 的函数，因而方程的解为

$$x = \rho(t)\cos[\omega_0 t + \beta(t)] \tag{6-29}$$

$\rho(t)$和 $\omega(t)$可表示为

$$\begin{aligned}
&\rho(t)=\rho_0+\rho_1(t)\\
&\omega(t)=\omega_0+\omega_1(t)=\varphi(t)\\
&\dot{\rho}(t)=\rho_1(t)\\
&\dot{\beta}(t)=\omega_1(t)
\end{aligned}\tag{6-30}$$

为了求出 $\dot{\rho}(t)$和 $\beta(t)$，我们将非线性函数展开为

$$f_m(\ddot{x},\dot{x})=g_{m1}\cos\varphi+h_{m1}\sin\varphi+\varepsilon\left\{g_{m0}+\sum_{n=1}^{\infty}[g_{mn}\cos n\varphi+h_{mn}\sin n\varphi]\right\}\tag{6-31}$$

式中

$$\begin{aligned}
&g_{m0}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_m(\rho,\varphi)\mathrm{d}\varphi\\
&g_{mn}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_m(\rho,\varphi)\cos n\varphi\mathrm{d}\varphi\\
&h_{mn}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_m(\rho,\varphi)\sin n\varphi\mathrm{d}\varphi\\
&f_m(\rho,\varphi)=f_m(-\omega^2\rho\cos\varphi,-\rho\omega\sin\varphi)
\end{aligned}\tag{6-32}$$

而

$$f_k(x,\dot{x})=g_{k1}\cos\varphi+h_{k1}\sin\varphi+\varepsilon\left\{g_{k0}+\sum_{n=1}^{\infty}[g_{kn}\cos n\varphi+h_{kn}\sin n\varphi]\right\}\tag{6-33}$$

式中

$$\begin{aligned}
&g_{k0}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_k(\rho,\varphi)\mathrm{d}\varphi\\
&g_{kn}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_k(\rho,\varphi)\cos n\varphi\mathrm{d}\varphi\\
&h_{kn}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_k(\rho,\varphi)\sin n\varphi\mathrm{d}\varphi\\
&f_k(\rho,\varphi)=f_k(\rho\cos\varphi,-\rho\omega\sin\varphi)
\end{aligned}\tag{6-34}$$

这时可求得

$$\dot{\rho}(t)=-\delta_e(t)\rho=-\frac{f_e}{2m}\rho=\frac{-1}{2\pi m\omega}\int_0^{2\pi}[f_m(\rho,\varphi)+f_k(\rho,\varphi)]\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\tag{6-35}$$

式中

$$\begin{aligned}
&f_e=\frac{1}{\pi\rho\omega}\int_0^{2\pi}[f_m(\rho,\varphi)+f_k(\rho,\varphi)]\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\\
&\varphi(t)=\omega(t)=\sqrt{\frac{k+k_e}{m+m_e}}=\sqrt{\frac{k}{m}}\left(1-\frac{k_e-m_e}{m}\right)
\end{aligned}\tag{6-36}$$

而

$$\begin{aligned}
&m_e=\frac{g_{m1}}{\rho\omega^2}=\frac{1}{\pi\rho\omega^2}\int_0^{2\pi}f_m(\rho,\varphi)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\\
&k_e=\frac{g_{k1}}{\rho}=\frac{1}{\pi\rho}\int_0^{2\pi}f_k(\rho,\varphi)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}\tag{6-37}$$

若再考虑高次谐波成份，则有

$$x=\bar{\rho}\cos(\omega t+\bar{\beta})$$

$$\frac{\varepsilon}{\omega^2}\left\{g_{m0}+g_{k0}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{1-n^2}\left[g_{mn}\cos n\varphi+h_{mn}\sin n\varphi+g_{kn}\cos n\varphi+h_{kn}\sin n\varphi\right]\right\} \tag{6-38}$$

6.4 含非线性弹性力和阻尼力的非自治系统

对于拟线性方程

$$\ddot{x}+\omega^2 x=\varepsilon f(\nu t,x,\dot{x}) \tag{6-39}$$

与自治系统相似，设方程的近似解为

$$x=\rho\cos(\omega t+\beta)=\rho\cos\varphi \tag{6-40}$$

式中的 ρ,β 由以下方程决定。

$$\begin{aligned}\dot{\rho}&=-\frac{\varepsilon}{\omega}f_0(\nu t,\rho,\varphi)\sin\varphi\\ \dot{\beta}&=-\frac{\varepsilon}{\rho\omega}f_0(\nu t,\rho,\varphi)\cos\varphi\end{aligned} \tag{6-41}$$

$$f_0(\nu t,\rho,\varphi)=f(\nu t,\rho\cos\varphi,-\rho\omega\sin\varphi)$$

为了用平均法求方程的解，将上式右端按傅立叶级数展开

$$\begin{aligned}f_0(\nu t,\rho,\varphi)\sin\varphi&=\sum_{m,n}\sum A_{mn}(\rho)\,\mathrm{e}^{im\beta}\mathrm{e}^{i(m\omega+n\nu)t}\\ f_0(\nu t,\rho,\varphi)\cos\varphi&=\sum_{m,n}\sum B_{mn}(\rho)\mathrm{e}^{im\beta}\mathrm{e}^{i(m\omega+n\nu)t}\end{aligned} \tag{6-42}$$

$$f_0(\nu t,\rho,\varphi)=f(\nu t,\rho\cos\varphi,-\rho\omega\sin\varphi)$$

下面分别讨论非共振情况与共振情况。

6.4.1 非共振情况

与自治系统的情况相似，ρ 和 β 可分成缓慢的平均变化的分量 $\bar{\rho},\bar{\beta}$，以及短促的振动变化分量，而该平均分量 $\bar{\rho},\bar{\beta}$ 可近似看成是由式(6-17)关于 t 的二个周期$\frac{2\pi}{\nu},\frac{2\pi}{\omega}$取平均值时得到的以下方程确定

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\rho}}&=-\frac{\varepsilon}{\omega}A_{00}(\bar{\rho})\\ \dot{\bar{\beta}}&=-\frac{\varepsilon}{\rho\omega}B_{00}(\bar{\rho})\end{aligned} \tag{6-43}$$

如果已从这个方程解得 $\bar{\rho},\bar{\beta}$，则改进的一次近似解为

$$\begin{aligned}\rho&=\bar{\rho}-\frac{\varepsilon}{\omega}\sum_{m^2+n^2\neq 0}\sum\frac{A_{mn}(\rho)\mathrm{e}^{im\beta}}{i(m\omega+n\nu)}\mathrm{e}^{i(m\omega+n\nu)t}\\ \beta&=\bar{\beta}-\frac{\varepsilon}{\rho\omega}\sum_{m^2+n^2\neq 0}\sum\frac{B_{mn}(\rho)\mathrm{e}^{im\beta}}{i(m\omega+n\nu)}\mathrm{e}^{i(m\omega+n\nu)t}\end{aligned} \tag{6-44}$$

将非线性函数直接展为富氏级数，也可以导出平均法的基本公式。

设 $f_{mn}(\rho)$ 为下述富氏级数展开式

$$f_0(\nu t,\rho,\varphi)=\sum_{m,n}\sum f_{mn}(\rho)\cdot e^{im\beta}e^{i(m\omega+n\nu)t} \tag{6.45}$$

$$f_0(\nu t,\rho,\varphi)=f(\nu t,\rho\cos\varphi,-\rho\omega\sin\varphi)$$

的系数,则

$$\begin{aligned} A_{mn}(\bar{\rho}) &= \frac{1}{2i}[f_{m-1,n}(\rho)-f_{m+1,n}(\rho)] \\ B_{mn}(\bar{\rho}) &= \frac{1}{2}[f_{m-1,n}(\rho)+f_{m+1,n}(\rho)] \end{aligned} \tag{6-46}$$

利用上式稍作计算,可得略去 $O(\varepsilon^2)$项的改进的一次近似解

$$x=\rho\cos(\omega t+\bar{\beta})+\frac{\varepsilon}{4\omega^2}\{f_{-10}(\bar{\rho})e^{-i(\omega t+\bar{\beta})}+f_{10}(\bar{\rho})e^{i(\omega t+\bar{\beta})}\}$$

$$-\varepsilon\sum_{(m^2-1)^2+n^2\neq 0}\sum\frac{f_{mn}(\bar{\rho})e^{im\bar{\beta}}}{(m\omega+n\nu)^2-\omega^2}e^{i(m\omega+n\nu)t} \tag{6-47}$$

式中的 $\bar{\rho},\bar{\beta}$ 可由式(6.43)的解给出。

6.4.2 共振情况

设 r,s 是互质的整数,对于近共振情况,应满足以下条件

$$\nu=\left(\frac{s}{r}\right)\omega+\varepsilon\sigma \tag{6.48}$$

在这种情况下,在 A_{mn}和B_{mn}中至少有一项使$mr+ns=0$,同时有

$$\begin{aligned} \varphi &= \omega t+\beta=(r/s)\nu t+\beta-\varepsilon(r/s)\sigma t=(r/s)\nu t+\chi \\ \chi &= \beta-\varepsilon(r/s)\sigma t \end{aligned} \tag{6.49}$$

方程(6.41)成为

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\frac{\varepsilon}{\omega}f_0(\nu t,\rho,\varphi)\sin\varphi \\ \dot{\chi} &= -\varepsilon(r/s)\sigma-\frac{\varepsilon}{\rho\omega}f_0(\nu t,\rho,\varphi)\cos\varphi \\ f_0(\nu t,\rho,\varphi) &= f(\nu t,\rho\cos\varphi,-\rho\omega\sin\varphi) \end{aligned} \tag{6-50}$$

根据直接展开法,将上式等号后的函数直接展为富氏级数,有

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\frac{\varepsilon}{\omega}\sum_{m,n}\sum A_{mn}(\rho)e^{im\chi}e^{i[m(r/s)+n]\nu t} \\ \dot{\chi} &= -\varepsilon(r/s)\sigma-\frac{\varepsilon}{\rho\omega}\sum_{m,n}\sum B_{mn}(\rho)e^{im\chi}e^{i[m(r/s)+n]\nu t} \end{aligned} \tag{6-51}$$

求上式的平均值,平均法只包含 $mr+ns=0$ 项,得到

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\rho}} &= -\frac{\varepsilon}{\omega}\sum_{mr+ns=0}\sum A_{mn}(\bar{\rho})e^{im\bar{\chi}} \\ \dot{\bar{\chi}} &= -\varepsilon(r/s)\sigma-\frac{\varepsilon}{\rho\omega}\sum_{mr+ns=0}\sum B_{mn}(\bar{\rho})e^{im\bar{\chi}} \end{aligned} \tag{6.52}$$

平均法与以前讲过的几种方法的差异是这种方法不能采用简单求积法进行求解。若 $\bar{\rho}$ 和 $\bar{\chi}$ 已经求出,则一次近似解完成。再考虑高阶振动量,可以得如下较精确的解

$$\rho=\bar{\rho}-\frac{\varepsilon}{\omega}\sum_{mr+ns\neq 0}\sum A_{mn}(\bar{\rho})e^{im\chi}\cdot\frac{e^{i[m(r/s)+n]\nu t}}{i[m(r/s)+n]\nu}$$

$$\chi=\chi-\varepsilon(r/s)\sigma-\frac{\varepsilon}{\rho\omega}\sum_{mr+ns\neq 0}\sum B_{mn}(\rho)e^{im\chi}\cdot\frac{e^{i[m(r/s)+n]\nu t}}{i[m(r/s)+n]\nu} \tag{6-53}$$

于是有

$$x=\rho\cos[(r/s)\nu t+\chi] \tag{6-54}$$

下面采用将非线性函数直接展为富氏级数的方法，直接给出平均法的基本公式。用f_{mn}代替A_{mn}和B_{mn}，并略去高阶小量，得

$$x\approx\rho\cos((r/s)\nu t+\chi)+\frac{\varepsilon}{4\omega^2}\{e^{-i(r/s)t}\sum_{(m+1)r+ns=0}\sum f_{mn}(\bar{\rho})e^{im\bar{\chi}}+e^{i(r/s)t}\sum_{(m-1)r+ns=0}\sum f_{mn}(\bar{\rho})e^{im\bar{\chi}}\}$$

$$-\varepsilon\sum_{(m^2-1)^2+n^2\neq 0}\sum\frac{f_{mn}(\bar{\rho})e^{im\chi}}{(m\omega+n\nu)^2-\omega^2}e^{i((r/s)m\nu+n\nu)t} \tag{6-55}$$

这里的结果可以用来讨论主共振，超、次谐波共振等情况。

【例 6.4.1】 用平均法求以下小阻尼杜芬方程的解。

$$\ddot{x}+\varepsilon c\dot{x}+x+\varepsilon bx^3=\varepsilon F\cos\nu t$$

解 假设

$$f=\omega\sin\varphi-b\rho^3\cos^3\varphi+F\cos\nu t$$

$$f_{10}=c\rho/2i-(3/8)b\rho^3,\quad f_{-10}=-c\rho/2i-(3/8)b\rho^3$$

$$f_{30}=f_{03}=b\rho^3/8,\quad f_{0,1}=f_{0,-1}=F/2$$

其它　$f_{mn}=0$。

同时$A_{00}=c\rho/2$，$B_{00}=-(3/8)b\rho^3$，$A_{00}=B_{00}=0$，除了$(0,0)$，$(\pm 2,0)$，$(\pm 4,0)$，$(\pm 1,\pm 1)$等以外，$\nu=1$时也会发生共振。

非共振情况 $\nu-1\geqslant\varepsilon$，此时

$$\dot{\bar{\rho}}=-\frac{1}{2}\varepsilon c\rho$$

$$\dot{\bar{\beta}}=\frac{3}{8}\varepsilon b\bar{\rho}^2$$

在这种情况下，当$\dot{\rho}=0$，方程有以下的稳态解

$$x=\frac{\varepsilon F}{1-\nu^2}\cos\nu t+O(\varepsilon^2)$$

可以证明这个解是稳定的。

共振情况：可令$\nu=1+\varepsilon\sigma$，这时有

$$\dot{\bar{\rho}}=-\frac{\varepsilon}{2}(c\bar{\rho}+F\sin\bar{\chi})$$

$$\dot{\bar{\chi}}=-\varepsilon\left(\sigma-\frac{3}{8}b\bar{\rho}^2+\frac{F}{2\rho}\cos\bar{\chi}\right)$$

对于定常情况，$\dot{\bar{\rho}}=\dot{\bar{\chi}}=0$，可求出

$$\bar{\rho}^2\left[c^2+4\left(\sigma-\frac{3}{8}b\rho^2\right)^2\right]=F^2$$

由上式可求出三个不同大小的振幅ρ(即以上方程有的三个解)。

6.5 含非线性惯性力的非自治系统

有以下非线性方程

$$m\ddot{x} + kx + \varepsilon f(\nu t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0 \tag{6-56}$$

下面分别讨论非共振情况和共振情况。

6.5.1 非共振情况

在非共振情况下,方程的解为

$$x = \rho\cos\varphi + A\cos\nu t \tag{6-57}$$

这时非线性函数可展为以下富氏级数的形式

$$f_0(\nu t, \rho, \varphi) = f(\nu t, \rho\cos\varphi, -\rho\omega\sin\varphi, -\rho\omega^2\cos\varphi) = \sum_{m,n}\sum f_{mn}(\rho)e^{im\beta}\cdot e^{i(m\omega+n\nu)t} \tag{6-58}$$

式中富氏级数 $f_{mn}(\rho)$ 可由下式求出

$$f_{mn}(\rho) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(\nu t, \rho, \varphi)e^{-i(m\varphi+n\nu t)}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \tag{6-59}$$

于是,在非共振情况下方程的改进的一次近似解为

$$\begin{aligned} x &= \bar{\rho}\cos(\omega t + \bar{\beta}) - \frac{\varepsilon}{4\omega^2}\{f_{-10}(\bar{\rho})e^{-i(\omega t+\bar{\beta})} + f_{10}(\bar{\rho})e^{i(\omega t+\bar{\beta})}\} \\ &\quad - \varepsilon\sum_{(m^2-1)^2+n^2\neq 0}\sum \frac{f_{mn}(\bar{\rho})e^{im\bar{\beta}}}{(m\omega+n\nu)^2-\omega^2}e^{i(m\omega+n\nu)t} \end{aligned} \tag{6-60}$$

式中的 $\bar{\rho}, \bar{\beta}$ 由如下方程确定

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\rho}} &= \frac{\varepsilon}{m}\left[\frac{1}{4\pi^2\omega}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(\nu t, \rho, \varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\right]_{\bar{\rho}} \\ \dot{\bar{\beta}} &= \frac{\varepsilon}{\bar{\rho}m}\left[\frac{1}{4\pi^2\omega^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(\nu t, \rho, \varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\right]_{\bar{\rho}} \end{aligned} \tag{6-61}$$

6.5.2 共振情况

设 r, s 是互质的整数,对于近共振情况,应满足以下条件

$$\nu = (r/s)\omega + \varepsilon\sigma \tag{6-62}$$

在这种情况下,在 A_{mn} 和 B_{mn} 中至少有一项使 $mr+ns=0$,同时有

$$\begin{aligned} &\varphi = \omega t + \beta = (r/s)\nu t + \beta - \varepsilon(r/s)\sigma t = (r/s)\nu t + \chi \\ &\chi = \beta - \varepsilon(r/s)\sigma t \end{aligned} \tag{6-63}$$

可将非线性函数直接展为富氏级数,进而可导出平均法的基本公式。

$$\begin{aligned} x &= \bar{\rho}\cos((r/s)\nu t + \bar{\chi}) \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{4\omega^2}\left\{e^{-i(r/s)\nu t}\sum_{(m+1)r+ns=0}\sum f_{mn}(\bar{\rho})e^{im\bar{\chi}} + e^{i(r/s)\nu t}\sum_{(m-1)r+ns=0}\sum f_{mn}(\bar{\rho})e^{im\bar{\chi}}\right\} \\ &\quad + \varepsilon\sum_{(m^2-1)^2+n^2\neq 0}\sum \frac{f_{mn}(\bar{\rho})e^{im\bar{\chi}}}{(m\omega+n\nu)^2-\omega^2}e^{i((r/s)m\nu+n\nu)t} \end{aligned} \tag{6-64}$$

式中之 $\bar{\rho},\bar{\beta}$ 与式(6-61)相同。

6.6　应用举例

【例 6.6.1】　用平均法求解具有滞回阻尼的振动方程。

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f \tag{1}$$

式中　$\omega_0^2 = k/m$

$$-f = \begin{cases} x + x_s - x_b & x_b \geqslant x \geqslant x_c \\ x_s & x_c \geqslant x \geqslant x_d \\ x - x_s - x_d & x_a \geqslant x \geqslant x_d \\ x_s & x_b \geqslant x \geqslant x_a \end{cases} \tag{2}$$

这里 $x_c = x_b - 2x_s$, $x_a = x_d + 2x_s$。

将 f 代入平均法有关公式，得到

$$a = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0}\Big[\int_{x_b}^{x_c}(x - x_s - x_b)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi(x) - \int_{x_c}^{x_d} x_s\sin\varphi\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{x_d}^{x_a}(x - x_s - x_b)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{x_a}^{x_b} x_s\sin\varphi\mathrm{d}\varphi(x)\Big] \tag{3}$$

$$\beta = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0 a}\Big[\int_{x_b}^{x_c}(x - x_s - x_b)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi(x) - \int_{x_c}^{x_d} x_s\cos\varphi\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{x_d}^{x_a}(x - x_s - x_b)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi(x) + \int_{x_a}^{x_b} x_s\cos\varphi\mathrm{d}\varphi(x)\Big] \tag{4}$$

式中的积分是对图 6-1 中的 $BCDAB$ 积分一周，现已分成 BC, CD, DA, AB 四段。

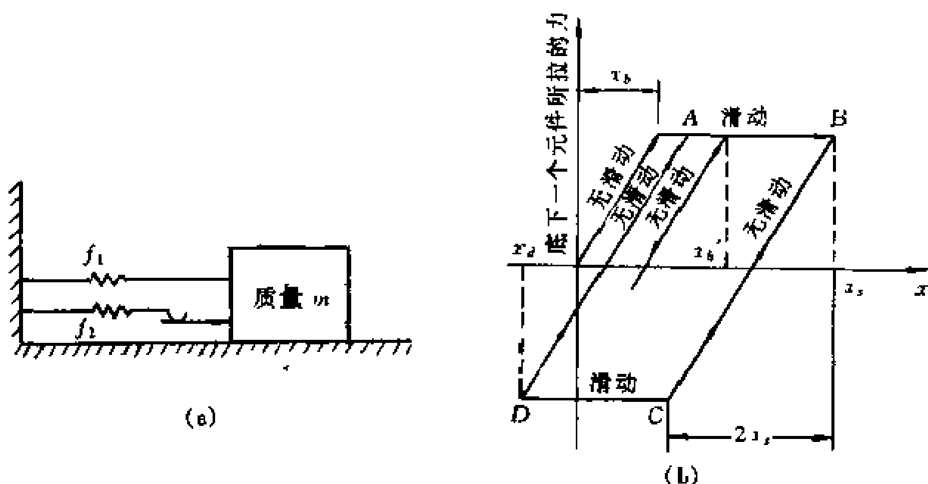


图 6-1　具有滞回阻尼的振动系统

为了算出式(3)和式(4)中的积分，我们把积分变量从 x 变为 φ。为了实现这一点，我们注意到，以 φ 为变量时周期为 2π，而且因为运动是周期的，我们在 B 点置 $\varphi = 0$，因此在 D 点 $\varphi = \pi$，由于 $x = a\cos\varphi$，所以

$$\begin{aligned} x_b &= a, \quad x_c = x_b - 2x_s = a\cos\varphi_1 \\ x_d &= -a, \quad x_a = x_d + 2x_s = a\cos\varphi_2 \end{aligned} \tag{5}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= \arccos\left(\frac{a-2x_s}{a}\right) \\
\varphi_2 &= \arccos\left(\frac{2x_s-a}{a}\right)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

于是式(3)和式(4)变为

$$
\begin{aligned}
\dot{a} = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0}\Big[&\int_0^{\varphi_1}(a\cos\varphi + x_s - a)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi - x_s\int_{\varphi_1}^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi \\
&+ \int_{\pi}^{\varphi_2}(a\cos\varphi - x_s + a)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi + x_s\int_{\varphi_2}^{2\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\Big]
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\beta} = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0 a}\Big[&\int_0^{\varphi_1}(a\cos\varphi + x_s - a)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi - x_s\int_{\varphi_1}^{\pi}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi \\
&+ \int_{\pi}^{\varphi_2}(a\cos\varphi - x_s + a)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi + x_s\int_{\varphi_2}^{2\pi}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\Big]
\end{aligned}
\tag{8}
$$

计算出式(7)和式(8)中的积分，并利用式(6)，得到

$$
\dot{a} = \frac{2\varepsilon x_s}{\pi\omega_0 a}(x_s - a) \tag{9}
$$

$$
\dot{\beta} = \frac{\varepsilon}{\pi\omega_0}\left[\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-2x_s}{a}\right) - \left(1 - \frac{2x_s}{a}\right)\left(\frac{x_s}{a} - \frac{x_s^2}{a^2}\right)^{1/2}\right] \tag{10}
$$

方程(9)的解是

$$
a + x_s\ln(a - x_s) = -\frac{2\varepsilon x_s}{\pi\omega_0}t + c \tag{11}
$$

式中 c 是积分常数。可见 a 是 t 的隐函数。我们不能象积分 a 那样积出(10)式，但是我们注意到这样一点：当 $t\to\infty$ 时，$a\to x_s$ 且 $\dot{\beta}\to\varepsilon/(2\omega_0)$，这与滞后机制未起作用时的精确解相一致。

图 6-2 将方程(1)的数值解与近似结果(11)作了比较。

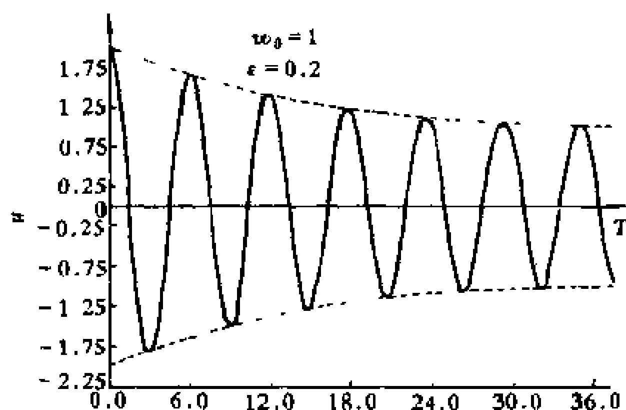


图 6-2 方程(1)的数值解与近似结果(11)的比较

计算与思考

1. 当一个简谐作用力作用于带干摩擦的系统时，其运动方程具有如下形式

$$
m\ddot{x} + k_1 x = d + F\cos\omega t + k_2 x^3
$$

式中 $d=\begin{cases}-1, \dot{u}>0\\ 1, \dot{u}<0\end{cases}$

(1)首先把此方程化为无量纲形式，然后对于接近共振的 ω 值，用平均法求其一阶近似解

(2)讨论力幅对响应的影响。画出共振曲线，讨论是否出现跳跃现象。

2. 试用平均法求解无阻尼自治系统的 Duffing 方程。

$$\ddot{x}+x=\quad \varepsilon x^3$$

3. 用平均法求 van der Pol 方程的一阶近似解。

$$\ddot{x}+\varepsilon(x^2-1)\dot{x}+x=0$$

4. 设振动系统由下述方程控制，

$$\ddot{x}+F(x)=\varepsilon f_1(\dot{x})+\varepsilon E\sin\nu t$$

其中 $\varepsilon f_1(\dot{x})$ 为对应曲线段的粘性阻尼力，$F(x)$ 是 x 的奇函数，表示非线性恢复力与位移的关系

$$F(x)=\begin{cases}k'x & -x_0\leqslant x\leqslant x_0\\ k''x+(k'-k'')x_0 & x_0\leqslant x\leqslant\infty\\ k''x-(k'-k'')x_0 & -\infty<x\leqslant -x_0\end{cases}$$

用平均法求一次近似解。

5. 方程 $\ddot{x}+\omega_0^2x+\varepsilon(\mu_2 x\ \dot{x}\ -2\mu_1\dot{x})+\varepsilon ax^3=0$，$\mu_1,\mu_2>0$ 试用平均法求一阶近似解。

6. 试用平均法求

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=\varepsilon[(1-x^2)\dot{x}+F\cos\nu t]$$

周期为 $\frac{2\pi}{\nu}$ 的一阶周期解。式中 $\omega_0=\nu+\varepsilon\Delta$，$\Delta$ 为解谐参数。

7. 摩擦力 $F_d=(C_1-C_2x^2)\dot{x}$ 作用在质量为 m、弹性系数为 k 的线性系统上，试用平均法分析该振动系统的运动情况。

8. 用平均法分析 Rayleigh 振荡器的运动情况。控制方程为

$$\ddot{u}+\omega_0^2u=\varepsilon(\dot{u}-u^3)$$

9. 用平均法分析带粘性阻尼和非线性恢复力的正阻尼系统

$$\ddot{\theta}+2\mu\dot{\theta}+\omega_0^2\sin\theta=0$$

10. 用平均法分析 $\ddot{u}+\omega_0^2u+\varepsilon(\mu_2\dot{u}|u|-\mu_0\mathrm{sgn}\dot{u})=0$ 的运动状况，$\mu_0,\mu_2>0$，

11. 用平均法求下式的近似解

$$\ddot{x}+\omega_0^2x+\varepsilon(\mu_0\mathrm{sgn}\dot{x}+2\mu_1\dot{x})=0\quad \mu_0,\mu_1>0$$

第七章 单自由度非线性系统的渐近法

7.1 渐近法的基本思想

渐近法,又称三级数法或 KBM 法,是由前苏联学者克雷洛夫、包哥留波夫和米特罗波列斯基提出的[1,8]。该法将方程的解及振幅和相位角表示为小参数 ε 的幂级数函数,然后用分离变量法求出这些幂级数函数的未知系数。

若有以下非线性微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=\varepsilon f_k\left(x,\frac{dx}{dt}\right)$$

或

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=\varepsilon f_M\left(\frac{d^2x}{dt^2},\frac{dx}{dt}\right) \tag{7-1}$$

式中 ε——小参数。

如果 εf_k 或 εf_M 可以写成

$$\varepsilon f_k=\varepsilon F_k+k_cx,\quad \varepsilon f_M=\varepsilon F_M+M_c\ddot{x}$$

式中 k_c 和 M_c——线性平均刚度(或等效刚度)和线性平均质量(或等效质量);

$F_k\left(x,\frac{dx}{dt}\right)$, $F_M\left(\frac{d^2x}{dt^2},\frac{dx}{dt}\right)$, $f_k\left(x,\frac{dx}{dt}\right)$ 和 $f_M\left(\frac{d^2x}{dt^2},\frac{dx}{dt}\right)$ — 均为非线性函数,则由于在上式中从非线性函数中取出了线性平均刚度或平均质量,使得后面的解析近似更接近于实际。

若方程中不存在非线性作用力,即 $\varepsilon=0$,该方程有以下简谐解

$$x=a\cos\psi \tag{7-2}$$

式中 振幅 a 为常数,相位角 ψ 是时间 t 的线性函数,$\frac{da}{dt}=0$, $\frac{d\psi}{dt}=\omega_0$, $\psi=\omega_0t+\vartheta$, a 和 ϑ 可由初始条件确定。

若系统中存在非线性作用力,即 $\varepsilon\neq0$,那么

1. 振幅 a 将随时间 t 变化;
2. 相位角 ψ 不是时间 t 的线性函数;
3. 方程的解中含有高次谐波成分,有时还含有次谐波。

考虑到非线性作用力的影响,我们假设方程的解有以下形式

$$x=a\cos\psi+\varepsilon u_1(a,\psi)+\varepsilon^2u_2(a,\psi)+\cdots \tag{7-3}$$

式中的 a 和 ψ 是时间 t 的周期函数,$u_1(a,\psi)$, $u_2(a,\psi)$, …等是 ε 的幂级数函数。

我们可以做如下的假设,非线性系统的当量阻尼比 δ_e 和当量固有频率 ω_e 可表示为小参数 ε 幂级数的形式,即

$$\delta_e(a)=\varepsilon\delta_1(a)+\varepsilon^2\delta_2(a)+\cdots$$

$$\omega_e(a)=\omega_0+\varepsilon\omega_1(a)+\varepsilon^2\omega_2(a)+\cdots$$

当 $\delta_1, \delta_2, \omega_1, \omega_2$ 求得后，便可求出 a 和 ψ。a 和 ψ 满足以下方程①

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = [\varepsilon\delta_1(a) + \varepsilon^2\delta_2(a) + \varepsilon^3\cdots]a$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \omega_0 + \varepsilon\omega_1(a) + \varepsilon^2\omega_2(a) + \cdots \tag{7-4}$$

现在的问题是如何确定 $u_1, u_2, \delta_1, \delta_2, \omega_1, \omega_2\cdots$。渐近法的适用性不是取决于以上两个方程的收敛性，而是决定于当 $\varepsilon\to 0$ 时方程解的渐近性，只要 ε 的值很小，对于充分长的时间间隔，以上两个表达式能给出足够精确的解。

如何确定 u_1, u_2？由于 u_1, u_2 中不含一次谐波，因此 u_1, u_2 应满足下式

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} u_1(a,\psi)\cos\psi\mathrm{d}\psi = 0 \qquad &\int_0^{2\pi} u_2(a,\psi)\cos\psi\mathrm{d}\psi = 0 \\ &\int_0^{2\pi} u_1(a,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi = 0 \qquad &\int_0^{2\pi} u_2(a,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi = 0 \end{aligned} \tag{7-5}$$

这时，我们可以将非线性作用力展为富氏级数，代入方程式(7-1)、消去一次谐波项，便可求出 u_1, u_2 的表达式。u_1, u_2 可以理解为不含基波的高频振荡部分。

方程解的精确度是由求解过程的阶次决定的。

一次近似解如下式所示，须计算出 δ_1, ω_1，即

$$x = a\cos\psi$$

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \varepsilon\delta_1(a)a$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \omega_0 + \varepsilon\omega_1(a)$$

而改进的一次近似解，须再计算 u_1 的值，但 $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$，$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$ 仍按上式计算，即

$$x = a\cos\psi + \varepsilon u_1(a,\psi)$$

二次近似解须计算出 δ_2, ω_2，而 x 按上式计算，即

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = [\varepsilon\delta_1(a) + \varepsilon^2\delta_2(a)]a$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \omega_0 + \varepsilon\omega_1(a) + \varepsilon^2\omega_2(a)$$

而改进的二次近似解则须再考虑 u_2，即

$$x = a\cos\psi + \varepsilon u_1(a,\psi) + \varepsilon^2 u_2(a,\psi)$$

按照以上方法，可以求得不同精度要求的非线性方程的解。

7.2 含非线性弹性力与阻尼力的自治系统的渐近法

假设有以下非线性方程，其中非线性函数中含有非线性的弹性力和阻尼力

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = \varepsilon\cdot F\left(x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) + k_c x = \varepsilon\cdot f\left(x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) \tag{7-6}$$

① 在有些文献中，将 $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$ 和 $\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$ 表示为以下形式 $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \cdots$，$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \omega_0 + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \cdots$，为了使物理概念更为清晰，本书将 $\varepsilon A_1(a)$ 表示为 $\varepsilon\delta_1(a)a$，$\varepsilon^2 A_2(a)$ 表示为 $\varepsilon^2\delta_2(a)a$，$\varepsilon B_1(a)$ 表示为 $\varepsilon\omega_1(a)$，$\varepsilon^2 B_2(a)$ 表示为 $\varepsilon^2\omega_2(a)$。

上式中从非线性函数中提出平均刚度或等效刚度，可使固有频率更接近于实际。当 $\varepsilon=0$，方程有以下简谐解

$$x=a\cos\psi=a\cos(\omega_0 t+\vartheta)$$

式中的振幅 a 和相位角 ϑ 是由初始条件决定的常数。当 $\varepsilon\neq0$ 时，它们 1 将随时间 t 而变化，若设方程解的形式如式(7 3)，则 a 和 ϑ 可由下式表示

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=[\varepsilon\delta_1(a)+\varepsilon^2\delta_2(a)+\varepsilon^3\cdots]a$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}=\omega_0+\varepsilon\omega_1(a)+\varepsilon^2\omega_2(a)+\cdots \tag{7-7}$$

现在我们来讨论 $\delta_1(a),\delta_2(a),\omega_1(a),\omega_2(a),u_1(a,\psi),u_2(a,\psi)$的求法。首先求出

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\left(\cos\psi+\varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial a}+\varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial a}+\cdots\right)+\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\left(-a\sin\psi+\varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial\psi}+\varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial\psi}+\cdots\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=&\frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}t^2}\left(\cos\psi+\varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial a}+\varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial a}+\cdots\right)+\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}t^2}\left(-a\sin\psi+\varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial\psi}+\varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial\psi}+\cdots\right)\\&+\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2\left(\varepsilon\frac{\partial^2u_1}{\partial a^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2u_2}{\partial a^2}+\cdots\right)+2\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\left(-\sin\psi+\varepsilon\frac{\partial^2u_1}{\partial a\partial\psi}+\varepsilon^2\frac{\partial^2u_2}{\partial a\partial\psi}+\cdots\right)\\&+\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right)^2\left(-a\cos\psi+\varepsilon\frac{\partial^2u_1}{\partial\psi^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2u_2}{\partial\psi^2}+\cdots\right)\end{aligned} \tag{7-8}$$

由上式可求出

$$\frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}t^2}=\left(\varepsilon\frac{\mathrm{d}(\delta_1a)}{\mathrm{d}a}+\varepsilon^2\frac{\mathrm{d}(\delta_2a)}{\mathrm{d}a}+\cdots\right)(\varepsilon\delta_1+\varepsilon^2\delta_2+\cdots)a=\varepsilon^2\delta_1a\frac{\mathrm{d}(\delta_1a)}{\mathrm{d}a}+\varepsilon^3\cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}t^2}=\left(\varepsilon\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}a}+\varepsilon^2\frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}a}+\cdots\right)(\varepsilon\delta_1+\varepsilon^2\delta_2+\cdots)a=\varepsilon^2\delta_1a\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}a}+\varepsilon^3\cdots$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2=(\varepsilon\delta_1+\varepsilon^2\delta_2+\cdots)^2a^2=\varepsilon^2\delta_1^2a^2+\varepsilon^3\cdots \tag{7 9}$$

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}=(\varepsilon\delta_1+\varepsilon^2\delta_2+\cdots)a(\omega_0+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\varepsilon^3\cdots)=\varepsilon\delta_1\omega_0a+\varepsilon^2(\delta_2\omega_0a+\delta_1\omega_1a)\cdots$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right)^2=(\omega_0+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\cdots)^2=\omega_0^2+\varepsilon2\omega_0\omega_1+\varepsilon^2(\omega_1^2+2\omega_0\omega_2)+\varepsilon^3\cdots$$

将上式代入方程的左边，可求得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2x=&\varepsilon\left[-2\omega_0\delta_1a\sin\psi-2\omega_0a\omega_1\cos\psi+\omega_0^2\frac{\partial^2u_1}{\partial\psi^2}+\omega_0^2u_1\right]\\&+\varepsilon^2\left[\left(\delta_2\frac{\mathrm{d}(\delta_1a)}{\mathrm{d}a}-\omega_1^2-2\omega_0\omega_2\right)a\cos\psi\right.\\&-\left(2\omega_0\delta_2+2\delta_1\omega_1+\delta_1\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}a}a\right)a\sin\psi\\&\left.+2\omega_0\delta_1a\frac{\partial^2u_1}{\partial a\partial\psi}+2\omega_0\omega_1\frac{\partial^2u_1}{\partial\psi^2}+\omega_0^2\frac{\partial^2u_2}{\partial\psi^2}+\omega_0^2u_2\right]\cdots\end{aligned} \tag{7-10}$$

方程的右端可按泰勒级数展开

$$\begin{aligned}\varepsilon\cdot f\left(x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)=&\varepsilon\cdot f(a\cos\psi,-a\omega_0\sin\psi)+\varepsilon^2\left[u_1f_x'(a\cos\psi,-a\omega_0\sin\psi)\right.\\&\left.+\left(\delta_1a\cos\psi-a\omega_1\sin\psi+\omega_0\frac{\partial u_1}{\partial\psi}\right)f_{\dot{x}}'(a\cos\psi,-a\omega_0\sin\psi)\right]+\varepsilon^3\cdots\end{aligned} \tag{7-11}$$

式中 f_x' 和 $f_{\dot{x}}'$ 是函数 f 关于位移 x 和速度 $\dot{x}$ 的一阶导数。

令方程两边 ε 的同一阶的系数相等，可得以下方程

$$
\begin{aligned}
&\omega_0^2\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2}+u_1\right)=f_0(a,\psi)+2\omega_0\delta_1 a\sin\psi+2\omega_0\omega_1 a\cos\psi \\
&\omega_0^2\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial\psi^2}+u_2\right)=f_1(a,\psi)+2\omega_0\delta_2 a\sin\psi+2\omega_0\omega_2 a\cos\psi \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{7-12}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
f_0(a,\psi)&=f(a\cos\psi,-a\omega_0\sin\psi) \\
f_1(a,\psi)&=uf_x'(a\cos\psi,-a\omega_0\sin\psi) \\
&\quad+\left(\delta_1 a\cos\psi-a\omega_1\sin\psi+\omega_0\frac{\partial u_1}{\partial\psi}\right)f_{\dot{x}}'(a\cos\psi,-a\omega_0\sin\psi) \\
&\quad+\left(\omega_1^2-\delta_1\frac{\mathrm{d}(\delta_1 a)}{\mathrm{d}a}\right)a\cos\psi+\left(2\omega_1+a\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}a}\right)\delta_1 a\sin\psi \\
&\quad-2\omega_0\delta_1 a\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\partial\psi}-2\omega_0\omega_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2}
\end{aligned}
\tag{7-13}
$$

由方程(7-12)的第一式看出，当 δ_1 和 ω_1 已知时，u_1 可以由该式求出。首先我们将非线性函数 $f_0(a,\psi)$ 展为富氏级数并将 $u_1(a,\psi)$ 表示为与此相似的形式

$$
\begin{aligned}
f_0(a,\psi)&=g_0^{(0)}(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[g_n^{(0)}(a)\cos n\psi+h_n^{(0)}(a)\sin n\psi\right] \\
u_1(a,\psi)&=v_0^{(0)}(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[v_n^{(0)}(a)\cos n\psi+w_n^{(0)}(a)\sin n\psi\right]
\end{aligned}
\tag{7-14}
$$

将上式代入方程(7-12)的第一式，可得

$$
\begin{aligned}
&\omega_0^2 v_0^{(0)}(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\omega_0^2(1-n^2)\left[v_n^{(0)}(a)\cos n\psi+w_n^{(0)}(a)\sin n\psi\right] \\
&=g_0^{(0)}(a)+\left[g_1^{(0)}(a)+2\omega_0 a\omega_1\right]\cos\psi+\left[h_1^{(0)}(a)+2\omega_0\delta_1 a\right]\sin\psi \\
&\quad+\sum_{n=2}^{\infty}\left[g_n^{(0)}(a)\cos n\psi+h_n^{(0)}(a)\sin n\psi\right]
\end{aligned}
\tag{7-15}
$$

令上式中各谐波项的系数相等，可得

$$
\begin{aligned}
&g_1^{(0)}(a)+2\omega_0 a\omega_1=0 \qquad h_1^{(0)}(a)+2\omega_0\delta_1 a=0 \\
&v_0^{(0)}(a)=\frac{g_0^{(0)}(a)}{\omega_0^2} \qquad v_n^{(0)}(a)=\frac{g_n^{(0)}(a)}{\omega_0^2(1-n^2)} \\
&w_n^{(0)}(a)=\frac{h_n^{(0)}(a)}{\omega_0^2(1-n^2)} \qquad (n=2,3,\cdots)
\end{aligned}
\tag{7-16}
$$

因为在 u_1 中无一次谐波，所以有

$$
u_1(a,\psi)=\frac{g_0^{(0)}(a)}{\omega_0^2}+\frac{1}{\omega_0^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left[g_n^{(0)}(a)\cos n\psi+h_n^{(0)}(a)\sin n\psi\right]}{1-n^2}
$$

再由式(7-16)，得

$$
\begin{aligned}
\delta_1(a)&=\frac{h_1^{(0)}(a)}{2\omega_0 a}=-\frac{1}{2\pi\omega_0 a}\int_0^{2\pi}f(a\cos\psi,-a\omega\sin\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi \\
\omega_1(a)&=-\frac{g_1^{(0)}(a)}{2a\omega_0}=-\frac{1}{2\pi a\omega_0}\int_0^{2\pi}f(a\cos\psi,-a\omega\sin\psi)\cos\psi\mathrm{d}\psi
\end{aligned}
\tag{7-17}
$$

由式(7-3),(7-7)和上式可求出方程的第一近似解和改进的第一近似解。相似地,若将式(7-13)的非线性函数 $f_1(a,\psi)$展为富氏级数,$u_2(a,\psi)$可按式(7-12)的第二式求出。

$$f_1(a,\psi)=g_0^{(1)}(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[g_n^{(1)}(a)\cos n\psi+h_n^{(1)}(a)\sin n\psi\right]$$

$$u_2(a,\psi)=-\frac{g_0^{(1)}(a)}{\omega_0^2}+\frac{1}{\omega_0^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left[g_n^{(1)}(a)\cos n\psi+h_n^{(1)}(a)\sin n\psi\right]}{1-n^2} \tag{7-18}$$

$$g_1^{(1)}(a)+2\omega_0 a\omega_2=0 \qquad h_1^{(1)}(a)+2\omega_0\delta_2 a=0$$

因为 $g_1^{(1)}(a)$,$h_1^{(1)}(a)$可由上式第一式求出,所以按照上式中的第二式可求出 δ_2 和 ω_2。由此可求出方程的第二近似解和改进的第二近似解。

【例 7.2.1】 有如下式所示的非线性微分方程式

$$M\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+M\frac{g}{l}\sin x=0$$

当 x 的值很小时,上式可写为

$$M\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+M\frac{g}{l}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)=0$$

按照式(7-1)

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2x=\varepsilon\cdot f\left(x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$\omega_0^2=\frac{g}{l}$$

$$\varepsilon f\left(x\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)=-\frac{c}{M}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{g}{6l}x^3$$

方程的第一近似解为

$$x=a\cos\psi$$

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=-\varepsilon\delta_1(a)\cdot a=-\frac{1}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi}\varepsilon f(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}=\omega_0+\varepsilon\omega_1=\omega_0-\frac{1}{2\pi a\omega_0}\int_0^{2\pi}\varepsilon f(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\cos\psi\mathrm{d}\psi=\omega_0\left(1-\frac{a^2}{16}\right)$$

积分后得

$$\delta_1(a)=\frac{c}{2M} \qquad \omega_1=-\frac{a^2}{16}\omega_0$$

取 $t=0$ 时 a 的初始值为a_0,则由上式中的第一式可求出

$$a=a_0\mathrm{e}^{-\delta_1 t}$$

按第二式可求出

$$\psi=\omega_0\left[t+\frac{a_0^2}{32\delta_1}(\mathrm{e}^{-2\delta_1 t}-1)\right]+\beta$$

式中 β——相位角的初始值。

将求得的振幅和相位代入位移公式,得

$$x=a_0\mathrm{e}^{-\delta_1 t}\cos\left\{\omega_0\left[t+\frac{a_0^2}{32\delta_1}(\mathrm{e}^{-2\delta_1 t}-1)\right]+\beta\right\}$$

由上式看出,本例中的振动是衰减的。且频率是振幅的函数,随着振幅减小,频率将增加。

7.3 含非线性惯性力的自治系统的渐近法

若有以下非线性微分方程式

$$M_0\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+k_0x=\varepsilon\cdot\left[F_M\cdot\left(\frac{d^2x}{dt^2},\frac{dx}{dt}\right)+F_k\left(x,\frac{dx}{dt}\right)\right]$$

$$=\varepsilon\cdot\left[f_M\cdot\left(\frac{d^2x}{dt^2},\frac{dx}{dt}\right)+f_k\left(x,\frac{dx}{dt}\right)\right]+M_c\frac{d^2x}{dt^2}+k_cx \tag{7-19}$$

式中 ε —小参数；

$f_M\left(\frac{d^2x}{dt^2},\frac{dx}{dt}\right)$ 和 $f_k\left(x,\frac{dx}{dt}\right)$——非线性作用力；

$\omega_0^2=\frac{k_0}{M_0}$——派生系统的固有频率。

若方程中不存在非线性作用力，即 $\varepsilon=0$，该方程有以下简谐解

$$x=a\cos\psi$$

考虑到非线性作用力的影响，我们假设方程的解有以下形式

$$x=a\cos\psi+\varepsilon u_1(a,\psi)+\varepsilon^2u_2(a,\psi)+\cdots \tag{7-20}$$

我们可先假设非线性系统的当量质量 M_e、当量阻力系数 c_e 和当量刚度 k_e 可表示为小参数 ε 幂级数的形式，即

$$M_e=M_0+\varepsilon\cdot M_1+\varepsilon^2M_2+\cdots$$

$$c_e=\varepsilon\cdot c_1+\varepsilon^2c_2+\cdots$$

$$k_e=k+\varepsilon\cdot k_1+\varepsilon^2k_2+\cdots$$

由此可求出当量阻尼比 δ_e 和当量固有频率 ω_e，即

$$\delta_e=\varepsilon\delta_1+\varepsilon^2\delta_2+\cdots=\frac{c_e}{2M_e}=\frac{\varepsilon c_1+\varepsilon^2c_2+\cdots}{2(M_0+\varepsilon M_1+\varepsilon^2M_2+\cdots)}$$

$$=\varepsilon\frac{c_1}{2M_0}\left[1+\varepsilon\left(\frac{c_2}{c_1}-\frac{M_1}{M_0}\right)\right]+\cdots=\varepsilon\delta_1+\varepsilon^2\delta_1(\Delta\delta_2-\Delta M_1)$$

式中 $\delta_1=\frac{c_1}{2M_0}$ $\delta_2=\delta_1(\Delta\delta_2-\Delta M_1)$ $\Delta\delta_2=\frac{c_2}{c_1}$ $\Delta M_1=\frac{M_1}{M_0}$

$$\omega_e^2=\frac{k_0+\varepsilon k_1+\varepsilon^2k_2+\cdots}{M_0+\varepsilon M_1+\varepsilon^2M_2+\cdots}=\frac{k_0}{M_0}\left[1+\varepsilon\left(\frac{k_1}{k_0}-\frac{M_1}{M_0}\right)+\varepsilon^2\left(\frac{k_2}{k_0}-\frac{M_2}{M_0}-\frac{k_1}{k_0}\cdot\frac{M_1}{M_0}\right)\right]+\cdots$$

$$=(\omega_0+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\cdots)^2=\omega_0^2+2\varepsilon\omega_0\omega_1+\varepsilon^2(\omega_1^2+2\omega_0\omega_2)+\cdots$$

式中 $\omega_0=\left(\frac{k_0}{M_0}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\omega_1=\frac{1}{2}\omega_0\left(\frac{k_1}{k_0}-\frac{M_1}{M_0}\right)=\frac{1}{2}\omega_0(\Delta k_1-\Delta M_1)$$

$$\omega_2=\frac{1}{2}\omega_0\left[\left(\frac{k_2}{k_0}-\frac{M_2}{M_0}-\frac{k_1M_1}{k_0M_0}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{k_1}{k_0}-\frac{M_1}{M_0}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\omega\left[\Delta k_2-\Delta M_2-\Delta k_1\Delta M_1-\frac{1}{4}(\Delta k_1-\Delta M_1)^2\right] \tag{7-21}$$

将当量固有频率 ω_e 按二项式展开，并略去 ε^2 阶以上各项后有

$$\omega_e=\left(\frac{k_0}{M_0}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{1+\varepsilon\frac{1}{2}\left(\frac{k_1}{k_0}-\frac{M_1}{M_0}\right)-\varepsilon^2\frac{1}{2}\left[\left(\frac{k_2}{k_0}-\frac{M_2}{M_0}-\frac{k_1M_1}{k_0M_0}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{k_1}{k_0}-\frac{M_1}{M_0}\right)^2\right]\right\}+\cdots$$

从而

$$\frac{da}{dt}=-\delta_e a=-\varepsilon\delta_1 a-\varepsilon^2\delta_1\left(\frac{c_2}{c_1}-\frac{M_1}{M_0}\right)a+\cdots$$
$$\frac{d\psi}{dt}=\omega_0+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\cdots \tag{7-22}$$

将上式代入方程(7-19)的左边,可求得

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=&\varepsilon\left[-2\omega_0\delta_1 a\sin\psi-2\omega_0 a\omega_1\cos\psi+\omega_0^2\frac{\partial^2u_1}{\partial\psi^2}+\omega_0^2u_1\right]\\&+\varepsilon^2\left[\left(\delta_2\frac{d(\delta_1a)}{da}-\omega_1^2-2\omega_0\omega_2\right)a\cos\psi-\left(2\omega_0\delta_2+2\delta_1\omega_1+\delta_1a\frac{d\omega_1}{da}\right)a\sin\psi\right.\\&\left.+2\omega_0\delta_1a\frac{\partial^2u_1}{\partial a\partial\psi}+2\omega_0\omega_1\frac{\partial^2u_1}{\partial\psi^2}+\omega_0^2\frac{\partial^2u_2}{\partial\psi^2}+\omega_0^2u_2\right]+\cdots\end{aligned}\tag{7-23}$$

方程(7-19)的右端可表示为小参数幂级数的形式,并可按富氏级数展开

$$\begin{aligned}\varepsilon\cdot f_M\left(\frac{d^2x}{dt^2},\frac{dx}{dt}\right)=&\varepsilon\cdot f_{M_0}(-a\omega_0^2\cos\psi,-a\omega_0\sin\psi)+\varepsilon^2\left[f_{M_1}(-a\omega_0^2\cos\psi+\varepsilon\ddot{u}_1,-a\omega_0\sin\psi+\varepsilon\dot{u}_1)\right.\\&\left.-f_{M_0}(-a\omega_0^2\cos\psi,-a\omega_0\sin\psi)\right]+\cdots\\\varepsilon\cdot f_k\left(x,\frac{dx}{dt}\right)=&\varepsilon\cdot f_{k_0}(a\cos\psi,-a\omega_0\sin\psi)+\varepsilon^2[f_{k_1}(a\cos\psi+u_1,-a\omega_0\sin\psi+\varepsilon\dot{u}_1)\\&-f_{k_0}(a\cos\psi,-a\omega_0\sin\psi)]\end{aligned}\tag{7-24}$$

令方程两边同一阶的系数相等,可得以下方程

$$\begin{aligned}\omega_0^2\left(\frac{\partial^2u_1}{\partial\psi^2}+u_1\right)&=\frac{1}{M_0}[f_{M_0}(a,\psi)+f_{k_0}(a,\psi)]+2\omega_0\delta_1a\sin\psi+2\omega_0\omega_1a\cos\psi\\\omega_0^2\left(\frac{\partial^2u_2}{\partial\psi^2}+u_2\right)&=\frac{1}{M_0}[f_{M_1}(a,\psi)+f_{k_1}(a,\psi)]+2\omega_0\delta_2a\sin\psi+2\omega_0\omega_2a\cos\psi\end{aligned}\tag{7-25}$$

式中

$$\begin{aligned}f_{M_0}(a,\psi)&=f_{M_0}(-a\omega^2\cos\psi,-a\omega\sin\psi)=f_{M_0}\\f_{k_0}(a,\psi)&=f_{k_0}(a\cos\psi,-a\omega_0\sin\psi)=f_{k_0}\\f_{M_1}(a,\psi)&=\varepsilon\left[f_{M1}(-a\omega_0^2\cos\psi+\varepsilon\ddot{u}_1,-a\omega_0\sin\psi+\varepsilon\dot{u}_1)-f_{M_0}(-a\omega_0^2\cos\psi,-a\omega_0\sin\psi)\right]\\&=\varepsilon(f_{M_1}-f_{M_0})\\f_{k_1}(a,\psi)&=\varepsilon\left[f_{k1}(a\cos\psi+\varepsilon u_1,-a\omega_0\sin\psi+\varepsilon\dot{u}_1)-f_{k_0}(a\cos\psi,-a\omega_0\sin\psi)\right]\\&=\varepsilon(f_{k_1}-f_{k_0})\end{aligned}\tag{7-26}$$

由方程(7-12)的第一式看出,当 δ_1 和 ω_1 已知时,u_1 可以由该式求出。首先我们将非线性函数 $f(a,\psi)$ 展为富氏级数并将 $u_1(a,\psi)$ 表示为相似的形式,即

$$f_{M,i+1}^{(i)}(a,\psi)=g_{M0}^{(i)}(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[g_{Mn}^{(i)}(a)\cos n\psi+h_{Mn}^{(i)}(a)\sin n\psi\right]$$

$$f_{k,i+1}^{(i)}(a,\psi)=g_{k0}^{(i)}(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[g_{kn}^{(i)}(a)\cos n\psi+h_{kn}^{(i)}(a)\sin n\psi\right] \tag{7-27}$$

$$u_{i+1}(a,\psi)=v_0^{(i)}(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[v_n^{(i)}(a)\cos n\psi+w_n^{(i)}(a)\sin n\psi\right]$$

式中之富氏系数可按下式求得

$$g_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a,\psi)\mathrm{d}\psi$$

$$g_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(a,\psi)\cos n\psi\mathrm{d}\psi \tag{7-28}$$

$$h_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(a,\psi)\sin n\psi\mathrm{d}\psi$$

将上式代入方程(7-25)，可得

$$\omega_0^2v_0^{(i)}(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\omega_0^2(1-n^2)\left[v_n^{(i)}(a)\cos n\psi+w_n^{(i)}(a)\sin n\psi\right]$$
$$=\frac{1}{M}\Big\{g_{M0}^{(i)}(a)+g_{k0}^{(i)}+\left[g_{M1}^{(i)}(a)+g_{k1}^{(i)}(a)+2M\omega_0a\omega_{i+1}\right]\cos\psi$$
$$+\left[h_{M1}^{(i)}(a)+h_{k1}^{(i)}(a)+2M\omega_0\delta_{i+1}a\right]\sin\psi$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left(g_{Mn}^{(i)}(a)+g_{kn}^{(i)}\right)\cos n\psi+\left(h_{Mn}^{(i)}(a)+h_{kn}^{(i)}(a)\right)\sin n\psi\right]\Big\}\quad(i=0,1) \tag{7-29}$$

令上式中相同谐波项的系数相等可得

$$g_{M1}^{(i)}(a)+g_{k1}^{(i)}(a)+2M_0\omega_0a\omega_j=0\qquad h_{M1}^{(i)}(a)+h_{k11}^{(i)}+2M_0\omega_0\delta_ja=0$$

$$v_0^{(i)}(a)=\frac{g_{M0}^{(i)}(a)+g_{k0}^{(i)}(a)}{M_0\omega_0^2}\qquad v_n^{(i)}(a)=\frac{g_{Mn}^{(i)}(a)+g_{kn}^{(i)}(a)}{M\omega_0^2(1-n^2)} \tag{7-30}$$

$$w_n^{(i)}(a)=\frac{h_{Mn}^{(i)}(a)+h_{kn}^{(i)}(a)}{M_0\omega_0^2(1-n^2)}\qquad(n=2,3,\cdots)\qquad(i=0,1)$$

因为在 u_1,u_2 中无一次谐波，所以有

$$u_{i+1}(a,\psi)=\frac{g_{M0}^{(i)}(a)+g_{k0}^{(i)}}{M_0\omega_0^2}$$
$$+\frac{1}{M_0\omega_0^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left[\left(g_{Mn}^{(i)}(a)+g_{kn}^{(i)}(a)\right)\cos n\psi+\left(h_{Mn}^{(i)}(a)+h_{kn}^{(i)}(a)\right)\sin n\psi\right]}{1-n^2}$$

$$\delta_{i+1}(a)a=-\frac{h_{M_i}^{(i)}(a)+h_{k_i}^{(i)}(a)}{2M_0\omega_0}=\frac{1}{2\pi M_0\omega_0}\int_0^{2\pi}\left(f_{M_i}(a,\psi)+f_{k_i}(a,\psi)\right)\sin\psi\mathrm{d}\psi$$

$$\omega_{i+1}(a)=-\frac{g_{M_i}^{(i)}(a)+g_{k_i}^{(i)}(a)}{2M_0a\omega_0}=-\frac{1}{2\pi M_0a\omega_0}\int_0^{2\pi}\left(f_{M_i}(a,\psi)+f_{k_i}(a,\psi)\right)\cos\psi\mathrm{d}\psi$$

(7-31)

$$M_{e,i+1}=\frac{g_{M1}^{(i)}a}{2\omega_0^2a}=\frac{1}{2\pi\omega_0^2a}\int_0^{2\pi}f_{M_i}(a,\psi)\cos\psi\mathrm{d}\psi$$

$$k_{e,i+1}=\frac{g_{k1}^{(i)}(a)}{2a}=-\frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}f_{ki}(a,\psi)\cos\psi\mathrm{d}\psi$$

$$\tau_{e,i+1}=\frac{h_{M1}^{(i)}+h_{k1}^{(i)}}{2\omega_0 a}=-\frac{1}{2\pi\omega_0 a}\int_0^{2\pi}\left[f_{Mi}(a,\psi)+f_{ki}(a,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi\right]\quad(i=0,1)$$

由上式可求出方程的一次近似解和改进的一次近似解以及二次近似解和改进的二次近似解。

7.4 含非线性弹性力和阻尼力的非自治系统的渐近法

非自治非线性系统的微分方程式可表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2x=\varepsilon\cdot f\left(\nu t,x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$$

式中 ν ——周期为 2π 的周期作用力的频率；

ε——小参数。

$f\left(\nu t,x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$ 是周期为 2π 的非线性函数，因而可以展为富氏级数。它包含频率为 $n\nu+m\omega_0$ 形式为 $\sin(n\nu+m\omega_0)t$ 和 $\cos(n\nu+m\omega_0)t$（其中 n 和 m 为正整数）的各次谐波，当这些组合频率中的任意一个频率与固有频率接近相等时，将会引起振幅很大的振动，即出现所谓共振。

当满足以下条件时，将出现组合共振

$$n\nu+m\omega_0\approx\omega_0,\quad \nu\approx\frac{p}{q}\omega_0 \tag{7-32}$$

式中的 p 和 q 为互质的整数。

当 $n\nu+m\omega_0\neq\omega_0$ 且 $|(n\nu+m\omega_0)-\omega_0|$ 有较大的值时，为非共振情况。

因此在周期干扰力作用下，可以出现共振与非共振情况。而共振情况有以下几种：

1. $p=q=1$，即 $\omega_0=\nu$ 时，这种情况称为主共振。

2. $q=1$，即 $\nu\approx p\omega_0$，或 $\omega_0\approx\frac{1}{p}\nu$ 时，强迫振动频率 ν 大于固有频率 ω_0，这种共振称为次谐波共振或亚谐共振；

3. $p=1$，即 $\omega_0\approx q\nu$ 时，强迫振动频率 ν 小于固有频率 ω_0，这种共振称为超谐共振；

4. $p\neq q\neq1$，即 $\nu\approx\frac{p}{q}\omega_0$，$\omega_0\approx\frac{q}{p}\nu$ 时，这种共振称为分数共振。

下面首先讨论非共振情况。

7.4.1 非共振情况

属于非共振情况的条件是

$$n\nu+m\omega_0\neq\omega_0 \tag{7-33}$$

这就是说，组合振动的频率与系统的固有频率相差较大。

由于非线性作用力 $f\left(\nu t,x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$ 的存在，在振动系统中将出现量级较小的各次谐波，所以方程的解具有以下形式

$$x=a\cos\psi+\varepsilon u_1(a,\psi,\nu t)+\varepsilon^2u_2(a,\psi,\nu t)+\cdots \tag{7-34}$$

式中的 $u_1(a,\psi,\nu t)$, $u_2(a,\psi,\nu t)$是振幅 a, 相位角 ψ 及激振频率 ν 的函数, 振幅 a 和相位角 ψ 对时间 t 的导数不是常数, 可由以下方程式求出

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \left[\varepsilon\delta_1(a) + \varepsilon^2\delta_2(a) + \varepsilon^3\cdots\right]a \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_0 + \varepsilon\omega_1(a) + \varepsilon^2\omega_2(a) + \varepsilon^3\cdots \end{aligned} \tag{7-35}$$

现在进一步求以下几个未知函数 $\delta_1(a)$, $\delta_2(a)$, $\omega_1(a)$, $\omega_2(a)$, $u_1(a,\psi,\nu t)$, $u_2(a,\psi,\nu t)$。原方程的左边可表示为

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \varepsilon&\left[-2\omega_0\delta_1 a\sin\psi - 2\omega_0 a\omega_1\cos\psi + \omega_0^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} + 2\omega_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi\partial t} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \omega_0^2 u_1\right] \\ &+ \varepsilon^2\left[\left(\delta_1\frac{d(\delta_1 a)}{da} - \omega_1^2 - 2\omega_0\omega_2\right)a\cos\psi - \left(2\omega_0\delta_2 + 2\delta_1\omega_1 + \delta_1\frac{d\omega_1}{da}a\right)a\sin\psi\right. \\ &+ 2\omega_0\delta_1 a\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\partial\psi} + 2\omega_0\omega_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} + \omega_0^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial\psi^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + 2\omega_0\frac{\partial^2 u_2}{\partial\psi\partial t} + \omega_0^2 u_2 \\ &\left.+ 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\partial t}\delta_1 a + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi\partial t}\omega_1\right] + \cdots \end{aligned} \tag{7-36}$$

而方程的右端可按泰勒级数展开, 利用式(7-8)和式(7-1)可求得

$$\begin{aligned} \varepsilon\cdot f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right) = \varepsilon\cdot f(\nu t, a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi) + \varepsilon^2&\left[u_1 f_x'(\nu t, a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi)\right. \\ &+ \left(\delta_1 a\cos\psi - a\omega_1\sin\psi + \omega_0\frac{\partial u_1}{\partial\psi} + \frac{\partial u_1}{\partial t}\right) \\ &\left.\times f_{\dot{x}}'(\nu t, a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi)\right] + \varepsilon^3\cdots \end{aligned} \tag{7-37}$$

式中 f_x'和 $f_{\dot{x}}'$是函数 f 关于位移 x 和速度 $\dot{x}$ 的一阶导数。

令方程两边同一阶的系数相等, 可得以下方程

$$\begin{aligned} &\omega_0^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} + 2\omega_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi\partial t} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \omega_0^2 u_1 = f_0(\nu t, a, \psi) + 2\omega_0\delta_1 a\sin\psi + 2a\omega_0\omega_1\cos\psi \\ &\omega_0^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial\psi^2} + 2\omega_0\frac{\partial^2 u_2}{\partial\psi\partial t} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \omega_0^2 u_2 = f_1(\nu t, a, \psi) + 2\omega_0\delta_2 a\sin\psi + 2a\omega_0\omega_2\cos\psi \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{7-38}$$

式中

$$\begin{aligned} f_0(\nu t, a, \psi) &= f(\nu t, a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi) \\ f_1(\nu t, a, \psi) &= u_1 f_x'(\nu t, a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi) \\ &+ \left(\delta_1 a\cos\psi - a\omega_1\sin\psi + \omega_0\frac{\partial u_1}{\partial\psi} + \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)f_{\dot{x}}'(\nu t, a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi) \\ &+ \left(\omega_1^2 - \delta_1\frac{d(\delta_1 a)}{da}\right)a\cos\psi + \left(2\delta_1\omega_1 + \delta_1\frac{d\omega_1}{da}a\right)a\sin\psi \\ &- 2\omega_0\delta_1 a\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\partial\psi} - 2\omega_0\omega_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} - 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\partial t}\delta_1 a - 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi\partial t}\omega_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{7-39}$$

$f_k(a,\psi,\nu t)$是两个变量 ψ 和 νt 且其周期为 2π 的周期函数, 它和振幅 a 有关。现将 $f_0(a,\psi,\nu t)$展为指数形式的富氏级数

$$f_0(a,\psi,\nu t) = \sum_n\sum_m f_{nm}^{(0)}(a)e^{i(n\nu t + m\psi)} \tag{7-40}$$

式中

$$f_{nm}^{(0)}(a)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta,a\cos\psi,-a\omega_0\sin\psi)\mathrm{e}^{-i(n\theta+m\psi)}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\psi,\ \theta=\nu t \tag{7-41}$$

按照三角函数形式展开的富氏级数为

$$f_0(a,\psi,\nu t)=\sum_{n,m=0}^{\infty}\sum\left[f_{nm\,A}^{(0)}\cos(n\theta+m\psi)+f_{nm\,B}^{(0)}\sin(n\theta+m\psi)\right] \tag{7-42}$$

式中

$$\begin{aligned}f_{nm\,A}^{(0)}&=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi,\theta)\cos(n\theta+m\psi)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\psi\\ f_{nm\,B}^{(0)}&=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi,\theta)\sin(n\theta+m\psi)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\psi\end{aligned} \tag{7-43}$$

$u_1(a,\psi,\nu t)$可表示为与展开式(7-40)相似的形式

$$\begin{aligned}u_1(a,\psi,\nu t)&=\sum_n\sum_m\bar{f}_{nm}(a)\mathrm{e}^{i(n\nu t+m\psi)}\\&=\sum_n\sum_m\left[\bar{f}_{nm\,A}(a)\cos(n\nu t+m\psi)+\bar{f}_{nm\,B}(a)\sin(n\nu t+m\psi)\right]\end{aligned} \tag{7-44}$$

将 $f_0(a,\psi,\nu t)$和 $u_1(a,\psi,\nu t)$代入方程(7-38)第一式，可求得

$$\begin{aligned}&\sum_n\sum_m\left[\omega_0^2-(n\nu+m\omega_0)^2\right]\bar{f}_{nm}(a)\mathrm{e}^{i(n\nu t+m\psi)}\\&=2a\omega_0\omega_1\cos\psi+2\omega_0\delta_1 a\sin\psi+\sum_n\sum_m f_{nm}^{(0)}(a)\mathrm{e}^{i(n\nu t+m\psi)}\end{aligned} \tag{7-45}$$

在 $u_1(a,\psi,\nu t)$的方程中不存在一次谐波，即 $\sin\psi$ 和 $\cos\psi$ 的系数为零，所以有

$$2a\omega_0\omega_1\cos\psi+2\omega_0\delta_1 a\sin\psi=-\sum_{\substack{n\\ [\omega_0^2-(n\nu+m\omega_0)^2=0]}}\sum_m f_{nm}^{(0)}(a)\mathrm{e}^{i(n\nu t+m\psi)} \tag{7-46}$$

在上述条件下，由式(7-45)可求得

$$\bar{f}_{nm}(a)=\frac{f_{nm}^{(0)}(a)}{\omega_0^2-(n\nu+m\omega_0)^2},\quad n^2+(m^2-1)^2\neq 0 \tag{7-47}$$

由式(7-46)，可求出

$$\begin{aligned}\delta_1(a)&=\frac{-1}{4\pi^2\omega_0 a}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi,\theta)\sin\psi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\psi\\ \omega_1(a)&=\frac{-1}{4\pi^2\omega_0 a}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi,\theta)\cos\psi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\psi\end{aligned} \tag{7-48}$$

将式(7-41)和求得的 $\bar{f}_{nm}(a)$代入式(7-44)，便可求出以下表示式

$$\begin{aligned}u_1(a,\psi,\nu t)&=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{\substack{n\\ [n^2-(m^2-1)^2\neq 0]}}\sum_m\frac{\mathrm{e}^{i(n\nu t+m\psi)}}{\omega_0^2-(n\nu+m\omega_0)^2}\\&\quad\times\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi,\theta)\mathrm{e}^{-i(n\theta+m\psi)}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\psi\\&=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{n\\ [n^2+(m^2-1)^2\neq 0]}}\sum_m\left[\frac{\cos(n\theta+m\psi)}{\omega_0^2-(n\nu+m\omega_0)^2}\right.\\&\quad\times\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi,\theta)\cos(n\theta+m\psi)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\psi\end{aligned}$$

$$+\frac{\sin(n\theta+m\psi)}{\omega^2-(n\nu+m\omega)^2}\times\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi,\theta)\sin(n\theta+m\psi)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\psi\Big]$$

(7 49)

用相似的方法可以求出

$$\delta_2(a)=-\frac{1}{2\omega_0 a}\left(2\delta_1\omega_1+\delta_1\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}a}a\right)a\quad\frac{1}{4\pi^2\omega_0 a}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[f_x'(\theta,a\cos\psi,\quad a\omega_0\sin\psi)u_1$$

$$+f_{\dot{x}}'(\theta,a\cos\psi,-a\omega_0\sin\psi)\times\left(\delta_1 a\cos\psi-a\omega_1\sin\psi+\omega_0\frac{\partial u_1}{\partial\psi}+\nu\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\right)\Big]\sin\psi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\psi$$

$$\omega_2(a)=\frac{1}{2\omega_0}\left(-\omega_1^2+\delta_1\frac{\mathrm{d}(\delta_1 a)}{\mathrm{d}a}\right)$$

$$-\frac{1}{4\pi^2\omega_0 a}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[f_x'(\theta,a\cos\psi,-a\omega_0\sin\psi)u_1+f_{\dot{x}}'(\theta,a\cos\psi,\quad a\omega_0\sin\psi)$$

$$\times\left(\delta_1 a\cos\psi-a\omega_1\sin\psi+\omega_0\frac{\partial u_1}{\partial\psi}+\nu\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\right)\Big]\cos\psi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\psi \tag{7 50}$$

由此我们可求出

$$u_2(a,\psi,\nu t)=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{\substack{n\\ [n^2\ (m^2\ 1)^2\neq 0]}}\sum_{m}\frac{\mathrm{e}^{i(n\nu t+m\psi)}}{\omega_0^2-(n\nu+m\omega_0)^2}$$

$$\times\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f_1(a,\psi,\theta)\mathrm{e}^{-i(n\theta+m\psi)}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\psi \tag{7-51}$$

在非共振情况下稳态解具有以下特点

$$\psi=\omega(a)t+\vartheta\qquad a,\vartheta\ \ \mathrm{const} \tag{7-52}$$

振动位移 x 包含三个部分：由固有频率 $\omega(a)$ 引起的振动，由频率 $n\nu(n=1,2,\cdots)$ 引起的强迫振动和由组合频率 $n\nu+m\omega_0(n,m\quad 1,2,\cdots)$ 引起的组合振动。只有当强迫振动频率 ν 接近于组合频率 $n\nu+m\omega_0(n,m-1,2,\cdots)$，即出现组合共振时，组合振动才会有较大的振幅，通常情况下，组合振动的振幅很小。

由于阻尼的存在，当自由振动衰减为零，即 $a-0$ 时，方程的解成为

$$x=\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta}{\omega_0^2-n^2\nu^2} \tag{7-53}$$

式中

$$\begin{aligned}A_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_0(\theta,0,0)\cos n\theta\mathrm{d}\theta\\ B_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_0(\theta,0,0)\sin n\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{7-54}$$

7.4.2 共振情况

所谓共振，是指频率 $\frac{p}{q}\nu$（p,q 是两个互质的正整数）接近于固有频率 ω_0 时的振动。我们利用符号 $\varepsilon\Delta$ 表示两个频率之差，即

$$\omega_0^2=\left(\frac{p}{q}\nu\right)^2+\varepsilon\Delta \tag{7-55}$$

所以有

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\left(\frac{p}{q}\nu\right)^2x=\varepsilon\left[f\left(\nu t,x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)-\Delta x\right] \tag{7-56}$$

可设方程的解

$$x=a\cos\psi+\varepsilon u_1(a,\psi,\nu t)+\varepsilon^2u_2(a,\psi,\nu t)+\cdots \tag{7-57}$$

取

$$\vartheta=\psi-\frac{p}{q}\nu t \tag{7-58}$$

式中的 $u_1(a,\psi,\nu t)$，$u_2(a,\psi,\nu t)$是振幅 a，相位角 ψ 及激振频率 ν 的函数，振幅 a 和相位角 ψ 对时间 t 的导数不是常数，可由以下方程式求出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}&=\left[\varepsilon\delta_1(a,\vartheta)+\varepsilon^2\delta_2(a,\vartheta)+\varepsilon^3\cdots\right]a\\ \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}&=\omega_0+\varepsilon\omega_1(a,\vartheta)+\varepsilon^2\omega_2(a,\vartheta)+\varepsilon^3\cdots\end{aligned} \tag{7-59}$$

因为 $\psi=\frac{p}{q}\nu t+\vartheta$，所以式(7-57)可写成

$$x=a\cos\left(\frac{p}{q}\nu t+\vartheta\right)+\varepsilon u_1\left(a,\nu t,\frac{p}{q}\nu t+\vartheta\right)+\varepsilon^2u_2\left(a,\nu t,\frac{p}{q}\nu t+\vartheta\right)+\cdots \tag{7-60}$$

式中

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}&=\left[\varepsilon\delta_1(a,\vartheta)+\varepsilon^2\delta_2(a,\vartheta)+\varepsilon^3\cdots\right]a\\ \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}&=\varepsilon\omega_1(a,\vartheta)+\varepsilon^2\omega_2(a,\vartheta)+\varepsilon^3\cdots\end{aligned} \tag{7-61}$$

现在我们来求几个未知函数。将方程的左边表示为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\left(\frac{p}{q}\nu\right)^2x=&\ \varepsilon\left[-2\frac{p}{q}\nu\delta_1a\sin\psi-2\frac{p}{q}\nu a\omega_1\cos\psi+\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}+\left(\frac{p}{q}\nu\right)^2u_1\right]\\ &+\varepsilon^2\left[\left(\delta_1\frac{\mathrm{d}(\delta_1a)}{\mathrm{d}a}+\omega_1\frac{\partial(\delta_1a)}{\partial\vartheta}-\omega_1^2-2\frac{p}{q}\nu\omega_2\right)a\cos\psi\right.\\ &-\left(2\frac{p}{q}\nu\delta_2+2\delta_1\omega_1+\delta_1\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}a}a+\omega_1\frac{\partial\omega_1}{\partial\vartheta}\right)a\sin\psi\\ &\left.+\frac{\partial^2u_2}{\partial t^2}+\left(\frac{p}{q}\nu\right)^2u_2+2\frac{\partial^2u_1}{\partial a\partial t}\delta_1a+2\frac{\partial^2u_1}{\partial\vartheta\partial t}\omega_1\right]+\cdots\end{aligned} \tag{7-62}$$

方程的右端可按泰勒级数展开，利用式(7-8)和式(7-1)可求得

$$\begin{aligned}\varepsilon\cdot\left[f\left(\nu t,x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)-\Delta x\right]=&\ \varepsilon\left[-\Delta a\cos\psi+f_0\left(\nu t,a\cos\psi,-a\frac{p}{q}\nu\sin\psi\right)\right]\\ &+\varepsilon^2\left[u_1f_x'\left(\nu t,a\cos\psi,-a\frac{p}{q}\nu\sin\psi\right)\right.\\ &+\left(\delta_1a\cos\psi-a\omega_1\sin\psi+\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\\ &\left.\times f_{\dot{x}}'\left(\nu t,a\cos\psi,-a\frac{p}{q}\nu\sin\psi\right)-\Delta u_1\right]+\varepsilon^3\cdots\end{aligned} \tag{7-63}$$

式中 f_x'和 $f_{\dot{x}}'$是函数 f 关于位移 x 和速度 $\dot{x}$ 的一阶导数。

令方程两边同一阶的系数相等，可得以下方程

$$\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}+\left(\frac{p}{q}\nu\right)^2u_1=f_0(a,\nu t,\psi)+2\frac{p}{q}\nu\delta_1a\sin\psi+2\frac{p}{q}\nu\omega_1a\cos\psi-\Delta a\cos\psi$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left(\frac{p}{q}\nu\right)^2 u_2 = {} & f_1(a,\nu t,\psi) + \left(2\frac{p}{q}\nu\delta_2 + a\frac{\partial\omega_1}{\partial a}\delta_1 + \frac{\partial\omega_1}{\partial\vartheta}\omega_1 + 2\delta_1\omega_1\right)a\sin\psi \\
& + \left(2\frac{p}{q}\nu\omega_2 - \frac{\partial(\delta_1 a)}{\partial a}\delta_1 - \frac{\partial(\delta_1 a)}{a\partial\vartheta}\omega_1 + \omega_1^2\right)a\cos\psi
\end{aligned}
\tag{7-64}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
f_0(a,\nu t,\psi) = {} & f\left(\nu t, a\cos\psi, -a\frac{p}{q}\nu\sin\psi\right) \\
f_1(a,\nu t,\psi) = {} & u_1 f_x'\left(\nu t, a\cos\psi, -a\frac{p}{q}\nu\sin\psi\right) \\
& + \left(\delta_1 a\cos\psi - a\omega_1\sin\psi + \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)f_{x'}'\left(\nu t, a\cos\psi, -a\frac{p}{q}\nu\sin\psi\right) \\
& - 2\delta_1 a\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\partial t} - 2\omega_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial\vartheta\partial t} - \Delta u_1
\end{aligned}
\tag{7-65}
$$

由方程(7-64)的第一式看出,因为 δ_1 和 ω_1 可以消去,u_1 便可以由该式求出。先设

$$
\begin{aligned}
f_0\left(a,\nu t,\frac{p}{q}\nu + \vartheta\right) &= \sum_n\sum_m f_{nm}^{(0)}(a)\mathrm{e}^{i\left(n\nu t + m\left(\frac{p}{q}\nu t+\vartheta\right)\right)} \\
u_1\left(a,\nu t,\frac{p}{q}\nu + \vartheta\right) &= \sum_n\sum_m u_{nm}^{(1)}(a)\mathrm{e}^{i\left(n\nu t + m\left(\frac{p}{q}\nu t+\vartheta\right)\right)}
\end{aligned}
\tag{7-66}
$$

式中

$$
f_{nm}^{(0)}(a) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi)\mathrm{e}^{-i(n\theta+m\psi)}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\psi,\ \theta = \nu t \tag{7-67}
$$

将 $f_0(a,\psi,\nu t)$ 和 $u_1(a,\psi,\nu t)$ 代入方程(7-64)第一式,可求得

$$
\begin{aligned}
& \sum_n\sum_m\left[\left(\frac{p}{q}\nu\right)^2 - \left(n\nu + m\frac{p}{q}\nu\right)^2\right]u_{nm}^{(1)}(a)\mathrm{e}^{i\left(n\nu t+m\left(\frac{p}{q}\nu t+\vartheta\right)\right)} \\
= {} & 2a\frac{p}{q}\nu\omega_1\cos\left(\frac{p}{q}\nu t + \vartheta\right) + 2\frac{p}{q}\nu\delta_1 a\sin\left(\frac{p}{q}\nu t + \vartheta\right) \\
& + \sum_n\sum_m f_{nm}^{(0)}(a)\mathrm{e}^{i\left(n\nu t+m\left(\frac{p}{q}\nu t+\vartheta\right)\right)} - \Delta a\cos\left(\frac{p}{q}\nu t + \vartheta\right)
\end{aligned}
\tag{7-68}
$$

在上述条件下,由式(7-68)可求得

$$
u_{nm}^{(1)}(a) = \frac{f_{nm}^{(0)}(a)}{\left(\frac{p}{q}\nu\right)^2 - \left(n\nu + m\frac{p}{q}\nu\right)^2}\qquad nq + (m\pm1)p \neq 0 \tag{7-69}
$$

而 $u_1(a,\psi,\nu t)$ 可按下式计算

$$
u_1\left(a,\nu t,\frac{p}{q}\nu t + \vartheta\right) = \sum_{\substack{n\\ [nq+(m\pm1)p\neq0]}}\sum_m \frac{f_{nm}^{(0)}(a)\mathrm{e}^{i\left[n\nu t+m\frac{p}{q}\nu t+\vartheta\right]}}{\left(\frac{p}{q}\nu\right)^2 - \left(n\nu + m\frac{p}{q}\nu\right)^2} \tag{7-70}
$$

$u_1(a,\psi,\nu t)$ 的方程中不存在一次谐波,即 $\sin\psi$ 和 $\cos\psi$ 的系数为零,所以有

$$
\begin{aligned}
& \left(2a\frac{p}{q}\nu\omega_1 - \Delta a\right)\cos\left(\frac{p}{q}\nu t + \vartheta\right) + 2\frac{p}{q}\nu\delta_1 a\sin\left(\frac{p}{q}\nu t + \vartheta\right) \\
= {} & -\sum_{\substack{n\\ [nq+(m\pm1)p=0]}}\sum_m f_{nm}^{(0)}(a)\mathrm{e}^{i\left(n\nu t+m\frac{p}{q}\nu t+\vartheta\right)}
\end{aligned}
\tag{7-71}
$$

式中

$$
\mathrm{e}^{i\left[\left(n+m\frac{p}{q}\right)\nu t+m\vartheta\right]} = \mathrm{e}^{i\left[(nq+mp)\frac{\nu}{q}t+m\vartheta\right]} = \mathrm{e}^{i\left[\mp\frac{p}{q}\nu t+m\vartheta\right]} = \mathrm{e}^{i\left[\mp\left(\frac{p}{q}\nu t+\vartheta\right)+(m\pm1)\vartheta\right]}
$$

$$= \left[\cos\left(\frac{p}{q}\nu t + \vartheta\right) \mp i\sin\left(\frac{p}{q}\nu t + \vartheta\right)\right]e^{i(m+1)\vartheta} \tag{7-72}$$

由式(7-71)，可求出

$$\delta_1(a, \vartheta) = \frac{-q}{4\pi^2 \nu a p}\sum_{\sigma} e^{iq\sigma\vartheta}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(a, \psi, \theta)e^{-iq\sigma\vartheta'}\sin\psi d\theta d\psi$$

$$\omega_1(a, \vartheta) = \frac{\Delta}{2}\frac{q}{p\nu} - \frac{q}{4\pi^2 a p\nu}\sum_{\sigma} e^{iq\sigma\vartheta}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(a, \psi, \theta c)e^{-iq\sigma\vartheta'}\cos\psi d\theta d\psi \tag{7-73}$$

$$\left(\vartheta' = \psi - \frac{p}{q}\theta, q\sigma = m \pm 1\right)$$

我们可以把式(7 61)表示为

$$\frac{da}{dt} = \frac{-\varepsilon q}{4\pi^2 \nu p}\sum_{\sigma} e^{iq\sigma\vartheta}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(a, \psi, \theta)e^{-iq\sigma\vartheta}\sin\psi d\theta d\psi$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_0 - \frac{q}{p}\nu \quad \frac{\varepsilon q}{4\pi^2 a p\nu}\sum_{\sigma} e^{iq\sigma\vartheta}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(a, \psi, \theta)e^{-iq\sigma\vartheta'}\cos\psi d\theta d\psi \tag{7-74}$$

$$\left(\vartheta' = \psi - \frac{p}{q}\theta\right)$$

用相似的方法可以求出

$$\begin{aligned}\delta_2(a) = &-\frac{1}{2\omega_0 a}\left(2\delta_1 a\omega_1 + \delta_1\frac{d\omega_1}{da}a^2\right)\\ &-\frac{1}{4\pi^2\omega_0 a}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[f_x{}'(\theta, a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi)u_1\\ &+ f_{\dot{x}}{}'(\theta, a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi)\\ &\times\left(\delta_1 a\cos\psi - a\omega_1\sin\psi + \omega_0\frac{\partial u_1}{\partial\psi} - \nu\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\right)\Big]\sin\psi d\theta d\psi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_2(a) = &\frac{1}{2\omega_0}\left(-\omega_1^2 + \delta_1\frac{d(\delta_1 a)}{da}\right)\\ &-\frac{1}{4\pi^2\omega_0 a}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[f_x{}'(\theta t, a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi)u_1\\ &+ f_{\dot{x}}{}'(\nu t, a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi)\\ &\times\left(\delta_1 a\cos\psi - a\omega_1\sin\psi + \omega_0\frac{\partial u_1}{\partial\psi} + \nu\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\right)\Big]\cos\psi d\theta d\psi\end{aligned} \tag{7-75}$$

由此可求出

$$\begin{aligned}u_2(a, \psi, \nu t) = &\frac{1}{4\pi^2}\sum_{\substack{n \quad m\\ [n^2 \ (m^2-1)^2 \neq 0]}}\sum\frac{e^{i(n\theta + m\psi)}}{\omega_0^2 - (n\nu + m\omega_0)^2}\\ &\times\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(a, \psi, \theta)e^{-i(n\theta + m\psi)}d\theta d\psi\end{aligned} \tag{7-76}$$

7.5 含非线性惯性力的非自治系统的渐近法

若有以下非线性微分方程式

$$M_0\frac{d^2x}{dt^2} + k_0 x = \varepsilon\cdot f_M\left(\nu t, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{dx}{dt}, x\right) \tag{7-77}$$

式中所有符号与以前相同。

下面分非共振与共振两种情况进行讨论。

7.5.1 非共振情况

非共振情况满足以下条件

$$n\nu + m\omega_0 \neq \omega_0 \tag{7-78}$$

假设方程的解有以下形式

$$x = a\cos\psi + \varepsilon u_1(\nu t, a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(\nu t, a, \psi) + \cdots \tag{7-79}$$

式中的 a 和 ψ 是时间 t 的周期函数，$u_1(\nu t, a, \psi)$, $u_2(\nu t, a, \psi)$, …, 为 ε 的幂级数函数。

设

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = -[\varepsilon\delta_1 a + \varepsilon^2\delta_2]a = -[\varepsilon\delta_{e1}a - \varepsilon^2\delta_{e1}(\Delta c_2 - \Delta M_2)]a + \cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \omega_0 + \varepsilon\omega_{e1} + \varepsilon^2\omega_{e2} + \cdots$$

$$\omega_0 = \left(\frac{k_0}{M_0}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \omega_1 = \frac{1}{2}\omega_0(\Delta k_1 \quad \Delta M_1)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\omega_0\left[(\Delta k_2 - \Delta M_2 - \Delta k_1\Delta M_1) - \frac{1}{4}(\Delta k_1 \quad \Delta M_1)^2\right]$$

$$\Delta\delta_1 = \frac{c_1}{2M_0} \qquad \Delta\delta_2 = \Delta c_2 = \frac{c_2}{c_1}$$

$$\Delta k_1 = \frac{k_1}{k_0} \quad \Delta M_1 = \frac{M_1}{M_0} \quad \Delta k_2 = \frac{k_2}{k_0} \quad \Delta M_2 = \frac{M_2}{M_0} \tag{7-80}$$

将上式代入方程的左边可求得

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = \varepsilon\Big[&-2\omega_0\delta_1 a\sin\psi - 2\omega_0 a\omega_1\cos\psi + \omega_0^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} + 2\omega_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi\partial t} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \omega_0^2 u_1\Big] \\
&+ \varepsilon^2\Big[\Big(\delta_1\frac{\mathrm{d}(\delta_1 a)}{\mathrm{d}a} - \omega_1^2 - 2\omega_0 a\omega_2\Big)\cos\psi - \Big(2\omega_0\delta_2 + 2\delta_1\omega_1 + \delta_1\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}a}a\Big)a\sin\psi \\
&+ 2\omega_0\delta_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\partial\psi} + 2\omega_0\omega_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} + \omega_0^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial\psi^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + 2\omega_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi\partial t} + \omega_0^2 u_2 \\
&+ 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\partial t}\delta_1 a + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi\partial t}\omega_1\Big] + \cdots
\end{aligned} \tag{7-81}$$

方程的右端可表示为小参数幂级数的形式，并可按富氏级数展开

$$\begin{aligned}
\varepsilon\cdot f_M\left(\theta, \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, x\right) = \varepsilon\cdot f_{M0}(\theta, -a\omega_0^2\cos\psi, \quad a\omega_0\sin\psi, a\cos\psi) \\
+ \varepsilon^2\big[f_{M1}(\theta, -a\omega_0^2\cos\psi + \varepsilon\ddot{u}_1, -a\omega_0\sin\psi, a\cos\psi) \\
- f_{M0}(\theta, -a\omega_0^2\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi, a\cos\psi)\big] + \cdots
\end{aligned}$$

令方程两边同一阶的系数相等，可得以下方程

$$\begin{aligned}
&\omega_0^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} + 2\omega_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi\partial t} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + u_1 = \frac{1}{M_0}\big[f_0(\theta, a, \psi) + 2\omega_0\delta_1 a\sin\psi + 2\omega_0\omega_1 a\cos\psi\big] \\
&\omega_0^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial\psi^2} + 2\omega_0\frac{\partial^2 u_2}{\partial\psi\partial t} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + u_2 = \frac{1}{M_0}\big[f_1(\theta, a, \psi) + 2\omega_0\delta_2 a\sin\psi + 2\omega_0\omega_2 a\cos\psi\big] \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{7-82}$$

式中

$$f_{M0}(a,\psi) = f_{M0}(-a\omega_0^2\cos\psi,\ -a\omega_0\sin\psi, a\cos\psi) = f_{M0}$$

$$f_{M1}(a,\psi) = \varepsilon\Big[f_{M1}(-a\omega_0^2\cos\psi + \varepsilon\dot{u}_1,\ -a\omega_0\sin\psi + \varepsilon u_1, a\cos\psi + u_1)$$

$$-f_{M0}(-a\omega_0^2\cos\psi,\ -a\omega_0\sin\psi, a\cos\psi)\Big] = e(f_{M1} - f_{M0}) \tag{7-83}$$

由方程(7-82)的第一式看出,当 δ_1 和 ω_1 已知时,u_1 可以由该式求出。首先我们将非线性函数 $f(\theta,a,\psi)$展为富氏级数并将 $u_1(\theta,a,\psi)$, $u_2(\theta,a,\psi)$也表示为相似的形式,即

$$
\begin{aligned}
f_0^{(0)}(\theta,a,\psi) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left[g_{mn}^{(0)}(a)\cos(m\psi+n\theta) + h_{mn}^{(0)}(a)\sin(m\psi+n\theta)\right] \\
f_1^{(1)}(\theta,a,\psi) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left[g_{mn}^{(1)}(a)\cos(m\psi+n\theta) + h_{mn}^{(1)}(a)\sin(m\psi+n\theta)\right] \\
u_1(\theta,a,\psi) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left[v_{mn}^{(0)}(a)\cos(m\psi+n\theta) + w_{mn}^{(0)}(a)\sin(m\psi+n\theta)\right] \\
u_2(\theta,a,\psi) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left[v_{mn}^{(1)}(a)\cos(m\psi+n\theta) + w_{mn}^{(1)}(a)\sin(m\psi+n\theta)\right]
\end{aligned}
\tag{7-84}
$$

式中之富氏系数可按下式计算

$$
\begin{aligned}
g_{mn} &= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,a,\psi)\cos(m\psi+n\theta)\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\theta \\
h_{mn} &= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,a,\psi)\sin(m\psi+n\theta)\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
\tag{7-85}
$$

将上式代入方程(7-82)的第一式,可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\omega_0^2-(m\omega_0+n\nu)^2\right]\left[v_0^{(0)}(a)\cos(m\psi+n\theta)+w_0^{(0)}(a)\sin(m\psi+n\theta)\right] \\
&= \frac{1}{M_0}\Big\{\left[g_{m1}^{(0)}(a)+2\omega_0 a\omega_1\right]\cos\psi+\left[h_{m1}^{(0)}(a)+2\omega_0\delta_1 a\right]\sin\psi \\
&\quad+\sum_{n\neq0}\sum_{m\neq\pm1}\left[g_{mn}^{(0)}(a)\cos(m\psi+n\theta)\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\theta+h_{mn}^{(0)}(a)\sin(m\psi+n\theta)\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\theta\right]
\end{aligned}
\tag{7-86}
$$

令上式中同一阶的系数相等,可得

$$g_1^{(0)}(a)+2M_0\omega_0 a\omega_1=0 \qquad h_1^{(0)}(a)+2M_0\omega_0\delta_1 a=0$$

$$v_n^{(0)}(a)=\frac{g_{mn}^{(0)}(a)}{M_0[\omega_0^2-(m\omega+n\nu)^2]} \qquad w_n^{(0)}(a)=\frac{h_{mn}^{(0)}(a)}{M_0(\omega_0^2-(m\omega+n\nu)^2)}$$

$$(n=2,3,\cdots) \tag{7-87}$$

因为在 u_1 中无一次谐波,所以有

$$
\begin{aligned}
u_1(a,\psi) &= \frac{1}{M_0[\omega_0^2-(m\omega+n\nu)^2]} \\
&\quad\times\sum_{m}\sum_{n}{}_{[n^2+(m^2-1)^2\neq0]}\left[g_{mn}^{(0)}(a)\cos(m\psi+n\theta)+h_{mn}^{(0)}(a)\sin(m\psi+n\theta)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_1(a) &= -\frac{h_1^{(0)}(a)}{2M_0\omega_0 a} = -\frac{1}{4\pi^2M_0\omega_0 a}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_{01}(\theta,a,\psi)\sin\psi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\psi \\
\omega_1(a) &= -\frac{g_1^{(0)}(a)}{2M_0 a\omega_0} = -\frac{1}{4\pi^2M_0 a\omega_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta,a,\psi)\cos\psi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\psi \\
&-M_1+\frac{k_1}{\omega_0^2} = -\frac{g_1^{(0)}(a)}{2\omega_0^2 a} = -\frac{1}{4\pi^2\omega_0^2 a}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(\theta,a,\psi)\cos\psi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\psi
\end{aligned}
\tag{7-88}
$$

$$c_1 = \frac{h_{m1}^{(0)}}{2\omega_0 a} = -\frac{1}{4\pi^2\omega_0 a}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}[f_0(\theta, a, \psi)]\sin\psi \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\psi$$

由上式可求出方程的第一阶近似解和改进的第一阶近似解。用相似的方法,可求出方程的第二阶近似解和改进的第二阶近似解。

7.5.2 共振情况

共振情况,即频率 $\frac{p}{q}\nu$(p, q 是两个互质的正整数)接近于固有频率 ω_0 时的振动。我们利用符号 $\varepsilon\Delta$ 表示两个频率之差,即

$$\omega_0^2 = \left(\frac{p}{q}\nu\right)^2 + \varepsilon\Delta \tag{7-89}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{p}{q}\nu\right)^2 x = \varepsilon\frac{1}{M_0}\left[f\left(\nu t, \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, x\right) - \Delta x\right] \tag{7-90}$$

因为 $\psi = \frac{p}{q}\nu t + \vartheta$,所以方程的解可写为

$$x = a\cos\left(\frac{p}{q}\nu t + \vartheta\right) + \varepsilon u_1\left(a, \nu t, \frac{p}{q}\nu t + \vartheta\right) + \varepsilon^2 u_2\left(a, \nu t, \frac{p}{q}\nu t + \vartheta\right) + \cdots \tag{7-91}$$

式中

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= [\varepsilon\delta_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2\delta_2(a, \vartheta) + \varepsilon^3\cdots]a \\ \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} &= \varepsilon\omega_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2\omega_2(a, \vartheta) + \varepsilon^3\cdots\end{aligned} \tag{7-92}$$

可得以下方程

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(\frac{p}{q}\nu\right)^2 u_1 = \frac{1}{M_0}f_0(a, \nu t, \psi) + 2\frac{p}{q}\nu\delta_1 a\sin\psi + 2\frac{p}{q}\nu\omega_1\cos\psi - \Delta a\cos\psi \tag{7-93}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left(\frac{p}{q}\nu\right)^2 u_2 = &\frac{1}{M_0}f_1(a, \nu t, \psi) + \left(2\frac{p}{q}\nu\delta_2 + a\frac{\partial\omega_1}{\partial a}\delta_1 + \frac{\partial\omega_1}{\partial\vartheta}\omega_1\right)a\sin\psi \\ &+ \left(2\frac{p}{q}\nu\omega_2 - \frac{\partial(\delta_1 a)}{\partial a}\delta_1 - \frac{\partial(\delta_1 a)}{\partial\vartheta}\omega_1 + \omega_1^2\right)a\cos\psi\end{aligned} \tag{7-94}$$

式中

$$\begin{aligned}f_0(a, \nu t, \psi) &= f_M\left(\theta, -a\left(\frac{p}{q}\nu\right)^2\cos\psi, -a\frac{p}{q}\nu\sin\psi, a\cos\psi\right) \\ f_1(a, \nu t, \psi) &= f_M\left(\theta, -a\left(\frac{p}{q}\nu\right)^2\cos\psi + \ddot{u}_1, -a\frac{p}{q}\nu\sin\psi + \dot{u}_1, a\cos\psi + u_1\right) \\ &\quad - f_M\left(\theta, -a\left(\frac{p}{q}\nu\right)^2\cos\psi, -a\frac{p}{q}\nu\sin\psi, a\cos\psi\right)\end{aligned} \tag{7-95}$$

因 δ_1 和 ω_1 可以从式中消去,u_1 便可以由该式求出。先设

$$\begin{aligned}f_0\left(a, \nu t, \frac{p}{q}\nu + \vartheta\right) &= \sum_n\sum_m f_{nm}^{(0)}(a)\mathrm{e}^{i\left(n\nu t + m\left(\frac{p}{q}\nu t + \vartheta\right)\right)} \\ u_1\left(a, \nu t, \frac{p}{q}\nu + \vartheta\right) &= \sum_n\sum_m u_{nm}^{(1)}(a)\mathrm{e}^{i\left(n\nu t + m\left(\frac{p}{q}\nu t + \vartheta\right)\right)}\end{aligned} \tag{7-96}$$

式中

$$f_{nm}^{(0)}(a)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta,a\omega^2\cos\psi,-a\omega\sin\psi,a\cos\psi)e^{-i(n\nu t+m\psi)}d\theta d\psi \tag{7-97}$$

在上述条件下，由式(7-93)可求得

$$u_{nm}^{(0)}(a)=\frac{f_{(nm)}^{(0)}(a)}{\left(\frac{p}{q}\nu\right)^2-\left(n\nu+m\frac{p}{q}\nu\right)^2},\quad nq+(m+1)p\neq 0 \tag{7-98}$$

而 $u_1(a,\psi,\nu t)$ 可按下式计算

$$u_1\left(a,\nu t,\frac{p}{q}\nu t+\vartheta\right)=\sum_{\substack{n\\ [nq+(m\pm1)p\neq0]}}\sum_{m}\frac{f_{nm}^{(0)}(a)e^{i\left[n\nu t+m\frac{p}{q}\nu t+\vartheta\right]}}{\left(\frac{p}{q}\nu\right)^2-\left(n\nu+m\frac{p}{q}\nu\right)^2} \tag{7-99}$$

$u_1(a,\psi,\nu t)$ 的方程中不存在一次谐波，即 $\sin\psi$ 和 $\cos\psi$ 的系数为零，所以有

$$\begin{aligned}&\left[2a\frac{p}{q}\nu\omega_1-\Delta a\right]\cos\left(\frac{p}{q}\nu t+\vartheta\right)+2\frac{p}{q}\nu\delta_1 a\sin\left(\frac{p}{q}\nu t+\vartheta\right)\\&=-\sum_{\substack{n\\ [nq+(m\pm1)p=0]}}\sum_{m}f_{nm}^{(0)}(a)e^{i\left(n\nu t+m\frac{p}{q}\nu t+\vartheta\right)}\end{aligned} \tag{7-100}$$

由式(7-93)可求出

$$\begin{aligned}\delta_1(a,\vartheta)&=\frac{-q}{4\pi^2 a\nu p}\sum_{\sigma}e^{iq\sigma\vartheta}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi,\theta)e^{-iq\sigma\vartheta}\sin\psi d\theta d\psi\\ \omega_1(a,\vartheta)&=\frac{\Delta}{2}\frac{q}{p\nu}-\frac{q}{4\pi^2 ap\nu}\sum_{\sigma}e^{iq\sigma\vartheta}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi,\theta)e^{-iq\sigma\vartheta}\cos\psi d\theta d\psi\end{aligned} \tag{7-101}$$

$$\left(\vartheta'=\psi-\frac{p}{q}\theta\right)$$

我们可以把式(7-55)表示为

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=\frac{-q}{4\pi^2\nu p}\sum_{\sigma}e^{iq\sigma\vartheta}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi,\theta)e^{-iq\sigma\vartheta}\sin\psi d\theta d\psi\\ \frac{d\vartheta}{dt}&=\omega_0-\frac{p}{p}\nu-\frac{q}{\pi^2 ap\nu}\sum_{\sigma}e^{iq\sigma\vartheta}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi,\theta)e^{-iq\sigma\vartheta'}\cos\psi d\theta d\psi\end{aligned} \tag{7-102}$$

$$\left(\vartheta'=\psi-\frac{p}{q}\theta\right)$$

用相似的方法可以求出方程的第二次近似解。

7.6 简谐力作用下的非线性系统的渐近法

在工程中我们可以找到许多具有简谐干扰力作用的非线性系统。这种系统的运动微分方程式可表示为

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2}+kx_1=\varepsilon F\left(x_1,\frac{dx_1}{dt}\right)+\varepsilon F_0\sin\nu t$$

为加速对实际工况的逼近，非线性函数可以视为等效线性作用力与附加非线性作用力之和，即

$$\varepsilon F\left(x_1,\frac{dx_1}{dt}\right)=-\varepsilon c_e\frac{dx_1}{dt}-\varepsilon k_e'x_1+\varepsilon f\left(x_1,\frac{dx_1}{dt}\right)$$

式中　k_e'——等效刚度，c_e——等效阻力系数，可按第二章中的方法计算；

ε——小参数；

$f\left(x_1, \frac{dx_1}{dt}\right)$ —残余非线性函数。

因而上式可表示为

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2}+\varepsilon c_e\frac{dx_1}{dt}+k_e x_1=\varepsilon f\left(x_1, \frac{dx_1}{dt}\right)+\varepsilon F_0\sin\nu t \tag{7-103}$$

式中 $k_e = k + \varepsilon k_e'$

下面我们来求方程的非共振解和共振解。

7.6.1 方程的非共振解

对以上方程进行以下变换

$$x_1 = x + A\sin(\nu t - \alpha)$$

代入方程(7-103)，得

$$m\ddot{x} + k_e x = \varepsilon f[x + A\sin(\nu t-\alpha), \dot{x} + A\nu\cos(\nu t-\alpha)] - \varepsilon c_e\dot{x}$$
$$+ \varepsilon[F_0\sin\nu t - (k_e - m\nu^2)A\sin(\nu t-\alpha) - c_e\nu A\cos(\nu t-\alpha)]$$

设方程的解为

$$x = a\cos(\omega_0 t + \beta) = a\cos\psi$$

$$\frac{da}{dt} = -\delta_e(a)a = -\frac{1}{4\pi^2\omega_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(a,\psi,\theta)\sin\psi d\psi d\theta$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 = \omega_0 - \frac{1}{4\pi^2\omega_0 a}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(a,\psi,\theta)\cos\psi d\psi d\theta$$

式中 $\theta = \nu t, \omega_0 = \sqrt{\frac{k_e}{m}}$

$$f_0(a,\psi,\theta) = f(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi, \nu t)$$

而改进的一次近似解为

$$x = a\cos\psi + \varepsilon u_1(a,\psi,\theta)$$

$$u_1(a,\psi,\theta) = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{\substack{n\\ [n^2+(m^2-1)^2\neq 0]}}\sum_m \frac{e^{i(n\theta+m\psi)}}{\omega_0^2-(n\theta+m\omega_0)^2}$$
$$\times\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(a,\psi,\theta)e^{-i(n\theta+m\psi)}d\theta d\psi$$

由于阻尼的存在，自由振动将衰减为零，即 $x\to 0$。实际上，对工作有意义的是方程的强迫振动解，即振幅和相位差角为

$$A = \frac{F_0\cos\alpha}{k_e - m\nu^2} \qquad \alpha = \arctan\frac{c_e\nu}{k_e - m\nu^2}$$

7.6.2 主共振情况

将方程(7-103)重新写成如下的形式

$$M\ddot{x} + kx = \varepsilon f(x,\dot{x}) + \varepsilon E\sin\nu t$$

的形式。

若系统在主共振情况下($p = q = 1$)振动，则第一近似解为

$$x = a\cos(\nu t+\vartheta) - a\cos\psi \tag{7-104}$$

式中的 a 和 ϑ 可由下式求出

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \varepsilon\delta_1(a,\vartheta)a+\cdots\\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \varepsilon\omega_1(a,\vartheta)+\cdots\end{aligned} \tag{7-105}$$

为了求出 $\delta_1(a,\vartheta)$, $\omega_1(a,\vartheta)$, 可先导出下列两式（令 $\theta = \nu t, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$）

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{da}{dt}\cos(\theta+\vartheta) - a\sin(\theta+\vartheta)\frac{d(\theta+\vartheta)}{dt}\\ &= \varepsilon\delta_1 a\cos(\theta+\vartheta) - a\omega_0\sin(\theta+\vartheta) - \varepsilon a\omega_1\sin(\theta+\vartheta)\\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \varepsilon\left[(\omega_0-\nu)\frac{\partial(\delta_1 a)}{\partial\vartheta} - 2a\omega_0\omega_1\right]\cos(\theta+\vartheta) - a\omega_0^2\cos(\theta+\vartheta)\\ &\quad - \varepsilon\left[(\omega_0-\nu)\frac{\partial\omega_1}{\partial\vartheta} + 2\omega_0\delta_1\right]a\sin(\theta+\vartheta)\end{aligned} \tag{7-106}$$

将以上方程代入方程(7-103)的左边，可得

$$\begin{aligned}M\frac{d^2x}{dt^2} + kx &= \varepsilon M\left[(\omega_0-\nu)\frac{\partial(\delta_1 a)}{\partial\vartheta} - 2a\omega_0\omega_1\right]\cos(\theta+\vartheta)\\ &\quad - \varepsilon M\left[(\omega_0-\nu)\frac{\partial\omega_1}{\partial\vartheta} + 2\omega_0\delta_1\right]a\sin(\theta+\vartheta)\end{aligned} \tag{7-107}$$

方程的右边按富氏级数展开，则有

$$\begin{aligned}\left\{\varepsilon\cdot f\left(x,\frac{dx}{dt}\right) + \varepsilon E\sin\theta\right\}_{x=a\cos(\theta+\vartheta)} &= \frac{\varepsilon\cos(\theta+\vartheta)}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi)\cos\psi d\psi\\ &\quad + \frac{\varepsilon\sin(\theta+\vartheta)}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi)\sin\psi d\psi\\ &\quad + \varepsilon\sum_{n\neq 1}\left\{f_n^{(1)}(a)\cos n(\theta+\vartheta) + f_n^{(2)}\sin n(\theta+\vartheta)\right\}\\ &\quad + \varepsilon E[\cos\vartheta\sin(\theta+\vartheta) - \sin\vartheta\cos(\theta+\vartheta)]\end{aligned} \tag{7-108}$$

式中

$$\begin{aligned}f_n^{(1)} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a,\psi)\cos n\psi d\psi\\ f_n^{(2)} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a,\psi)\cos n\psi d\psi\end{aligned} \tag{7-109}$$

令方程两边一次谐波的系数相等，可得

$$\begin{aligned}M\left[(\omega_0-\nu)\frac{\partial(\delta_1 a)}{\partial\vartheta} - 2a\omega_0\omega_1\right] &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_0(a,\psi)\cos\psi d\psi - E\sin\vartheta\\ M\left[(\omega_0-\nu)\frac{\partial\omega_1}{\partial\vartheta}a - 2a\omega_0\delta_1 a\right] &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_0(a,\psi)\cos\psi d\psi - E\cos\vartheta\end{aligned} \tag{7-110}$$

设以上方程的解有以下形式

$$\begin{aligned}\delta_1 a &= -\frac{1}{2\pi\omega_0 M}\int_0^{2\pi} f_0(a,\psi)\sin\psi d\psi + c_1\frac{E}{M}\cos\vartheta\\ \omega_1 &= -\frac{1}{2\pi\omega_0 aM}\int_0^{2\pi} f_0(a,\psi)\cos\psi d\psi + c_2\frac{E}{M}\sin\vartheta\end{aligned} \tag{7-111}$$

由上式得

$$\frac{\partial(\delta_1 a)}{\partial\vartheta} = c_1\frac{E}{M}\sin\vartheta$$

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial\vartheta} = c_2\frac{E}{M}\cos\vartheta \tag{7-112}$$

代入式(7-110)，得

$$c_1 = -\frac{1}{\omega_0+\nu}\qquad c_2 = -\frac{1}{a(\omega_0+\nu)} \tag{7-113}$$

最后可求得

$$\begin{aligned}\delta_1(\tau,a,\vartheta) &= -\frac{1}{2\pi\omega_0 aM}\int_0^{2\pi} f_0(a,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi - \frac{E}{Ma(\omega_0+\nu)}\cos\vartheta\\ \omega_1(\tau,a,\vartheta) &= -\frac{1}{2\pi\omega_0 aM}\int_0^{2\pi} f_0(a,\psi)\cos\psi\mathrm{d}\psi + \frac{E}{Ma(\omega_0+\nu)}\sin\vartheta\end{aligned} \tag{7-114}$$

采用以下符号

$$\begin{aligned}\delta_e(a) &= \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0 aM}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi,\ -a\omega_0\sin\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi\\ \omega_e(a) &= \nu - \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0 aM}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi,\ -a\omega_0\sin\psi)\cos\psi\mathrm{d}\psi\end{aligned} \tag{7-115}$$

由此得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= -\delta_e(a)a - \frac{\varepsilon E}{M(\omega_0+\nu)}\cos\vartheta\\ \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} &= \omega_e(a) - \nu + \frac{\varepsilon E}{Ma(\omega_0+\nu)}\sin\vartheta\end{aligned} \tag{7-116}$$

由于 εu_1 是由 $\varepsilon\sum\limits_{n\neq 1}\left[f_n^{(1)}\cos n(\theta+\vartheta) + f_n^{(2)}\sin n(\theta+\vartheta)\right]$ 所激发的，故其表示式为

$$\begin{aligned}\varepsilon u_1(a,\theta,\theta+\vartheta) &= \frac{1}{\pi\omega_0^2}\sum_{n\neq 1}\frac{1}{1-n^2}\Big[\cos(\theta+\vartheta)\\ &\quad\times\int_0^{2\pi} f_0(a,\psi)\cos\psi\mathrm{d}\psi + \sin(\theta+\vartheta)\int_0^{2\pi} f_0(a,\psi)\sin n\psi\mathrm{d}\psi\Big]\end{aligned} \tag{7-117}$$

改进的一次近似解为

$$x = a\cos(\theta+\vartheta) + \varepsilon u_1(a,\vartheta,\theta+\vartheta) \tag{7-118}$$

式中的 a 和 ϑ 可按式(7-116)计算。

【例 7.6.1】 某一在简谐力作用下硬式非线性振动系统，其运动微分方程式为

$$M\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + bx + dx^3 = E\sin\nu t$$

引入以下符号 $x_1 = \sqrt{\frac{d}{b}}x$，$t_1 = \sqrt{\frac{b}{M}}t$，$\delta = \frac{c}{\sqrt{Mb}}$，$E_1 = \frac{E}{b}\sqrt{\frac{d}{b}}$，方程可写为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\delta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x + x^3 = E_1\sin\nu t$$

若阻尼很小，δ，E_1，x_1^3 都很小，非线性函数及干扰力可表示为

$$\varepsilon f\left(x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = -2\delta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - x^3,\quad \varepsilon E = E_1$$

利用以前的公式，在靠近主共振时的一次近似解为

$$x = a\cos(\nu t+\vartheta)$$
$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = -\delta a + \frac{E_1}{1+\nu}\cos\vartheta$$
$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = 1-\nu+\frac{3a^2}{8}+\frac{E_1}{a(1+\nu)}\sin\vartheta$$

在稳态情况下，$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}=0$，则有

$$-\delta a+\frac{E_1}{1+\nu}\cos\vartheta=0$$
$$1-\nu+\frac{3a^2}{8}+\frac{E_1}{a(1+\nu)}\sin\vartheta=0$$

当系统处于主共振，即 $\nu\approx1$ 时，上式可写为

$$-2\delta a+E_1\cos\vartheta=0$$
$$a\left[\left(1+\frac{3a^2}{8}\right)^2-\nu^2\right]+E_1\sin\vartheta=0$$

由此可求得在稳态情况下的振幅和激振频率的关系式

$$a^2\left\{\left[\left(1+\frac{3a^2}{8}\right)^2-\nu^2\right]^2+4\delta^2\right\}=E_1^2$$

或

$$\nu=\sqrt{\omega_e^2(a)\pm\sqrt{\left(\frac{E_1}{a}\right)^2-4\delta^2}}$$

式中 $\omega_e(a)=1+\frac{3a^2}{8}$

二次近似解为

$$x=a\cos(\nu t+\vartheta)+\frac{a^3}{32}\cos3(\nu t+\vartheta)$$

式中

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=-\delta a-\frac{3a^2\delta}{8}-E_1\left[\frac{1}{1+\nu}-\frac{3a^2(7-\nu)}{8(3-\nu)(1+\nu)^2}\right]\cos\vartheta-\frac{E_1\delta}{(1+\nu)^2}\sin\vartheta$$
$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}=1-\nu+\frac{3a^2}{8}-\frac{\delta^2}{4}-\frac{15a^4}{256}+\frac{E_1}{a}\left[\frac{1}{1+\nu}-\frac{3a^2(5-3\nu)}{8(3-\nu)(1+\nu)^2}\right]\sin\vartheta-\frac{E_1\delta}{a(1+\nu)^2}\cos\vartheta$$

一次近似解与二次近似解的差异已示于图 7-1 中，它们之间的差异是因为在二次近似解中有高次谐波存在。

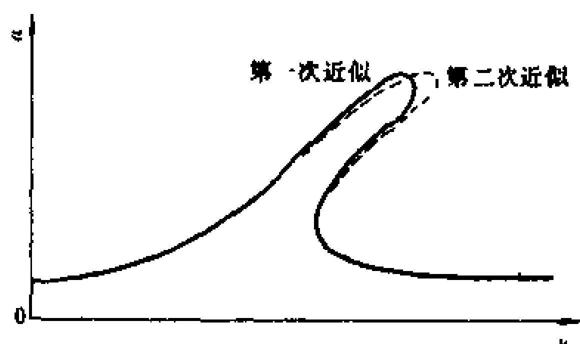


图 7-1 一次近似解与二次近似解共振曲线的比较

7.7　应用举例

【例 7.7.1】　不对称分段线性非线性系统。

设系统的运动方程为

$$m\ddot{x} + kx = \varepsilon f(x, \dot{x}) + \varepsilon E_0 \sin\nu t \tag{1}$$

其中

$$f(x, \dot{x}) = -c\dot{x} - \begin{cases} 0 & -e_2 \leqslant x \leqslant e_1 \\ \Delta c_1 \dot{x} + \Delta k_1 (x - e_1) & x \geqslant e_1 \\ \Delta c_2 \dot{x} + \Delta k_2 (x + e_2) & x \leqslant -e_2 \end{cases} \tag{2}$$

根据渐近法，方程的一阶近似解设为

$$x = a\cos(\nu t + \beta) + \varepsilon u_1 + \cdots = a\cos\varphi + \varepsilon u_1 + \cdots \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= -\delta_e(a)a - \frac{\varepsilon E_0}{m(\omega_0 + \nu)}\cos\beta \\ \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} &= \omega_e(a) - \nu + \frac{\varepsilon E_0}{m(\omega_0 + \nu)a}\sin\beta \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $\omega_0^2 = k/m$。设 $\varphi_1 = \arccos\dfrac{e_1}{a}$ 为第一象限角，$\varphi_2 = \arccos\dfrac{e_2}{a}$ 为第二象限角。上式中的 $\delta_e(a)$ 和 $\omega_e(a)$ 分别为

$$\begin{aligned} \delta_e(a) &= \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0 am}\int_0^{2\pi} f_0(a, \psi)\sin\varphi \mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0 am}\Big\{\int_0^{2\pi} ac\omega_0 \sin^2\varphi \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{\varphi_1} -[-\Delta c_1 a\omega_0 \sin\varphi + \Delta k_1 (a\cos\varphi - e_1)]\sin\varphi \mathrm{d}\varphi \\ &\quad + \int_{\varphi_1}^{2\pi-\varphi_2} -[-\Delta c_2 a\omega_0 \sin\varphi + \Delta k_2 (a\cos\varphi + e_2)]\sin\varphi \mathrm{d}\varphi \\ &\quad + \int_{2\pi-\varphi_1}^{2\pi} -[-\Delta c_1 a\omega_0 \sin\varphi + \Delta k_1 (a\cos\varphi - e_1)]\sin\varphi \mathrm{d}\varphi\Big\} \\ &= \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0 am}\Big\{\pi ac\omega_0 + \Delta c_1 a\omega_0\left(\varphi_1 - \frac{1}{2}\sin 2\varphi_1\right) \\ &\quad + \Delta c_2 a\omega_0\left(\pi \quad \varphi_2 + \frac{1}{2}\sin 2\varphi_2\right)\Big\} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \omega_e(a) &= \omega_0 - \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0 am}\int_0^{2\pi} f_0(a, \psi)\cos\varphi \mathrm{d}\varphi \\ &= \omega_0 - \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0 am}\Big\{\int_0^{2\pi} ac\omega_0 \sin\varphi\cos\varphi \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{\varphi_1} -[-\Delta c_1 a\omega_0 \sin\varphi + \Delta k_1 (a\cos\varphi - e_1)]\cos\varphi \mathrm{d}\varphi \\ &\quad + \int_{\varphi_1}^{2\pi-\varphi_1} -[-\Delta c_2 a\omega_0 \sin\varphi + \Delta k_2 (a\cos\varphi - e_2)]\cos\varphi \mathrm{d}\varphi \\ &\quad + \int_{2\pi-\varphi_1}^{2\pi} -[-\Delta c_1 a\omega_0 \sin\varphi + \Delta k_1 (a\cos\varphi - e_1)]\cos\varphi \mathrm{d}\varphi\Big\} \end{aligned}$$

$$-\omega_0\quad\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0 am}\Big\{-\Delta k_1 a\left(\varphi_1+\frac{1}{2}\sin 2\varphi_1\right)+2\Delta k_1 e_1\sin\varphi_1$$

$$-\Delta k_2 a\left(\pi\ \ \varphi_2-\frac{1}{2}\sin 2\varphi_2\right)\ \ 2\Delta k_2 e_2\sin\varphi_2\Big\}\tag{6}$$

由一阶近似得到的定常振动的频率响应方程为

$$a^2[(\omega_e^2-\nu^2)^2+4\nu^2\delta_e^2]\ \ \varepsilon^2E_0^2$$

$$\tan\beta\quad\frac{\omega_e^2\ \ \nu^2}{2\delta_e\nu}\tag{7}$$

对于不同的分段刚度参数特性，得出的频率响应曲线如图7-2所示。

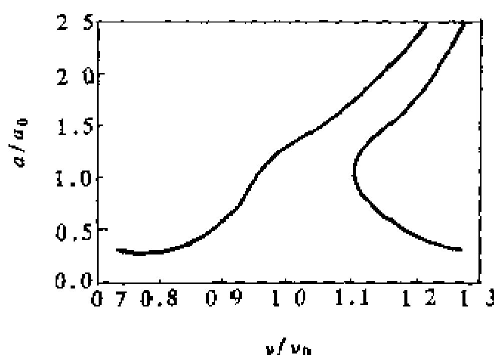


图 7-2　不对称分段线性系统的频率响应曲线

【例 7.7.2】 在许多振动机械中，由于振动加速度的影响，振动物料会相对机体作不同形式的相对运动，比如滑动和抛掷运动等。以此为背景，作者于1981年首先提出了具有非线性惯性力项的非线性振动系统解析分析理论[156]。

图7-3给出了弹性连杆式振动冷却机的力学示意图。当振动机运动加速度较小时，物料相对机体只作滑动运动，物料与机体在 y 方向始终保持接触。振动机体的运动方程可表示如下

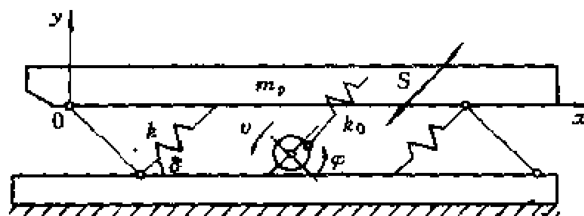


图 7-3　弹性连杆式振动冷却机的力学示意图

$$m_p\ddot{s}+f\dot{s}+m_m\ddot{s}\sin^2\delta+\varepsilon F_m(\ddot{s},\dot{s},s)\cos\delta+ks=k_0(r\sin\nu t-s)\tag{8}$$

式中　m_p——振动机体的质量；

m_m——物料的质量；

f_s——阻尼系数；

$\varepsilon F_m(\ddot{s},\dot{s},s)$——物料作用于机体的非线性作用力，可由式(9)表示：

$$F_m(\ddot{s},\dot{s},s)=\begin{cases}m_m\ddot{s}\cos\delta, & \Phi_e-2\pi\leqslant\Phi\leqslant\Phi_k,\ \Phi_m-2\pi\leqslant\Phi\leqslant\Phi_q\\ -m_mf(g+\ddot{s}\sin\delta), & \Phi_k\leqslant\Phi\leqslant\Phi_m\\ m_mf(g+\ddot{s}\sin\delta), & \Phi_q\leqslant\Phi\leqslant\Phi_e\end{cases}\tag{9}$$

式中　f——物料与振动体之间的滑动摩擦系数；

$\Phi_k(\Phi_q)$和 $\Phi_m(\Phi_e)$——物料作正向和反向滑动时的初始角或终止角。

由于振动冷却机通常在接近主共振状态下工作(图 7-4)，由此我们可以利用渐近法求得主共振状态下的一阶近似解如下

$$s=a\cos(\nu t+\Theta)=a\cos\psi$$

$$f_0(a,\psi)=\varepsilon F_m(-a\omega^2\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi,\ a\cos\psi)\cos\delta$$

$$\frac{da}{dt}=-\frac{fa}{2m_p}-\frac{\varepsilon}{2\pi m_p\omega}\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi)\sin\psi d\psi\quad\frac{\varepsilon k_0 r\cos\Theta}{m_p(\omega+\nu)}\tag{10}$$

$$\frac{d\Theta}{dt}=\omega-\nu-\frac{\varepsilon}{2\pi m_p\omega}\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi)\cos\psi d\psi-\frac{\varepsilon k_0 r\sin\Theta}{m_p(\omega+\nu)a}$$

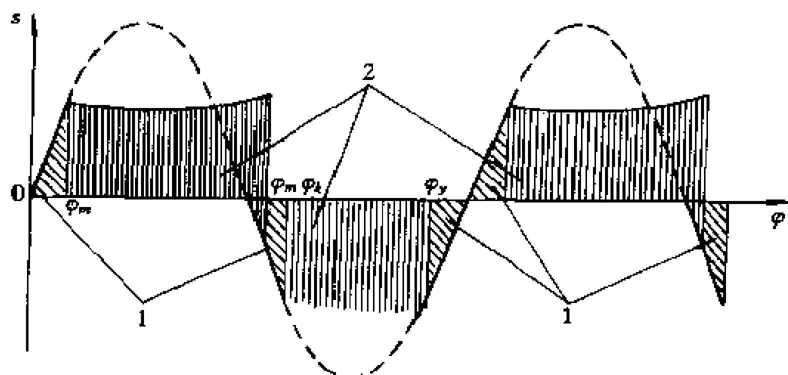


图 7-4　分段惯性力和分段摩擦力

1. 分段惯性力　2. 分段摩擦力

当$\frac{da}{dt}=0$、$\frac{d\Theta}{dt}=0$时，振幅 a 为常数，相位角 Θ 亦为常数。

物料结合质量和结合阻尼系数可由下式求出

$$K_m=\sin^2\delta-\frac{b_1\cos\delta}{m_m\nu^2a},\quad f_m=\frac{a_1\cos\delta}{\nu a},$$

$$a_1=\frac{m_m\nu^2a}{\pi}\Big[-\frac{1}{2}\cos\delta\sin^2\Phi\Big|_{\Phi_{k-2\pi}}^{\Phi_k}-\frac{1}{2}\cos\delta\sin^2\Phi\Big|_{\Phi_m}^{\Phi_q}-f\Big(\frac{g}{\nu^2a}\sin\Phi-\frac{1}{2}\sin^2\Phi\sin\delta\Big)\Big|_{\Phi_k}^{\Phi_m}$$
$$+f\Big(\frac{g}{\nu^2a}\sin\Phi-\frac{1}{2}\sin^2\Phi\sin\delta\Big)\Big|_{\Phi_q}^{\Phi_e}\Big]\tag{11}$$

$$b_1=\frac{m_m\nu^2a}{\pi}\Big\{-\frac{1}{2}\cos\delta\Big(\Phi-\frac{1}{2}\sin2\Phi\Big)\Big|_{\Phi_{k-2\pi}}^{\Phi_k}-\frac{1}{2}\cos\delta\Big(\Phi-\frac{1}{2}\sin2\Phi\Big)\Big|_{\Phi_m}^{\Phi_q}$$
$$-f\Big[\frac{g}{\nu^2a}\cos\Phi-\frac{1}{2}\sin\delta\Big(\Phi-\frac{1}{2}\sin2\Phi\Big)\Big]\Big|_{\Phi_k}^{\Phi_m}+f\Big[\frac{g}{\nu^2a}\sin\Phi-\frac{1}{2}\sin\delta\Big(\Phi-\frac{1}{2}2\Phi\Big)\Big]\Big|_{\Phi_q}^{\Phi_e}\Big\}$$

当 $a=13,14.5,17.5$mm，$n=330$rpm，$\delta=22°$，$\mu=43°40''$时，我们计算 Φ_k，Φ_q，Φ_m，Φ_e，a_1，b_1，K_m，f_m 的值，可知质量结合系数的值为 0.4～0.7，阻尼系数为 0.25～0.33。

把 $F_m(s,\dot{s},s)\cos\delta$ 进行傅立叶展开后可以看出，除一次谐波外，还存在着影响系统振动的许多高次谐波。

【例 7.7.3】　许多结构、系统在动载作用下会表现出非线性滞回行为。通常人们认为滞回环的形状是对称的。但是在工程实际中往往还存在其它特殊形式的滞回力。例如，对物料进行振动压实的振动压路机系统。压实机构与物料组成的系统存在不对称的滞回环节。这是由于振动压实机构运动的特殊性造成的。很多情况下，许多各向异性材料由于拉压变形性质不同，即使载荷对称，也会出现不对称滞回环，如一些压电晶体和形状记忆合金。另一种典型情况则是尽管材料各向同性，但存在不对称的运动约束，如有间隙单侧支承下的梁的振动。

这里以振动压实系统为对象用渐近法进行分析[208]。

设 m 为机构与参振物料等效质量之和，k 为物料弹性刚度，c 为粘性阻尼系数、$E(t)$为周期激励。系统的运动方程为

$$m\ddot{x}+\varepsilon c\dot{x}+kx+q(x)=E(t)\tag{12}$$

式中　ε 为小参数，$q(x)$为滞回力项。

参考有关实验结果，假设 $q(x)$模型是由 4 个区段组成，每个区段均为直线和抛物线的叠加，即

$$\varepsilon q(x)=\begin{cases}a_0+a_1x+a_2x^2 & x_A>x>x_D,\dot{x}>0\\ b_0+b_1x+b_2x^2 & x_B\geqslant x\geqslant x_A,\dot{x}\geqslant 0\\ c_0+c_1x+c_2x^2 & x_B\geqslant x\geqslant x_C,\dot{x}<0\\ d_0+d_1x+d_2x^2 & x_C\geqslant x\geqslant x_D,\dot{x}\leqslant 0\end{cases} \tag{13}$$

设激励是正弦激励

$$E(t)=E_0\sin\nu t \tag{14}$$

在共振情况下，外激励可以视为小参数项，式(12)可以写成

$$m\ddot{x}+kx=\varepsilon[E(t)-c\dot{x}-q(x)] \tag{15}$$

设一次近似解的形式为

$$x=a\cos\varphi+\varepsilon u_1+\cdots \tag{16}$$

式中　$\varphi=\nu t+\beta=\theta+\beta$，$\beta$ 为相位差角。图 7-5 中 A，B，C，D 四个位置对应的相位角分别为 $\varphi_A=2\pi-\arccos\frac{x_A}{a}$，$\varphi_B=2\pi$，$\varphi_C=\arccos\frac{x_C}{a}$，$\varphi_D=\pi$，$a$ 和 β 满足

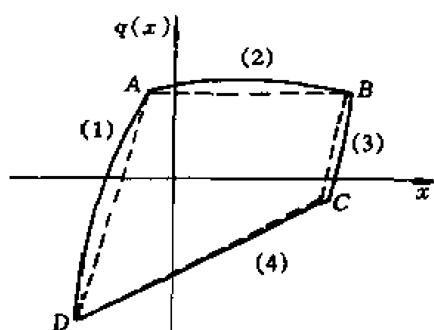


图 7-5　分段曲线不对称滞回模型

$$\dot{a}=-\varepsilon\delta_e(a)a-\frac{\varepsilon E_0}{m(\omega+\nu)}\cos\beta \tag{17}$$

$$\dot{\beta}=\omega_e(a)-\nu+\varepsilon\delta_e(a)a-\frac{\varepsilon E_0}{m(\omega+\nu)}\sin\beta$$

其中　固有频率为 $\omega=\sqrt{k/m}$，等效固有频率为 $\omega_e(a)=\sqrt{k_e(a)/m}$。上式中等效阻尼比为

$$\begin{aligned}\delta_e(a)=&\frac{c}{2m}+\frac{1}{2m\pi\omega a\varepsilon}[a_0+b_0-c_0-d_0+\frac{1}{3}a^2(a_2+b_2-c_2-d_2)\\&+(a_0-b_0)\cos\varphi_A-\frac{1}{2}a(a_1-b_1)\sin^2\varphi_A+\frac{1}{3}a^2(a_2-b_2)\cos^3\varphi_A\\&+(c_0-d_0)\cos\varphi_C-\frac{1}{2}a(c_1-d_1)\sin^2\varphi_C+\frac{1}{3}a^2(c_2-d_2)\cos^3\varphi_C]\end{aligned} \tag{18}$$

等效刚度为

$$\begin{aligned}k_e(a)=&k+\frac{1}{\pi a}[\frac{\pi}{2}a(-a_1+2b_1+d_1)+(a_0-b_0)\sin\varphi_A+(c_0-d_0)\sin\varphi_C\\&+a(a_1-b_1)\left(\frac{\varphi_A}{2}+\frac{1}{4}\sin2\varphi_A\right)+a(c_1-d_1)\left(\frac{\varphi_C}{2}+\frac{1}{4}\sin2\varphi_C\right)\\&+\frac{1}{3}a^2(a_2-b_2)\sin\varphi_A(\cos^2\varphi_A+2)+\frac{1}{3}a^2(c_2-d_2)\sin\varphi_C(\cos^2\varphi_C+2)]\end{aligned} \tag{19}$$

作进一步推导，可求得包括直流分量和二、三次谐波的一次近似解的附加项 u_1 为

$$u_1=A_0+A_2\cos2\varphi+B_2\sin2\varphi+A_3\cos3\varphi+B_3\sin3\varphi+\cdots \tag{20}$$

式(20)中各项系数的表达式：

$$\begin{aligned}A_0=&\frac{1}{\pi\omega^2m}[\pi(a_0-2b_0-d_0)-\varphi_A(a_0-b_0)-\varphi_C(c_0-d_0)+\frac{1}{2}\pi a^2(a_2-2b_2-d_2)\\&-\frac{1}{2}\varphi_Aa^2(a_2-b_2)-\frac{1}{2}\varphi_Ca^2(c_2-d_2)-(a_1-b_1)a\sin\varphi_A-(c_1-d_1)a\sin\varphi_C\\&-\frac{1}{4}(a_2-b_2)a^2\sin\varphi_A-\frac{1}{4}(c_2-d_2)a^2\sin2\varphi_c]\end{aligned}$$

$$A_2=\frac{1}{3\pi\omega^2m}[\frac{1}{2}(a_0-b_0)\sin2\varphi_A+\frac{1}{2}a(a_1-b_1)\left(\frac{1}{3}\sin3\varphi_A+\sin\varphi_A\right)$$

$$+\frac{1}{4}a^2(a_2-b_2)\left(\varphi_A+\sin2\varphi_A+\frac{1}{4}\sin4\varphi_A\right)+\frac{1}{2}(c_0-d_0)\sin2\varphi_C+\frac{1}{2}a(c_1-d_1)$$

$$\left(\frac{1}{3}\sin3\varphi_C+\sin\varphi_C\right)+\frac{1}{4}a^2(c_2-d_2)\left(\varphi_C+\sin2\varphi_C+\frac{1}{4}\sin4\varphi_C\right)-\frac{\pi}{4}a^2(a_2-2b_2-d_2)\Big]$$

$$B_2=\frac{1}{3\pi\omega^2 m}\Big[-\frac{2}{3}(a_1+b_1-c_1-d_1)a-\frac{1}{2}(a_0-b_0)(\cos2\varphi_A-1)$$

$$-\frac{1}{2}a(a_1-b_1)\left(\frac{1}{3}\cos3\varphi_A+\cos\varphi_A\right)-\frac{1}{2}a^2(a_2-b_2)(\cos^4\varphi_A-1)$$

$$-\frac{1}{2}(c_0-d_0)(\cos2\varphi_C-1)-\frac{1}{2}a(c_1-d_1)\left(\frac{1}{3}\cos3\varphi_C+\cos\varphi_C\right)$$

$$-\frac{1}{2}a^2(c_2-d_2)(\cos^4\varphi_C-1)\Big]$$

$$A_3=\frac{1}{8\pi\omega^2 m}\Big[\frac{1}{3}\left(a_0-b_0+\frac{1}{2}a_2a^2-\frac{1}{2}b_2a^2\right)\sin3\varphi_A+\frac{1}{4}a(a_1-b_1)\left(\frac{1}{2}\sin4\varphi_A+\sin2\varphi_A\right)$$

$$+\frac{1}{4}a^2(a_2-b_2)\left(\frac{1}{5}\sin\varphi_A+\sin\varphi_A\right)+\frac{1}{3}\left(c_0-d_0+\frac{1}{2}c_2a^2-\frac{1}{2}d_2a^2\right)\sin3\varphi_C$$

$$+\frac{1}{4}a(c_1+d_1)\left(\frac{1}{2}\sin4\varphi_A+\sin2\varphi_C\right)+\frac{1}{4}a^2(c_2-d_2)\left(\frac{1}{5}\sin5\varphi_C+\sin\varphi_C\right)\Big]$$

$$B_3=\frac{1}{8\pi\omega^2 m}\Big[-\frac{1}{3}(a_0+b_0-c_0-d_0)-\frac{7}{15}(a_2+b_2-c_2-d_2)a^2$$

$$-\frac{1}{3}\left(a_0-b_0+\frac{1}{2}a_2a^2-\frac{1}{2}b_2a^2\right)\cos3\varphi_A-\frac{1}{3}\left(c_0-d_0+\frac{1}{2}c_2a^2-\frac{1}{2}d_2a^2\right)\cos3\varphi_C$$

$$-\frac{1}{4}a(a_1-b_1)\left(\frac{1}{2}\cos4\varphi_A+\cos2\varphi_A-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{4}a(c_1-d_1)\left(\frac{1}{2}\cos4\varphi_C+\cos2\varphi_C-\frac{3}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{4}a^2(a_2-b_2)\left(\frac{1}{5}\cos5\varphi_A+\cos\varphi_A\right)-\frac{1}{4}a^3(c_2-d_2)\left(\frac{1}{5}\cos5\varphi_C+\cos\varphi_C\right)\Big] \tag{21}$$

用不对称分段曲线滞回模型、不对称分段线性滞回模型和双线性对称滞回模型分别对实测的滞回环进行逼近。不对称分段曲线模型的参数值为(单位:kN, m)

$a_0=1770$, $a_1=-4.5e5$, $a_2=-4.2e8$, $b_0=1955.6$, $b_1=1.11e5$, $b_2=4.44e7$, $c_0=9500$, $c_1=-7.8e6$, $c_2=1.62e9$, $d_0=-750$, $d_1=3.0e5$, $d_2=0$。

不对称分段线性模型的参数取值处为(单位:kN, m)

$a_1=1800$, $k_1=1.2e6$, $a_2=1800$, $k_2=0$, $a_3=0$, $k_3=6.0e5$。

双线性对称滞回模型为:

$$q(x)=\begin{cases}a_1+k_1x & x<x_A, \dot{x}>0\\ a_2+k_2x & x>x_A, \dot{x}\geqslant 0\\ a_3+k_3x & x>x_C, \dot{x}<0\\ a_4+k_4x & x<x_C, \dot{x}\leqslant 0\end{cases} \tag{22}$$

其中 x_A, x_C 为正、反向塑性屈服点，且 $k_1=k_3, k_2=k_4$。各参数取值为(单位:kN, m): $a_1=1800$, $k_1=1.2e6$, $a_2=1800$, $k_2=0$, $a_3=-1800$, $a_4=-1800$。

对包含不对称或对称滞回力的系统(12)分别进行数值仿真，得到的滞回力-位移曲线如图 7-6(b)所示。将其与实验测得的结果(图 7-6(a))进行对比，分段曲线不对称模型的滞回环与实际情况较为相似。滞回力的时间历程如图 7-7 所示。由图可见，实测滞回力的正峰值处有小的平台，负峰值处为尖峰。依据不对称模型可以得到相似的不对称形状，模型(12)的滞回力历程与实际基本一致。

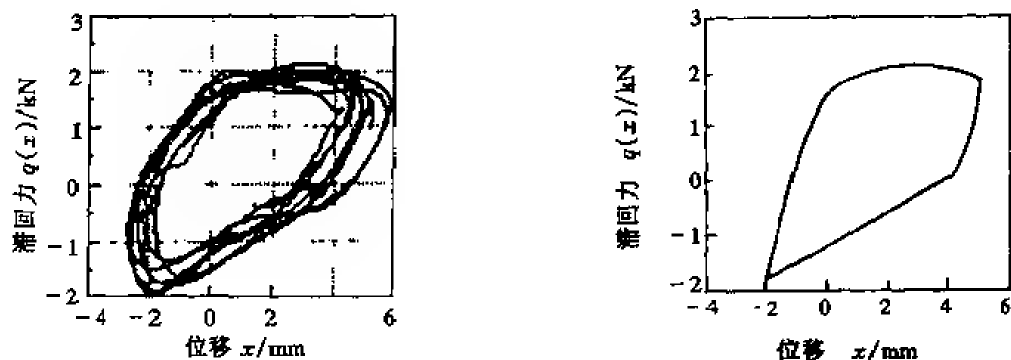


图 7-6　滞回力-位移曲线

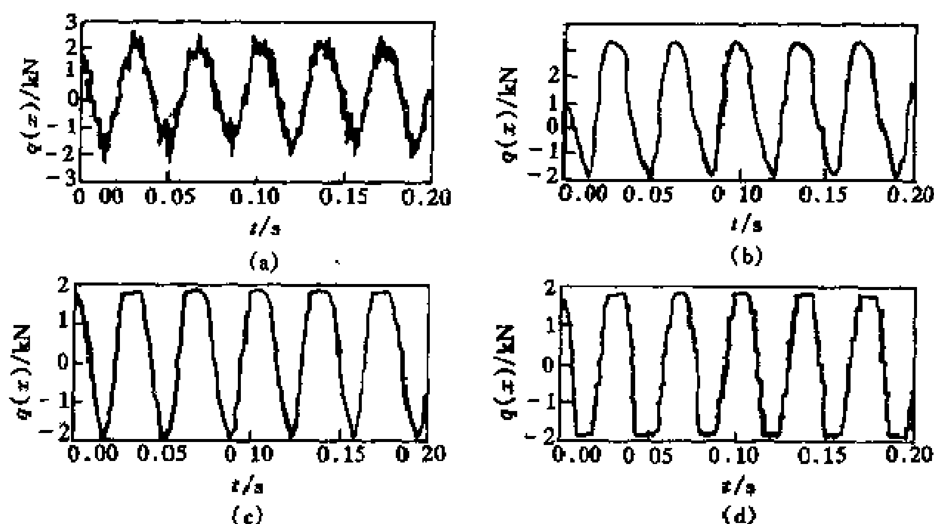


图 7-7　滞回力-时间曲线

(a)实测；(b)分段曲线不对称滞回模型；(c)分段线性不对称模型；(d)双线性对称模型

其他数据仿真结果还表明，分段线性不对滞回模型也能够反映实际的滞回特性，但精度差些。而模型(22)与实际差别较大，不能正确反映实际的滞回环的形状和特征。

计算与思考

1. 用渐近法求下列各方程的周期解(二次近似)

a) $\ddot{x}+x=\varepsilon[(1-x^2)\dot{x}+x^3]$

b) $\ddot{x}+x=-\varepsilon(\dot{x}+|\dot{x}|\dot{x})$

2. 用渐近法求下列各方程的周期解(三次近似)

a) $\ddot{x}+\varepsilon\dot{x}+x=0$

b) $\ddot{x}+x+\varepsilon x^3=0$

3. 已知系统方程

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=\varepsilon f(x,\dot{x})$$

式中　$\varepsilon f(x,\dot{x})=-(\lambda_1+\lambda_2x+\lambda_3x^2+\lambda_4x^3+\lambda_5x^4)\dot{x}$

ε 为小参数。证明应有 $\lambda_5>0$，并讨论自激条件、可能的定常振幅及其稳定性。

4. 证明方程

$$\ddot{x}+x=\varepsilon(1-x^{2n})\dot{x}\qquad \varepsilon>0,\ n\ 为正整数$$

只有一个极限环。求其振幅并证明它是稳定的。

5. 用渐法近求下列方程的二次近似解

$$\ddot{x}+x=\varepsilon[(1-x^2)\dot{x}-bx^3]$$

式中 $b>0, b=O(1)$。证明 $b=1$ 时，$x=\sin t$ 为方程的一个精确解。

6. 已知方程

$$\ddot{x}+x=2k\dot{x}-a\dot{x}|\dot{x}|-bx^3+c\dot{x}^3$$

式中 k, a, b, c 均大于 0 且为同阶小量。问此方程是否有周期解？它是否稳定？

7. 在解有库仑摩擦的系统的振动问题时，通常认为摩擦力与速度无关。但更精确的研究表明，该结论不能经常反映现象的物理实质，并可能引起解的结果失真。如图所示即所谓的 Frode 摆。摆的悬挂点是一套筒，它与轴之间产生粘性摩擦（粘性摩擦力矩 $M_1=a\dot{\phi}$，式中 $\dot{\phi}$ 为摆的角速度，a 系数），以及具有非线性的干摩擦，如图(b)所示，干摩擦力矩为 $M_2=M(\Omega-\dot{\phi})$。当 $M(\Omega-\dot{\phi})$ 按 $\dot{\phi}$ 的幂次展开为级数时，取到三次项，（设摆的名义角速度 Ω 与图中的拐点 A 对应），试求摆的自由振动方程，研究微小振动时的稳定性。

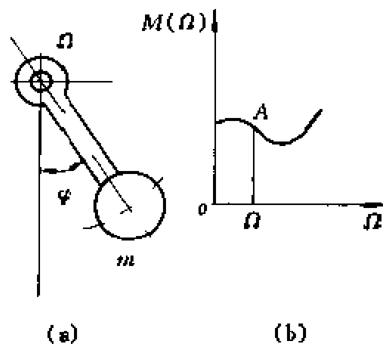


图 7-8　题 7 图

8. 已知运动方程为

$$\ddot{x}+(1-|x|)\dot{x}+x=0$$

用渐近法确定其极限环，并讨论其稳定性。

9. 在如图所示的系统中，质量块 m 承受大小为 $Q_n=k_1x_1$，开始于时间 $t=0$ 的阶跃力，求质量块的最大响应及其发生时间。

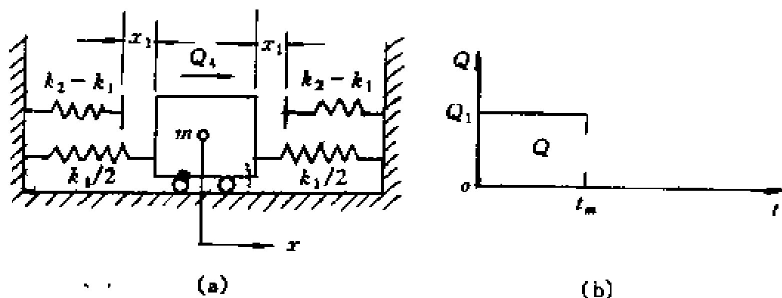


图 7-9　题 9 图

10. 用渐近法求解下面方程的二倍频响应

$$\ddot{x}+p_0^2x=\varepsilon x^2+F\cos\omega t$$

11. 用渐近法求下列方程的近共振响应

$$\ddot{u}+u=-\varepsilon\dot{u}|\dot{u}|+2\varepsilon f\cos\omega t$$

$$\ddot{u}+u+\varepsilon u^2\dot{u}=\varepsilon f\cos\omega t$$

12. 如图所示的塑性铰支系统，质量 m 受大小为 $Q_n=kx_1/1.5$，开始于时间 $t=0$ 的阶跃力，其载荷位移曲线如图所示，求质量 m 的最大响应及其发生时间。

13. 如图所示为一房顶承受横向载荷 P 的矩形框架，A, B, C, D 处形成塑性铰，载荷位移曲线如图所示，具有双线性滞回特征，假设 $k_1=5k_2$，承受大小为 $Q_n=k_1x_1$，开始于时间 $t=0$ 的阶跃力。求位移时间历程。

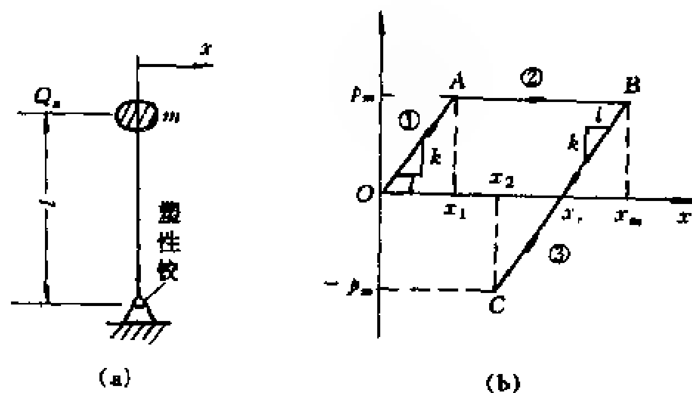


图 7-10 题 12 图

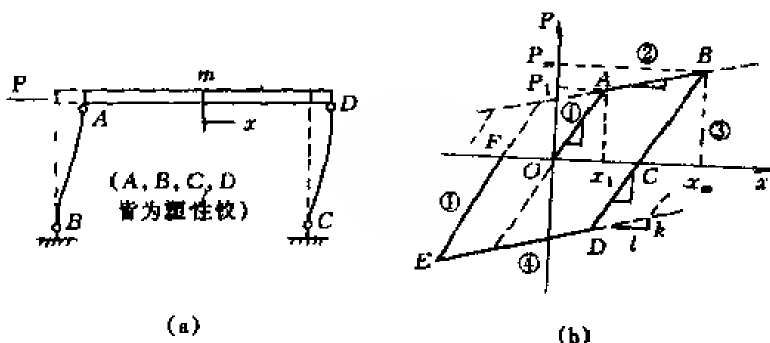


图 7-11 题 13 图

14. 设系统运动方程是

$$m_2 g - \frac{2m_1 gy}{\sqrt{l^2+y^2}} = m_2\ddot{y} + \frac{2m_1 y}{l^2+y^2}\left(y\ddot{y} + \frac{l^2\dot{y}^2}{l^2+y^2}\right)$$

当 $2m_1 > m_2$ 时,其平衡位置是

$$y_e = \frac{lm_2}{\sqrt{4m_1^2 - m_2^2}}$$

令 $u=\frac{y}{l}$,试确定在平衡位置附近的微小振动 $x=u-\frac{y_e}{l}$ 的运动方程,并求频率振幅关系。

15. 系统的恢复力和阻尼由线性项和二次项组成,运动方程为

$$m\ddot{x} + c_1\dot{x} + c_2\dot{x}|\dot{x}| + k_1 x + k_2 x|x| = F\cos\omega t$$

(1)求在主共振情况下的一次近似解;

(2)求出定常振动的频率响应方程;

(3)分析这种强迫振动会不会出现振动中点不在 $x=0$ 的不对称现象。

16. 考虑 Coulomb 阻尼作用下的系统的强迫振动

$$m\ddot{x} + a_1 x + a_3 x^3 + \mu mg\,\mathrm{sgn}\,\dot{x} = F\cos\nu t$$

(1)对于主共振情况,求周期解的一次近似;

(2)研究频率响应曲线,判断是否存在跳跃现象。

第八章 弱非线性多自由度振动系统的渐近法

8.1 弱非线性多自由度自治系统的渐近法

与单自由度系统相比，多自由度非线性方程的求解过程要比单自由度复杂得多。多自由度非线性系统的微分方程式多数是耦联的，方程的解含有高次谐波，因此，该系统存在着许多频率相互组合的振动，即多频组合振动。但是，对于多数多自由度非线性振动，不可避免地存在着阻尼，通常还存在着外部干扰力，这些因素常常会使高频成分迅速消失，而建立起来的是以基频、或某一种频率为主的振动。所以在分析多自由度非线性振动时，在多数情况下可以只考虑单频振动[1]，即只考虑由某一基本频率引起的非线性振动，这样的处理方法不仅符合实际情况，而且与工程实际需要相吻合。

多自由度非线性振动的微分方程式可表示为以下形式①

$$\begin{gathered}\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}=\varepsilon\boldsymbol{Q}^{(1)}+\varepsilon^2\boldsymbol{Q}^{(2)}\\ \boldsymbol{Q}^{(1)}=\boldsymbol{Q}^{(1)}(x_1,\cdots,x_N,\dot{x}_1,\cdots,\dot{x}_N,\ddot{x}_1,\cdots,\ddot{x}_N)\\ \boldsymbol{Q}^{(2)}=\boldsymbol{Q}^{(2)}(x_1,\cdots,x_N,\dot{x}_1,\cdots,\dot{x}_N,\ddot{x}_1,\cdots,\ddot{x}_N)\end{gathered} \tag{8-1}$$

式中 $\ddot{\boldsymbol{x}}$和 $\boldsymbol{x}$ 是加速度列阵和位移列阵；

$\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 分别为质量矩阵和刚度矩阵；

$\boldsymbol{Q}^{(1)}$和 $\boldsymbol{Q}^{(2)}$为非线性作用力列阵；

ε 为小参数。

当 $\varepsilon=0$，方程(8-1)成为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}=0 \tag{8-2}$$

后面将讨论方程组(8-1)的求解方法。

8.1.1 未干扰方程组的解及固有频率与振型

方程(8-2)的解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}_M\cos(\omega t+\vartheta)=\boldsymbol{\phi}_M a\cos(\omega t+\vartheta)=\boldsymbol{\phi}_M a\cos\psi \tag{8-3}$$

式中 ω 是固有频率，它可以由以下特征行列式求出

$$|\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}|=0 \tag{8-4}$$

$\boldsymbol{X}_M$ 是振型矩阵。$\boldsymbol{\phi}_M$ 为振型函数，或主函数，可由以下齐次代数方程组求出

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{X}_M=(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{\phi}_M a=0\\ \boldsymbol{\phi}_M=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\phi}_{M1} & \boldsymbol{\phi}_{M2} & \cdots & \boldsymbol{\phi}_{MN}\end{bmatrix}\end{gathered}$$

并且具有正交性：

① 为了使所分析的系统更快地逼近于实际工况，可将非线性函数中的非线性阻尼力和非线性弹性力分别化为等效平均阻尼力加残余非线性阻尼力以及等效平均弹性力加残余非线性弹性力，然后再求派生系统的固有频率和振型函数。

$$X_{M_j} M X_{M_i} = 0$$

$$X_{M_j} K X_{M_i} = 0 \qquad i \neq j \tag{8-5}$$

而 a 和 θ 是实的任意常数，由初始条件来决定。按照上述方程可以求出固有频率 ω_j 和振型函数 ϕ_{M_j}。

8.1.2 方程组(8-1)的单频振动

我们考虑未扰方程(8-2)的频率为 ω_{01} 的主振动

$$x_1 = \phi_{M_1} a \cos(\omega_{01} t + \theta) \tag{8-6}$$

同时，提出以下三点假设：

1. 未扰系统存在着依赖于两个任意常数的，频率为 ω_{01} 的简谐振动；
2. 在未扰系统中，相应于平衡状态的惟一解是平凡解 $x=0$；
3. 频率 ω_{01} 和它的整数倍的任一频率 $\omega_{01}, 2\omega_{01}, 3\omega_{01}, 4\omega_{01}, \cdots, k\omega_{01}$ 都不等于系统任何固有频率，即不存在内共振。

在这些假设条件下，非线性方程组(8-1)有以下形式的解

$$x_1 = \phi_{M_1} a\cos(\omega_1 t + \vartheta) + \varepsilon u_1(a, \omega_1 t + \vartheta) + \varepsilon^2 u_2(a, \omega_1 t + \vartheta) + \varepsilon^3 \cdots \tag{8-7}$$

其中 a 和 ψ 决定于下列微分方程

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \delta_1 a = [\varepsilon\delta_{11}(a) + \varepsilon^2\delta_{21}(a) + \cdots]a \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_1 = \omega_{01} + \varepsilon\omega_{11}(a) + \varepsilon^2\omega_{21}(a) + \varepsilon^3 \cdots \end{aligned} \tag{8-8}$$

现在我们来求一次近似解和二次近似解。首先将方程组变换到主坐标上，这种变换方法已在线性振动的模态分析理论中有过详细叙述，读者可参阅有关书籍。

假设 x 为主振动，所以有如下一次近似假设，这里引用新的变量 z：

$$x_1 = \phi_{M_1} a\cos\psi = \phi_{M_1} z \tag{8-9}$$

主质量 M_1 和主刚度 k_1 分别可表示为

$$\begin{aligned} M_1 &= \phi_{M_1}^T M \phi_{M_1} \\ M_1\omega_1^2 &= k_1 = \phi_{M_1}^T K \phi_{M_1} \end{aligned} \tag{8-10}$$

而主坐标上的扰动力为

$$\varepsilon\phi_{M_1}^T Q_1^{(1)} + \varepsilon^2\phi_{M_1}^T Q_1^{(2)} \tag{8-11}$$

这样，第一主坐标上的方程式为

$$M_1\left(\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_1^2 z\right) = \varepsilon\phi_{M_1}^T Q_1^{(1)} + \varepsilon^2\phi_{M_1}^T Q_1^{(2)} \tag{8-12}$$

假设 $z = a\cos\psi$，利用迦辽金方法，得到以下谐波平衡方程式

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi}\left\{M_1\left(\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_1^2 z\right) - \varepsilon\phi_{M_1}^T Q_1^{(1)} + \varepsilon^2\phi_{M_1}^T Q_1^{(2)}\right\}\cdot\cos\psi d\psi = 0 \\ &\int_0^{2\pi}\left\{M_1\left(\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_1^2 z\right) - \varepsilon\phi_{M_1}^T Q_1^{(1)} + \varepsilon^2\phi_{M_1}^T Q_1^{(2)}\right\}\cdot\sin\psi d\psi = 0 \end{aligned} \tag{8-13}$$

由于在主坐标上的方程是独立的，可以用单自由系统的求解方法进行求解。方程(8-1)的右边部分为非线性函数。由此可以求得

$$\varepsilon\delta_{11}(a)=\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_{01}M_1a}\cdot\int_0^{2\pi}\Phi_{M_1}^TQ_0^{(1)}(a,\psi)_1\sin\psi\mathrm{d}\psi$$

$$\varepsilon\omega_{11}(a)=\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_{01}M_1a}\cdot\int_0^{2\pi}\Phi_{M_1}^TQ_0^{(1)}(a,\psi)_1\cos\psi\mathrm{d}\psi$$

$$Q_0^{(1)}(a,\psi)_1=Q^{(1)}(\varphi_{11}z,\cdots,\varphi_{N1}z,\varphi_{11}z,\cdots,\varphi_{N1}z,\varphi_{11}z,\cdots,\varphi_{N1}z)\Big|_{z=a\cos\psi}\tag{8-14}$$

方程(8-12)的一次近似解

$$x=\Phi_{M_1}a\cos(\omega_{01}t+\vartheta)$$

式中

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\varepsilon\delta_{11}(a)a$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}=\omega_{01}+\varepsilon\omega_{11}(a)\tag{8-15}$$

改进的一次近似解可由以下方法求出，将$\{Q_0^{(1)}\}_1$展为富氏级数

$$\varepsilon Q_0^{(1)}(a,\psi)_1=\varepsilon\left\{g^{(0)}(a)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[g^{(k)}(a)\cos k(\omega_{01}t+\vartheta)+h^{(k)}(a)\sin k(\omega_{01}t+\vartheta)\right]\right\}\tag{8-16}$$

式中

$$g^{(0)}(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Q_0^{(1)}(a,\psi)\mathrm{d}\psi$$

$$g^{(k)}(a)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}Q_0^{(1)}(a,\psi)\cos k\psi\mathrm{d}\psi\tag{8-17}$$

$$h^{(k)}(a)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}Q_0^{(1)}(a,\psi)\sin k\psi\mathrm{d}\psi$$

$$(k=1,2,\cdots)$$

级数中含有频率为$k\omega_{01}$的各项将引起高次谐波振动，这时，方程的改进的一次近似解可表示为

$$x_1=\Phi_{M_1}a\cos\psi+\varepsilon u_1(a,\psi)_1\tag{8-18}$$

式中之 a 和 ψ 按式(8-15)计算。

广义力$Q_1^{(1)}$(保持一次小量)中的高次谐波成份将引起的强迫振动为

$$\begin{aligned}\varepsilon u_1(a,\omega_1t+\vartheta)=&\Phi_{M_j}\frac{\Phi_{M_j}^Tg_r^{(0)}(a)}{M_j\omega_j^2}\\&+\varepsilon\Phi_{M_j(j\neq1)}\frac{\Phi_{M_j}^T\left[g_r^{(1)}(a)\cos(\omega_1t+\vartheta)+h_r^{(1)}(a)\sin(\omega_1t+\vartheta)\right]}{M_j(\omega_j^2-\omega_1^2)}\\&+\varepsilon\sum_{k=2}^{\infty}\Phi_{M_j}\frac{\Phi_{M_1}^T\left[g_r^{(1)}(a)\cos k(\omega_1t+\vartheta)+h_r^{(1)}(a)\sin k(\omega_1t+\vartheta)\right]}{M_j(\omega_j^2-k^2\omega_1^2)}\\&(j,k=1,2,\cdots,N)\end{aligned}\tag{8-19}$$

二次近似解的 a 和 ψ 可按下式计算

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=[\varepsilon\delta_{11}(a)+\varepsilon^2\delta_{21}(a)]a$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}=\omega_{01}+\varepsilon\omega_{11}(a)+\varepsilon^2\omega_{21}(a)\tag{8-20}$$

$\delta_{21}(a)$和$\omega_{21}(a)$的求解要较$\delta_{11}(a)$和$\omega_{11}(a)$复杂得多。在式(8-13)中，一次谐波只在比例于$\boldsymbol{\phi}_{M_2},\boldsymbol{\phi}_{M_3},\cdots$的项中出现，并且有

$$\boldsymbol{\phi}_{M_1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_{M_j}=0 \qquad \boldsymbol{\phi}_{M_1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}_{M_j}=0 \qquad (j=2,3,\cdots) \tag{8-21}$$

所以表达式$u_1(a,\psi),u_2(a,\psi)$中不含一次谐波。

表达式$M_1\left(\frac{d^2z}{dt^2}+\omega_1^2z\right)$仅由$\psi$的一次谐波项构成，所以方程(8-12)与以下表示式

$$\varepsilon\boldsymbol{\phi}_{M_1}^T\boldsymbol{Q}^{(1)}+\varepsilon^2\boldsymbol{\phi}_{M_1}^T\boldsymbol{Q}^{(2)}$$

的一次谐波等价。我们将利用符号$H_1\{F\}$表示任意周期函数$F(\psi)$的一次谐波

$$H_1\{F\}=\cos\psi\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(\psi)\cos\psi d\psi+\sin\psi\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(\psi)\sin\psi d\psi \tag{8-22}$$

由此可得以下表示式

$$M_1\left(\frac{d^2z}{dt^2}+\omega_1^2z\right)=H_1\left\{\boldsymbol{\phi}_{M_1}^T\left[\varepsilon Q_r^{(1)}(\varphi_1^{(1)}x+\varepsilon u_1^{(1)},\cdots)+\varepsilon^2Q_r^{(2)}(\varphi_1^{(1)}x,\cdots)\right]\right\} \tag{8-23}$$

因为$x=a\cos\psi$，所以

$$\begin{aligned}\frac{d^2z}{dt^2}+\omega_1^2z=&\varepsilon[-2\omega_{01}\delta_{11}\sin\psi-2\omega_{01}\omega_{11}\cos\psi]a\\&+\varepsilon^2\left[\left(\delta_{11}\frac{d(\delta_{11}a)}{da}-\omega_{11}^2-2\omega_{01}\omega_{21}\right)a\cos\psi\right.\\&\left.-\left(2\omega_{01}\omega_{21}+2\delta_{11}\omega_{11}+\delta_{11}\frac{d\omega_{11}}{da}a\right)a\sin\psi\right]\end{aligned} \tag{8-24}$$

将方程(8-24)的右边展开，同时仅保持前两项，于是得

$$\begin{aligned}&H_1\{\boldsymbol{\phi}_{M_1}^TQ(x_1,\cdots,x_N,\dot{x}_1,\cdots,\dot{x}_N,\varepsilon)\}\\&=[\varepsilon L_1(a)+\varepsilon^2L_2(a)]\cos\psi+[\varepsilon N_1(a)+\varepsilon^2N_2(a)]\sin\psi\end{aligned} \tag{8-25}$$

对式(8-23)和式(8-24)右边部份同次项和ε的同次幂的系数进行比较，得，

$$\begin{aligned}&\delta_{11}(a)a=-\frac{N_1(a)}{2\omega_{01}M_1},\quad \omega_{11}(a)=-\frac{L_1(a)}{2\omega_{01}M_1a}\\&\delta_{21}(a)=-\frac{\delta_{11}(a)\omega_{11}(a)}{\omega_{01}}-\frac{\delta_{11}(a)a}{2\omega_{01}}\frac{d\omega_{11}(a)}{da}-\frac{N_2(a)}{2\omega_{01}M_1a_1}\\&\omega_{21}(a)=-\frac{\omega_{11}^2(a)}{2\omega_{01}}+\frac{\delta_{11}(a)}{2\omega_{01}}\frac{d(\delta_{11}(a)a)}{da}-\frac{L_2(a)}{2\omega_{01}M_1a}\end{aligned} \tag{8-26}$$

在二次近似的情况下，a和ψ可由下式决定

$$\begin{aligned}&\frac{da}{dt}=-\frac{\varepsilon N_1(a)+\varepsilon^2N_2(a)}{2\omega_{01}M_1}-\frac{\varepsilon^2\delta_{11}(a)a\omega_{01}(a)}{\omega_{01}}-\frac{\varepsilon^2\delta_{11}(a)}{2\omega_{01}}\frac{d\omega_{11}(a)}{da}a^2\\&\frac{d\psi}{dt}=\omega_{01}-\frac{\varepsilon L_1(a)+\varepsilon^2L_2(a)}{2\omega_{01}M_1a}-\frac{\varepsilon^2\omega_{11}^2(a)}{2\omega_{01}}+\frac{\varepsilon^2\delta_{11}(a)a}{2\omega_{01}}\frac{d(\delta_{11}(a)a)}{da}\end{aligned} \tag{8-27}$$

对于稳态情况下的单频振动，相位角ψ以某个角速度$\omega_1(a)$匀速地转动。

$$\psi=\omega_1(a)+\vartheta,\quad \vartheta=\text{const} \tag{8-28}$$

由方程(8-27)，可求得

$$\omega_1(a)=\omega_{01}-\frac{\varepsilon L_1(a)+\varepsilon^2L_2(a)}{2\omega_{01}M_1a}-\frac{\varepsilon^2\omega_{11}^2(a)}{2\omega_{0_1}}+\frac{\varepsilon^2\delta_{11}(a)}{2\omega_{01}}\frac{d(\delta_{11}(a)a)}{da} \tag{8-29}$$

和
$$N_1(a)+\varepsilon N_2(2)+\varepsilon 2M_1\delta_{11}(a)a\omega_{11}(a)+\varepsilon M_1\delta_{11}(a)\frac{\mathrm{d}\omega_{11}(a)}{\mathrm{d}a}a^2=0$$
或
$$\delta_{11}(a)+\varepsilon\delta_{21}(a)=0 \tag{8-30}$$
在精确到二阶数值时可以写出
$$\varepsilon N_1(a)+\varepsilon^2N_2(a)=0 \tag{8-31}$$
和
$$\omega_1(a)=\omega_{01}-\frac{\varepsilon L_1(a)+\varepsilon^2L_2(a)}{2\omega_{01}M_1a}-\frac{\varepsilon^2\omega_{11}^2(a)}{2\omega_{01}}$$
考虑式(8-27),则有
$$\omega_1(a)=\omega_{01}-\frac{\varepsilon L_1(a)}{2\omega_{01}M_1a}-\frac{\varepsilon^2}{2\omega_{01}}\left(\frac{L_1(a)}{2\omega_{01}M_1a}\right)^2-\frac{\varepsilon^2L_1^2(a)}{2\omega_{01}M_1a} \tag{8-32}$$
如果略去二阶以上小量,便可求出下列定常振动频率平方值的表示式
$$\omega_1^2(a)=\omega_{01}^2-\frac{\varepsilon L_1(a)+\varepsilon^2L_2(a)}{M_1a} \tag{8-33}$$

计算多自由度系统振动的步骤可简述如下:首先求未扰系统,即线性系统的各阶固有频率与振型,再求作用于第一主坐标上的广义力,并建立第一主坐标上的独立方程式;将所得到的作用于第一主坐标上的广义力表达式展为富氏级数;然后,在保留到二阶小量的精度下,求方程的一次近似解、改进的一次近似解和二次近似解。令正弦项前面的系数等于零,我们就可以求得方程(8-31),由该方程确定振动的定常振幅,将余弦项前面的系数代入式(8-33)的右端,即可求出定常振动的频率。

8.2 弱非线性多自由度非自治系统的渐近法

现在我们讨论在周期力作用下的多自由度非线性系统的求解方法。广义干扰力的表达式为
$$\begin{aligned}Q(\nu t,x_1,\cdots,x_N,\dot{x}_1,\cdots,\dot{x}_N,\varepsilon)&=\varepsilon Q^{(1)}(\nu t,x_1,\cdots,x_N,\dot{x}_1,\cdots,\dot{x}_N,\varepsilon)\\&+\varepsilon^2Q^{(2)}(\nu t,x_1,\cdots,x_N,\dot{x}_1,\cdots,\dot{x}_N,\varepsilon)+\cdots\end{aligned} \tag{8-34}$$
非线性振动的微分方程式有以下形式
$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}&=\varepsilon\boldsymbol{Q}^{(1)}(\nu t,x_1,\cdots,x_N,\dot{x}_1,\cdots,\dot{x}_N,\varepsilon)\\&+\varepsilon^2\boldsymbol{Q}^{(2)}(\nu t,x_1,\cdots,x_N,\dot{x}_1,\cdots,\dot{x}_N,\varepsilon)+\cdots\end{aligned} \tag{8-35}$$
和前一节相似,可以假设广义干扰力是关于 νt 的周期为 2π 的函数,并且能展为富氏级数。

未扰方程组
$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}=0 \tag{8-36}$$
和上一节的假定相似,按照上式,可求出未扰系统的固有频率和振型。并可设方程(8-35)有以下形式的解
$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\phi}_{M_1}a\cos\psi+\varepsilon\boldsymbol{u}_1(a,\nu t,\psi)+\varepsilon^2\boldsymbol{u}_2(a,\nu t,\psi)+\cdots \tag{8-37}$$
式中,$\boldsymbol{u}_1(a,\theta,\psi)$,$\boldsymbol{u}_2(a,\theta,\psi)$,是两个角变量的周期为 2π 的周期函数。

现在我们来研究非线性非自治振动系统的非共振解和近共振解,与自治系统不同,自治系统非线性作用力仅是 ψ 的函数;而非自治系统的非线性作用力是两个自变量 νt,ψ 的函数,因此,在求解过程中要较自治系统复杂得多。

8.2.1 非共振情况

在非共振情况下,振幅 a 和相位 ψ 应由下式确定

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=\left[\varepsilon\delta_{11}(a)+\varepsilon^2\delta_{21}(a)+\varepsilon^3\cdots\right]a\\\frac{d\psi}{dt}&=\omega_{01}+\varepsilon\omega_{11}(a)+\varepsilon^2\omega_{21}(a)+\varepsilon^3\cdots\end{aligned}\tag{8-38}$$

为了求出未知函数 $\boldsymbol{u}_1(a,\theta,\psi)$, $u_2(a,\theta,\psi)$, $\delta_{11}(a)$, $\delta_{21}(a)$, $\omega_{11}(a)$, $\omega_{21}(a)$,我们可以直接采用在分析单自由度系统时所得的结果。

代替描述单频振动状态的方程组(8-35),可以写出第一主坐标上的方程

$$M_1\left(\frac{d^2z}{dt^2}+\omega_1^2z\right.$$
$$=\varepsilon\boldsymbol{\phi}_{M_1}^T\boldsymbol{Q}_0^{(1)}\left(\nu t,\varphi_1^{(1)}x,\cdots,\varphi_N^{(1)},\varphi_N^{(1)}x,\varphi_1^{(1)}\dot{x},\cdots,\varphi_N^{(1)}x,\varphi_1^{(1)}x,\cdots,\varphi_N^{(1)},\varepsilon\right)\tag{8-39}$$

对以上方程,可求出

$$\begin{aligned}\varepsilon\delta_{11}(a)&=-\frac{\varepsilon}{4\pi^2\omega_{01}M_1a}\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\boldsymbol{\phi}_{M_1}^TQ_0^{(1)}(a,\theta,\psi)\cdot\sin\psi d\theta d\psi\\\varepsilon\omega_{11}(a)&=-\frac{\varepsilon}{4\pi^2\omega_{01}M_1a}\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\boldsymbol{\phi}_{M_1}^TQ_0^{(1)}(a,\theta,\psi)\cdot\cos\psi d\theta d\psi\end{aligned}\tag{8-40}$$

式中

$$\begin{aligned}&Q_0^{(1)}(a,\theta,\psi)\\&=\varepsilon Q^{(1)}\left(\theta,\varphi_1^{(1)}a\cos\psi,\cdots,\varphi_N^{(1)}a\cos\psi,-\varphi_1^{(1)}a\omega_1\sin\psi,\cdots,\right.\\&\left.-\varphi_N^{(1)}a\omega_1\sin\psi,-\varphi_1^{(1)}a\omega^2\cos\psi,\cdots\right)\end{aligned}\tag{8-41}$$

现在来求由非线性作用力所引起的等于或高于二阶的高频振动。先把上式展为富氏级数

$$\varepsilon\boldsymbol{Q}_0^{(1)}(a,\theta,\psi)=\varepsilon\sum_n\sum_m\boldsymbol{Q}_0^{(1)}(a)e^{i(n\nu t+m\psi)}\tag{8-42}$$

式中

$$\boldsymbol{Q}_0^{(1)}=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\boldsymbol{Q}_0^{(1)}(a,\theta,\psi)e^{-i(n\theta+m\psi)}d\theta d\psi\tag{8-43}$$

由非线性作用力引起的强迫振动 $\{u_1(a,\theta,\psi)\}$ 可由下式求出

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_1=\varepsilon\sum_n\sum_m\boldsymbol{Q}_{0\ 1}^{(1)}e^{i(n\nu t+m\psi)}\tag{8-44}$$

式中 $\psi=\omega_1+\theta$。

现在来求未知函数 $\boldsymbol{u}_1(a,\theta,\psi)$,并将它表示为级数形式

$$\boldsymbol{u}_1(a,\nu t,\psi)=\sum_n\sum_m\boldsymbol{k}_{n,m}(a)e^{i(n\nu t+m\psi)}\tag{8-45}$$

将 $\boldsymbol{u}_1(a,\theta,\psi)$ 的值代入方程,并令方程两侧同次谐波的系数相等,就得到用来确定 $\boldsymbol{u}_1(a,\theta,\psi)$ 值的代数方程,并令同次的系数相等,就得到用来确定系数 $\boldsymbol{k}_{n,m}(a)$ 的代数方程组

$$\{\boldsymbol{M}(-\omega_1m^2-2\nu\omega_1mn-\nu^2n^2)+\boldsymbol{K}\}\boldsymbol{k}_{n,m}(a)=\boldsymbol{Q}_0^{(1)}(a)\tag{8-46}$$

为求解这个方程组,我们利用主坐标。

将 $k_{n,m}^{(s)}(a)$ 记为如下形式

$$k_{n,m}(a)=\phi_{M_k}d_k \tag{8-47}$$

这时 ϕ_{M_k} 是主振型，d_k 是特定的未知函数。

将上式代入方程组(8 46)，并考虑到 ϕ_{M_k} 满足齐次代数方程组

$$(\quad M\omega_k^2+K)\phi_{M_k}=0 \tag{8-48}$$

这时可以求得

$$M\left[\omega_k^2-(\omega_1 m+n\nu)^2\right]\phi_{M_k}d_k \quad Q_0^{(1)}(a) \tag{8-49}$$

将这方程两侧相应地乘上 $\phi_{M_k}^T$，得

$$\phi_{M_k}^T M\left[\omega_k^2-(\omega_1 m+n\nu)^2\right]\phi_{M_k}d_k=\phi_{M_k}^T Q_0^{(1)}(a) \tag{8-50}$$

注意到主函数的正交性，可得

$$d_k=\frac{\phi_{M_k}^T Q_0^{(1)}(a)}{M_k\left[\omega_k^2-(\omega_1 m+\nu n)^2\right]} \tag{8-51}$$

将 d_k 的值代入式(8 46)，经简单运算得到

$$u_1(a,\theta,\psi)_k=\sum_n\sum_m\phi_{M_k}\frac{\phi_{M_k}^T Q_0^{(1)}(a)e^{i(n\nu t+m\psi)}}{M_k\left[\omega_k^2-(\omega_1 m+\nu n)^2\right]} \tag{8-52}$$

为了使表达式“正规化”，我们注意到式子的右端在 n, m 满足 $\pm\omega_1=n\nu+m\omega_1$ 时是无界的。这个式子等效于以下等式

$$n^2+(m^2-1)^2=0$$

$$n=0 \qquad m=\pm 1 \tag{8-53}$$

于是可得到 $u_1(a,\theta,\psi)$ 的以下表达式

$$u_1(a,\nu t,\psi)=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{(当k=1时,\,n\neq 0,\,m\neq\pm 1,}\sum\phi_{M_k}\times\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi_{M_k}^T\left[Q_{\nu 0}^{(1)}(a,\theta,\psi)e^{-i(n\theta+m\psi)}d\theta d\psi\right]e^{-i(n\nu t+m\psi)}}{M_k\left[\omega_k^2-(\omega_1 m+\nu n)^2\right]} \tag{8-54}$$

进而可求出改进的一次近似解

$$x=\phi_{M_1}\{z\}+\varepsilon u_1(a,\theta,\psi)_1+\varepsilon^2 u_2(a,\theta,\psi)_1$$

经过简单运算以后便可求得

$$\delta_{21}(a)=\frac{1}{2\omega_{01}}\left[\frac{d\omega_{11}(a)}{da}\delta_{11}(a)+2\delta_{11}(a)\omega_{11}(a)\right]$$

$$\frac{1}{2\pi^2\omega_{01}M_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi_{M_k}^T\bar{Q}^{(2)}(a,\theta,\psi)\sin\psi d\theta d\psi$$

$$\omega_{21}(a)=\frac{1}{2\omega_{01}}\left[\frac{d(\delta_{11}(a)a)}{da}\delta_{11}(a)-\omega_{11}^2(a)\right]$$

$$\frac{1}{2\pi^2\omega_{01}M_1 a}\int_0^{2\pi}\phi_{M_k}^T\bar{Q}^{(2)}(a,\theta,\psi)\cos\psi d\theta d\psi \tag{8-55}$$

式中

$$\bar{Q}^{(2)}(a,\theta,\psi)=Q_0^{(2)}(\theta,a,\psi)+\left\{\frac{\partial Q_0^{(1)}}{\partial x}{}_1 u_1(a,\theta,\psi)+\frac{\partial Q_0^{(1)}}{\partial \dot{x}}\right.$$

$$\left.\times\left[\phi_{M_1}\delta_{11}(a)a\cos\psi-\phi_{M_1}a\omega_{11}(a)\sin\psi+\frac{\partial u_{1_1}}{\partial\psi}\omega_{01}+\frac{\partial u_1}{\partial t}\right]\right\} \quad (8\text{-}56)$$

$$\left(x=\phi_{M_1}a\cos\psi \qquad \dot{x}=-\phi_{M_1}a\omega_{01}\sin\psi\right)$$

8.2.2 共振情况

我们将不考虑 $\omega_{01}-\frac{p}{q}\nu$ 的共振的一般情况，而考虑下面一种典型情况：$p=q=1$。

方程组的解可写成如下形式

$$x=\phi_{M_1}a\cos(\nu t+\vartheta)+\varepsilon u_1(a,\theta,\psi)_1+\varepsilon^2 u_2(a,\theta,\psi)_1 \quad (8\text{-}57)$$

式中　$\psi=\nu t+\vartheta$；$u_1(a,\nu t,\psi)$，$u_2(a,\nu t,\psi)$是两个角变量的周期为 2π 的周期函数。

a 和 ψ 可由下式决定

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\left[\varepsilon\delta_{11}(a,\vartheta)+\varepsilon^2\delta_{21}(a,\vartheta)+\varepsilon^3\cdots\right]a$$

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}=\omega_{01}-\nu+\varepsilon\omega_{11}(a,\vartheta)+\varepsilon^2\omega_{21}(a,\vartheta)+\varepsilon^3\cdots \quad (8\text{-}58)$$

要解出一次和二次近似解，我们必须求得 $u_1(a,\nu t,\psi)$，$u_2(a,\nu t,\psi)$，$\delta_{11}(a,\vartheta)$，$\delta_{21}(a,\vartheta)$，$\omega_{11}(a,\vartheta)$，$\omega_{21}(a,\vartheta)$的表示式。为了确定 $\delta_{11}(a,\vartheta)$，$\delta_{21}(a,\vartheta)$，$\omega_{11}(a,\vartheta)$，$\omega_{21}(a,\vartheta)$，采用单自由度振动系统所求得的公式，并用 ω_{01}代替单自由度系统的 ω_0，用 $\phi_{M_1}^T Q_0^{(1)}$ 代替单自由度系统的 $f_0(a,\theta,\psi)$。式中的非线性函数

$$Q_0^{(1)}(a,\theta,\psi)=Q^{(1)}\left(\theta,\varphi_1^{(1)}a\cos\psi,\cdots,-\varphi_1^{(1)}a\omega_1\sin\psi,\cdots,-\varphi_1^{(1)}a\omega^2\cos\psi\right) \quad (8\text{-}59)$$

利用这种方法，可求得求解 δ_{11}和 ω_{11}的方程组

$$(\omega_{01}-\nu)\frac{\partial\delta_{11}}{\partial\vartheta}-2a\omega_{11}$$

$$=\frac{1}{2\pi^2 M_1}\sum_{\sigma}e^{\iota\sigma q\vartheta}\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon\phi_{M_1}^T Q_0^{(1)}(\theta,a,\psi)_1\cdot e^{-\iota\sigma q\cdot\vartheta}\cos\psi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\psi$$

$$(\omega_{01}-\nu)\frac{\partial\omega_{11}}{\partial\vartheta}-2\omega_{11}\delta_{11}a$$

$$=\frac{1}{2\pi^2 M_1}\sum_{\sigma}e^{\iota\sigma q\vartheta}\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon\phi_{M_1}^T Q_0^{(1)}(\theta,a,\psi)_1\cdot e^{-\iota\sigma q\cdot\vartheta}\sin\psi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\psi \quad (8\text{-}60)$$

$$\vartheta=\psi-\theta$$

用以上公式，不难求出 δ_{11}，ω_{11}的特解。

同样 $u_1(\theta,a,\psi)$的表示式可写为

$$u_1(a,\nu t,\nu t+\vartheta)=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n}\sum_{m}{}_{(\text{对}k=1,\,n+m\pm1\neq0)}\phi_{M_k}$$

$$\times\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi_{M_1}^T Q_{0\ 1}^{(1)}e^{-\iota(n\nu t+m\psi)}}{M_k\left[\omega_k^2-(\omega_{01}m+\nu n)^2\right]}e^{\iota(n\nu t+m(\nu t+\vartheta))} \quad (8\text{-}61)$$

后面我们将讨论一种特殊的情况，即在简谐干扰力作用下的多自由度系统的振动，广义干扰力可表示为

$$Q_0^{(1)}(\theta,a,\psi)=\varepsilon Q^{(1)}(\theta,\varphi_{11}a\cos\psi,\cdots,-\varphi_{11}a\omega\sin\psi,\cdots,-\varphi_{11}a\omega^2\cos\psi)+\varepsilon E\sin\theta \tag{8-62}$$

这时方程组具有以下形式

$$M\ddot{x}+Kx=\varepsilon Q^{(1)}(Q,\varphi_{11}a\cos\psi,\cdots,-\varphi_{11}a\omega\sin\psi,\cdots,-\varphi_{11}a\omega^2\cos\psi)+\varepsilon E\sin\theta \tag{8-63}$$

下面将考虑 $p=q=1$ 的主共振情况，按上述一般方法，在第一次近似时，对应于接近第一主振动的单频振动的方程组的特解为

$$x=\phi_{M_1}a\cos(\theta+\vartheta) \tag{8-64}$$

式中的 a 和 ϑ 应由下式确定

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=-\frac{1}{2\pi\omega_1M_1}\int_0^{2\pi}Q_0^{(1)}(a,\psi)\sin\psi d\psi-\frac{\phi_{M_1}^TE}{M_{11}(\omega_1+\nu)}\cos\vartheta\\ \frac{d\vartheta}{dt}&=\omega_1-\nu-\frac{1}{2\pi\omega_1M_1a}\cdot\int_0^{2\pi}Q_0^{(1)}(a,\psi)\cos\psi d\psi+\frac{\phi_{M_{11}}^TE}{M_1a(\omega_1+\nu)}\sin\vartheta\end{aligned} \tag{8-65}$$

和以前一样，ω_1 是未扰系统的固有频率，ϕ_{M_1} 是齐次方程的非平凡解，而

$$Q_0^{(1)}(a,\psi)=\varepsilon Q_{r0}^{(1)}(\varphi_{11}a\cos\psi,\cdots,-\varphi_{11}a\omega_1\sin\psi,\cdots,\varphi_{11}a\omega^2\cos\psi) \tag{8-66}$$

$$(\theta+\vartheta=\psi)$$

对方程将作一些简化，引入以下符号

$$\begin{aligned}c_e(a)&=\frac{1}{\pi a\omega_1}\cdot\int_0^{2\pi}\phi_{M_1}^TQ_0^{(1)}\cdot\sin\psi d\psi\\ \omega_e^{(1)}(a)&=\omega_1-\frac{1}{2\pi\omega_1M_1a}\int_0^{2\pi}\phi_{M_1}^TQ_0^{(1)}\cos\psi d\psi\\ E^{(1)}&=\phi_{M_1}^TQ_0^{(1)}\end{aligned} \tag{8-67}$$

这时方程的一次近似解为

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=-\delta_e^{(1)}(a)a-\frac{\phi_{M_1}^TE^{(1)}}{M_1(\omega_{01}+\nu)}\cos\vartheta\\ \frac{d\vartheta}{dt}&=\omega_e^{(1)}(a)-\nu+\frac{\phi_{M_1}^TE^{(1)}}{M_1a(\omega_{01}+\nu)}\sin\vartheta\end{aligned} \tag{8-68}$$

式中

$$\delta_e^{(1)}(a)=\frac{c_e^{(1)}(a)}{2M_1}$$

参数 $\delta_e^{(1)}(a)$ 和 $\omega_e^{(1)}(a)$ 是以下方程确定的等效阻尼比和等效固有频率：

$$M_1\left(\frac{d^2z}{dt^2}+\omega_1^2z\right)=\varepsilon\phi_{M_1}^TQ_0^{(1)}(a,\psi)_1 \tag{8-69}$$

这样，在这种特殊情况下，对研究具有 N 个自由度的系统的共振时所得出的第一近似方程，和以前研究单自由度系统时所得的方程完全一样。此系统受到作用于第一主坐标上的幅值为 $\phi_{M_1}^TE$ 的干扰力 $\phi_{M_1}^TQ_0^{(1)}{}_1$ 的作用。

下面我们将讨论具有常振幅和常相位角的定常振动状态。

令第一近似方程的右端为零，我们得到可用于确定振幅和相位角数值的方程式

$$\delta_e^{(1)}(a)a+\frac{E^{(1)}}{M_1(\omega_{01}+\nu)}\cos\vartheta=0$$
$$\omega_e^{(1)}(a)-\nu+\frac{E^{(1)}}{M_1a(\omega_{01}+\nu)}\sin\vartheta=0 \tag{8-70}$$

消去 ϑ，在带有二阶小量的前提下，得到定常情况下的振幅 a 和相位角 ϑ 和激振频率 ν 之间的关系式

$$M_1^2a^2\left[\left(\omega_e^{(1)2}(a)-\nu^2\right)^2+4\delta_e^{(1)2}(a)\nu^2\right]=E^2$$
$$\vartheta=\arctan\frac{\omega_e^{(1)}(a)-\nu}{\delta_e^{(1)}(a)} \tag{8-71}$$

按照上式可以画出共振曲线。

8.3 应用举例

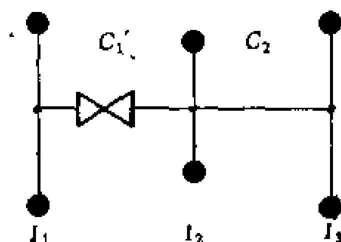


图 8-1　曲轴示意图

【例 8.3.1】 考虑图 8-1 所示的曲轴扭转振动系统，设第一圆盘与第二圆盘之间装有非线性弹性联轴器。为了简化，假设中间圆盘上作用着干扰力矩 $M=E\sin\theta$，式中 E 为干扰力矩幅值，而$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}=\nu$ 是曲轴的扭转振动的角频率，它与发动机的转速成正比，曲轴两端的扭转力矩均等于零。图 8-1 中所示的 I_1，I_2 和 I_3 为曲轴的转动惯量，而 φ_1，φ_2，φ_3 分别为三个圆盘相对于平均角位移的扭转振动的角位移。

该系统扭转振动的运动方程式为

$$I_1\ddot{\varphi}_1-k_1(\varphi_2-\varphi_1)-\varepsilon f(\varphi_2-\varphi_1)=0$$
$$I_2\ddot{\varphi}_2+k_1(\varphi_2-\varphi_1)+\varepsilon f(\varphi_2-\varphi_1)-k_2(\varphi_3-\varphi_2)=E\sin\theta+c(\dot{\varphi}_3-\dot{\varphi}_2) \tag{1}$$
$$I_3\ddot{\varphi}_3+k_2(\varphi_3-\varphi_2)=-c(\dot{\varphi}_3-\dot{\varphi}_2)$$

式中 $\varepsilon f(\varphi_2-\varphi_1)$为 I_1 和 I_2 之间的非线性力，c 为 I_3 和 I_2 之间的粘性阻尼系数。

令

$$\varphi_2-\varphi_1=q_1 \qquad \varphi_3-\varphi_2=q_2 \tag{2}$$

上述方程可表示为

$$I_2\ddot{q}_1+k_1\left(1+\frac{I_2}{I_1}\right)q_1-k_2q_2=-\left(1+\frac{I_2}{I_1}\right)\varepsilon f(q_1)+c\dot{q}_2+E\sin\theta$$
$$I_2\ddot{q}_2-k_1q_1+k_2\left(1+\frac{I_2}{I_3}\right)q_2=\varepsilon\cdot f(q_1)-c\left(1+\frac{I_2}{I_3}\right)\dot{q}_2-E\sin\theta \tag{3}$$

假设非线性作用力矩、摩擦力矩和干扰力矩均为小量，而干扰力矩的频率 ν 与扭转振动系统的主振动的第一固有频率 ω_1 相接近。在这种情况下，由非线性作用力激发起的频率为 ω_2 的振动将因为摩擦的存在而衰减。这时，方程组的相应的单频状态下接近于第一主振动的特解为

$$q_1=\varphi_1^{(1)}a\cos(\theta+\vartheta)$$
$$q_2=\varphi_2^{(1)}a\cos(\theta+\vartheta) \tag{4}$$

这里的 $\varphi_1^{(1)}$ 和 $\varphi_2^{(1)}$ 是振型函数，它是以下齐次代数方程式的非平凡解：

$$\begin{aligned}&\left[k_1\left(1+\frac{I_2}{I_1}\right)-\omega_1^2 I_2\right]\varphi_1^{(1)}-k_2\varphi_2^{(1)}=0 \qquad \frac{\varphi_2^{(1)}}{\varphi_1^{(1)}}=\frac{1}{k_2}\left[k_1\left(1+\frac{I_2}{I_1}\right)-\omega_1^2 I_2\right]\\ &-k_1\varphi_1^{(1)}+\left[k_2\left(1+\frac{I_2}{I_3}\right)-\omega_1^2 I_2\right]\varphi_2^{(1)}=0 \qquad \frac{\varphi_1^{(1)}}{\varphi_2^{(1)}}=\frac{1}{k_1}\left[k_2\left(1+\frac{I_2}{I_3}\right)-\omega_1^2 I_2\right]\end{aligned} \tag{5}$$

而 ω_1 是以下未扰系统的频率方程的根

$$\begin{vmatrix} k_1\left(1+\dfrac{I_2}{I_1}\right)-\omega^2 I_2 & -k_2 \\ -k_1 & k_2\left(1+\dfrac{I_2}{I_3}\right)\quad \omega^2 I_2 \end{vmatrix}=0 \tag{6}$$

利用式(3)和式(5),可建立第一主坐标上的方程式

$$\begin{aligned}M_1(\ddot{z}+\omega_1^2 z)=&\left[\varphi_2^{(1)}-\left(1+\frac{I_2}{I_1}\right)\varphi_1^{(1)}\right]\varepsilon f(\varphi_1^{(1)}a\cos\psi)\\ &+c\left[\left(1+\frac{I_2}{I_1}\right)\varphi_2^{(1)2}-\varphi_1^{(1)}\varphi_2^{(1)}\right]+E(\varphi_1^{(1)}-\varphi_2^{(1)})\sin\theta\end{aligned} \tag{7}$$

a 和 ϑ 应该由第一次近似方程决定

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}&=-\frac{c}{2M_1}\left[\left(1+\frac{I_2}{I_3}\right)\varphi_2^{(1)2}-\varphi_1^{(1)}\varphi_2^{(1)}\right]a-\frac{E^{(1)}}{M_1(\omega_1+\nu)}\cos\vartheta\\ \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}&=\omega_1-\nu-\frac{\varepsilon\left[\varphi_2^{(1)}-\left(1+\frac{I_2}{I_1}\right)\varphi_1^{(1)}\right]}{2\pi M_1\omega_1 a}\int_0^{2\pi}f(\varphi_1^{(1)}a\cos\psi,\cos\psi\mathrm{d}\psi+\frac{E^{(1)}}{M_1 a(\omega_1+\nu)}\sin\vartheta\end{aligned} \tag{8}$$

式中

$$M_1=I_2(\varphi_1^{(1)2}+\varphi_2^{(1)2}) \tag{9}$$

对定常状态下的 a 和 ϑ 值按公式(8)确定。

$$\begin{aligned}\delta_e^{(1)}(a)a+\frac{E^{(1)}}{M_1(\omega_1+\nu)}\cos\vartheta=0\\ \omega_e^{(1)}(a)-\nu+\frac{E^{(1)}}{M_1 a(\omega_1+\nu)}\sin\vartheta=0\end{aligned} \tag{10}$$

按照上一节得出的公式,不难求出

$$\begin{aligned}\delta_e^{(1)}(a)&=\frac{c}{2M_1}\left[\left(1+\frac{I_2}{I_3}\right)\varphi_2^{(1)2}-\varphi_1^{(1)}\varphi_2^{(1)}\right]\\ \omega_e^{(1)}(a)&=\omega_1-\frac{\varepsilon\left[\varphi_2^{(1)}-\left(1+\frac{I_2}{I_1}\right)\varphi_1^{(1)}\right]}{2\pi M_1\omega_1 a}\cdot\int_0^{2\pi}f(\varphi_1^{(1)}a\cos\psi)\cos\psi\mathrm{d}\psi\\ E^{(1)}&=E(\varphi_1^{(1)}-\varphi_2^{(1)})\end{aligned} \tag{11}$$

倘若此扭转系统中的弹性联轴器具有如图 8-2 所示的特性,则其共振曲线将如图 8-3 所示。

【例 8.3.2】 图 8-4 所示为弹性力对称和不对称两种形式的振动离心机的工作机构。偏心轮作反向同步回转,产生轴向激振力。机壳、非线性橡胶弹簧、主轴和筛篮组成主振动系统,在激振力的作用下产生的轴向振动。物料在离心力和轴向振动力的综合作用下,在锥体内单向滑动而不产生跳动,直至落入卸料槽中。由于采用对称或不对称的间隙弹簧,弹性

力呈折线变化，具有"硬式"特性，有利于提高脱水效率。

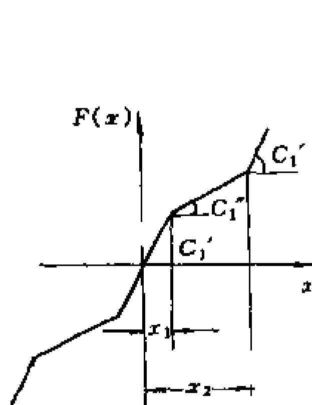


图 8-2 弹性联轴器的特性

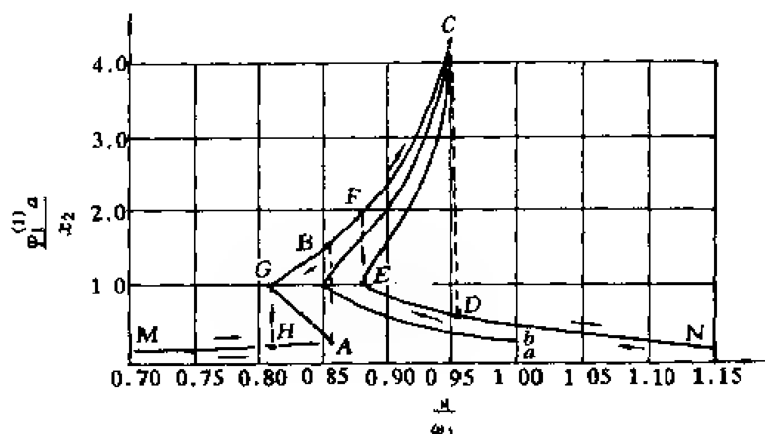
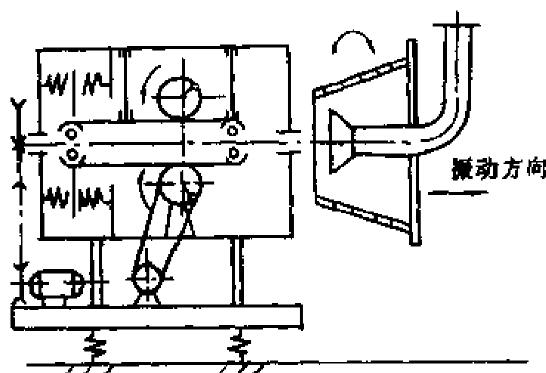
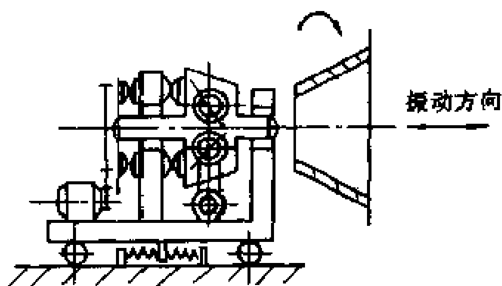


图 8-3 振动系统的共振曲线



(a) 对称式



(b)不对称式

图 8-4 振动离心脱水机的工作机构示意图

根据工艺要求，物料沿振动离心机锥体的内壁作间歇的正向滑动，实现离心脱水并自动排料，在这种机器中不会出现反向滑动或跳动。物料在一个运动周期内的运动状态如图 8-5 所示。在滑动区间内，物料作用在锥体上的力为正向滑动摩擦力和惯性力分量之和，在间歇区间内，物料与锥体之间相对静止，只有惯性力分量。

设 φ_k 为物料的滑始角，φ_m 为物料的滑止角。可以推出，在一个周期内物料的非线性惯性力可写成如下分段线方程

$$F_m(x_1)=\begin{cases}-m_m\ddot{x}_1\cos^2\beta & \varphi_m<\varphi<\varphi_k+2\pi\\ -m_m\mu\cos\beta(\Omega^2R_C\cos\beta+\dot{x}_1\sin\beta) & \varphi_k<\varphi<\varphi_m\end{cases}\tag{12}$$

式中 m_m——锥体中物料的质量；

β——锥体锥角的一半；

R_C——物料在锥体中的当量半径；

Ω——锥体回转角速度；

μ——物料滑动摩擦系数。

以不对称分段线性刚度的振动离心机为研究对象进行分析，其简化力学模型如图 8-6 所示。

考虑物料的非线性惯性力，并以小参数标记，其运动方程可以写成如下两自由度形式

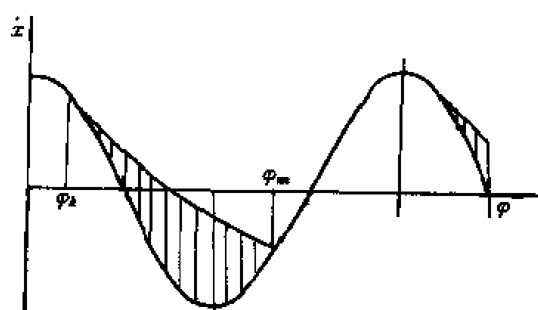


图 8-5　一个周期内物料的单向滑动运动

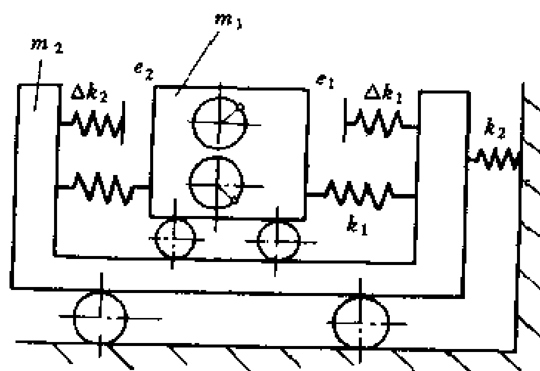


图 8-6　不对称振动离心机的力学模型

$$
\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}
$$

$$
= -\varepsilon\begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1+c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} - \varepsilon\begin{Bmatrix} f_m(\dot{x}_1)+f_k(x,\dot{x}) \\ -f_k(x,\dot{x}) \end{Bmatrix} + \varepsilon\begin{Bmatrix} E_0\sin\nu t \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{13}
$$

式中　x_1, x_2, x——质体 1 和质体 2 的位移、两者的相对位移，$x = x_1 - x_2$；

m_1, m_2——质量 1 和质量 2，质量 1 中还包含物料等效质量：$m_1 = m'_1 + m_m\sin^2\beta$，$m'_1$ 为质体 1 的质量；

k_1, k_2, c_1, c_2——质体 1 与质体 2 之间的弹簧在水平方向的刚度、质体 2 与基座之间的弹簧刚度以及相应的粘性阻尼系数；

E_0——偏心块产生的激振力，$E_0 = m_0\nu^2 r$，其中 m_0 为偏心块质量，r 为偏心距；

ν——偏心块回转角速度；

$f_k(x, \dot{x})$——质量 1 和质体 2 之间的不对称非线性弹性恢复力：

$$
f_k(x,\dot{x}) = \begin{cases} c\dot{x} & -e_2 < x < e_1 \\ c\dot{x} + \Delta c_1\dot{x} + \Delta k_1(x - e_1) & x \geqslant e_1 \\ c\dot{x} + \Delta c_2\dot{x} + \Delta k_2(x + e_1) & x \leqslant -e_2 \end{cases} \tag{14}
$$

式中　c——与线性弹簧 k_1 有关的阻尼系数；

$\Delta k_1, \Delta k_2$——左右间隙弹簧刚度；

$\Delta c_1, \Delta c_2$——与间隙弹簧有关的阻尼系数；

e_1, e_2——左右间隙。

振动离心脱水机通常在第二固有频率 ω_2 的邻近工作。设系统不存在内共振，只分析以 ω_2 为主振频率的振动，高频成分视为小项，这与工程实际需要相吻合。

根据系统的派生方程，可求得固有频率 ω_1, ω_2 以及相应的振型矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_M$：

$$
\boldsymbol{\Phi}_M = [\boldsymbol{\Phi}_{m_1}\ \boldsymbol{\Phi}_{m_2}] = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix} \tag{15}
$$

其中　$\varphi_{12} = 1, \quad \varphi_{22} = (k_1 - \omega_2^2 m_1)/k_1$　(16)

第二主质量和主刚度分别为

$$
M_2 = \boldsymbol{\Phi}_{m_2}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi}_{m_2} \quad K_2 = \boldsymbol{\Phi}_{m_2}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K} \boldsymbol{\Phi}_{m_2} \tag{17}
$$

下面对第二主振动的单频振动进行分析，记

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_2 = \boldsymbol{\Phi}_{m_2} z = \begin{Bmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \end{Bmatrix} z \tag{18}$$

这样，在第二主坐标上的运动方程为

$$M_2 \ddot{z} + K_2 z = \varepsilon \boldsymbol{\varphi}_{m_2}^T f_2 + \varepsilon \boldsymbol{\varphi}_{m_2}^T \boldsymbol{E}(t) \overset{\text{记作}}{=\!=} \varepsilon f + \varepsilon E_0 \sin\theta \tag{19}$$

其中，非线性项可以整理为：

$$f = a_0 \dot{z} - \begin{cases} a_1 z \\ a_2 + a_3 z \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ b_1 \dot{z} + b_2 z + b_3 \\ b_4 \dot{z} + b_5 z + b_6 \end{cases} \overset{\text{记作}}{=\!=} f_0 + f_m' + f_k' \tag{20}$$

$$a_0 = -(c_1 + \varphi_{22}^2 c_2 - \varphi_{22}^2 c + 2\varphi_{22} c - c),\ a_1 = m_m \cos^2\beta,\ a_2 = -m_m \mu \cos^2\beta \Omega^2 R_c$$

$$a_3 = -m_m \mu \cos\beta \sin\beta,\ b_1 = -(1-\varphi_{22})^2 \Delta c_1,\ b_2 = -(1-\varphi_{22})^2 \Delta k_1,$$

$$b_3 = (1-\varphi_{22}) \Delta k_1 e_1$$

$$b_4 = -(1-\varphi_{22})^2 \Delta c_2,\ b_5 = -(1-\varphi_{22})^2 \Delta k_2,\ b_6 = (\varphi_{22} - 1)\Delta k_2 e_2$$

并设 z 的一次近似解为：

$$z = a\cos\varphi = a\cos(\nu t + \nu) + \varepsilon u_1 + \cdots \tag{21}$$

在一次近似情况下，设 $\varphi_1 = \arccos \dfrac{e_1}{a(1-\varphi_{22})}$，为第一象限角，$\varphi_2 = \arccos \dfrac{-e_2}{a(1-\varphi_{22})}$，为第二象限角。等效阻尼系数和等效刚度分别是：

$$\begin{aligned} \delta_e(a) = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_2 M_2 a} \Big\{ & -\pi\omega_2 a_0 a - \frac{1}{2}(a_1 - a_3)\omega_2^2 a (\sin^2\varphi_m - \sin^2\varphi_k) \\ & + a_2(\cos\varphi_m - \cos\varphi_k) - b_1\omega_2 a\left(\varphi_1 - \frac{1}{2}\sin 2\varphi_1\right) - b_2\omega_2 a\left[\pi - \varphi_2 + \frac{1}{2}\sin 2\varphi_2\right] \Big\} \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} k_e(a) = K_2 - \frac{\varepsilon}{\pi a} \Big\{ & \pi\omega_2^2 a_1 a + \frac{1}{4}(a_1 - a_3)\omega_2^2 a (2\varphi_k + \sin 2\varphi_k + \sin 2\varphi_k - 2\varphi_m - \sin 2\varphi_m) \\ & + a_2(\sin\varphi_m - \sin\varphi_k) + b_1 a\left(\varphi_1 + \frac{1}{2}\sin 2\varphi_1\right) + 2b_3\sin\varphi_1 + b_5 a\left[\pi - \varphi_2 - \frac{1}{2}2\varphi_2\right] \\ & - 2b_6 \sin\varphi_2 \Big\} \end{aligned} \tag{23}$$

等效固有频率为：

$$\omega_e(a) = \sqrt{k_e(a)/M_2} \tag{24}$$

对如下两个一阶微分方程的求积分，可以确定振幅 a 和相位差角 θ

$$\dot{a} = -\delta_e(a) a - \frac{\varepsilon E_0}{M_2(\omega_2 + \nu)}\cos\theta,\ \dot{\theta} = \omega_e(a) - \nu + \frac{\varepsilon E_0}{M_2(\omega_2 + \nu) a}\sin\theta \tag{25}$$

对于工程上关心的定常状态，由 $\dot{a} = 0, \dot{\nu} = 0$ 得到频率响应方程为：

$$a^2 M_2^2 \{[\omega_e^2(a) - \nu^2]^2 + 4\delta_e^2(a)\nu^2\} = \varepsilon^2 E_0^2 \tag{26}$$

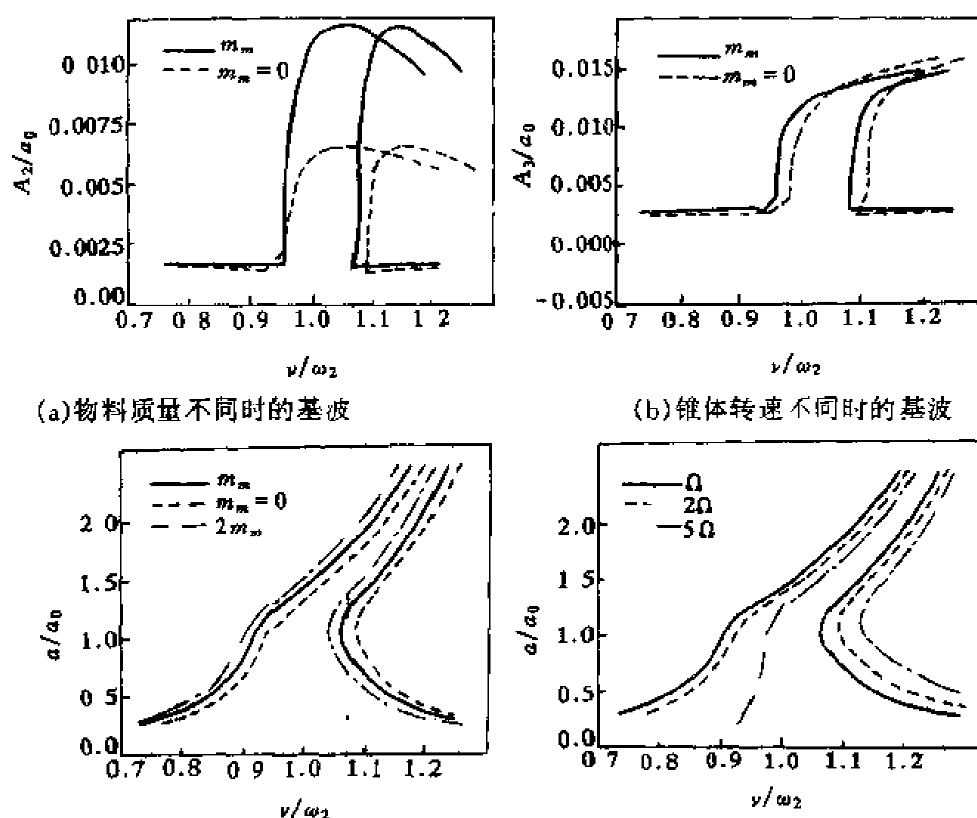
$$\theta = \arctan \frac{\omega_e^2(a) - \nu^2}{2\delta_e(a)\nu} \tag{27}$$

做进一步推导，可以求得包含二、三次谐波成分的修正项如下：

$$u_1 = \frac{1}{\pi\omega_2^2 M_2}\Big\{ -\frac{1}{3}\Big[\frac{1}{6}\omega_2^2 a(a_1 - a_3)(\sin 3\varphi_k + 3\sin\varphi_k - \sin 3\varphi_m - 3\sin\varphi_m)$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}a_2(\sin2\varphi_k-\sin2\varphi_m)+\frac{1}{3}b_2a(\sin3\varphi_1+3\sin\varphi_1)-\frac{1}{3}b_5a(\sin3\varphi_2+3\sin\varphi_2)\\
&+b_3\sin2\varphi_1-b_6\sin2\varphi_2\Big]\times\cos2\varphi-\frac{1}{3}\Big[\frac{1}{6}\omega_2^2a(a_1-a_3)(\cos3\varphi_m+3\cos\varphi_m-\cos3\varphi_k-3\cos\varphi_k)\\
&+\frac{1}{2}a_2(\cos2\varphi_m-\cos2\varphi_k)+\frac{1}{3}b_1\omega_2a(\sin3\varphi_1-3\sin\varphi_1)-\frac{1}{3}b_4\omega_2a(\sin3\varphi_2-3\sin\varphi_2)\Big]\times\sin2\varphi\\
&-\frac{1}{8}\Big[\frac{1}{8}(a_1-a_3)\omega_2^2a(\sin4\varphi_k+2\sin2\varphi_k-\sin\varphi_m-2\sin2\varphi_m)\\
&-\frac{1}{3}a_2(\sin3\varphi_m-\sin3\varphi_k)+\frac{1}{4}b_2a(\sin4\varphi_1+2\sin2\varphi_1)+\frac{2}{3}b_3\sin3\varphi_1\\
&+\frac{1}{4}b_5a(\sin4\varphi_2+2\sin2\varphi_2)-\frac{2}{3}b_6\sin3\varphi_2\Big]\times\cos3\varphi\\
&-\frac{1}{8}\Big[\frac{1}{8}(a_1-a_3)\omega_2^2a(\cos4\varphi_m+2\cos2\varphi_m-\cos\varphi_k-2\cos2\varphi_k)\\
&+\frac{1}{3}a_2(\cos3\varphi_m-\cos3\varphi_k)+\frac{1}{4}b_1\omega_2a(\sin4\varphi_1-2\sin2\varphi_1)\\
&-\frac{1}{4}b_4\omega_2a(\sin4\varphi_2-2\sin2\varphi_2)\Big]\times\sin3\varphi\Big\}+\cdots
\end{aligned}
\tag{28}
$$

从以上结果可以看出，非线性弹簧和物料对系统的等效刚度和等效阻尼系数均有直接影响，从而影响系统的振幅和相位差角。图 8-7 为某振动离心机振动系统频率响应曲线和高次谐波频率响应曲线。图 8-7(a)是取不同物料质量时(m_m，$2m_m$)的主共振曲线(a_0 为名义幅)，图 8-7(b)是不同锥体回转角速度(Ω，5Ω，8Ω)的主共振曲线。图 8-7(c)和图 8-7(d)是物料质量不同和锥体回转角速度不同时，二次和三次谐波共振曲线，其中 A_2，A_3 是相应的二次和三次谐波项的正弦与余弦项的合成。

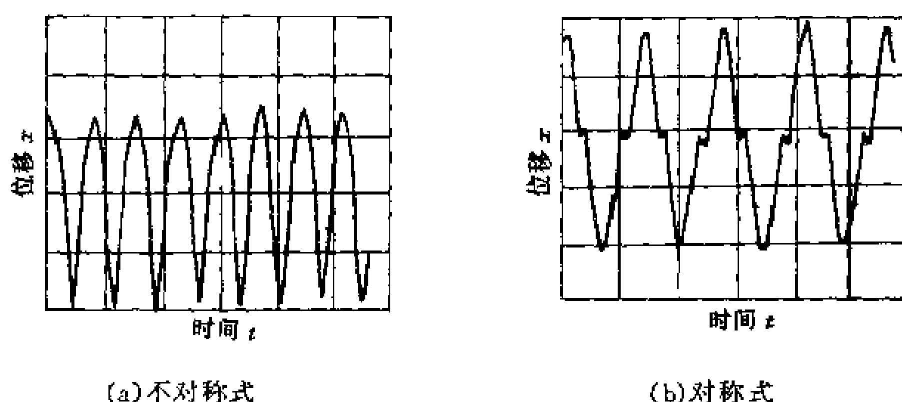


(a)物料质量不同时的基波　　(b)锥体转速不同时的基波

(c)有无非线性惯性力的二次谐波　(d)有无非线性惯性力的三次谐波

图 8-7　振动离心脱水机的幅频特性曲线

利用加速度传感器直接测得振动离心脱水机的筛篮沿轴向的振动加速度，所得曲线如图 8 8 所示。由图可以看出，不对称振动离心脱水机加速度曲线有明显的不对称特征，而对称振动离心脱水机的加速度曲线是对称的。两条曲线都有明显的非线性特征。



(a)不对称式　　(b)对称式

图 8-8　振动离心脱水机的试验加速度曲线

【例 8.3.3】 传统的原料破碎设备利用了冲击作用，作者研制出利用振动来提高破碎效率和破碎质量的一种新型振动圆锥式破碎机。

在激励力的作用下，新型振动破碎机的内破碎锥绕机器中心线作圆运动，内破碎锥时而靠近外破碎锥，时而离开外破碎锥，实现对物料的有效破碎。在破碎物料的过程中，存在许多非线性因素，其中最主要的是物料层的非线性特性。

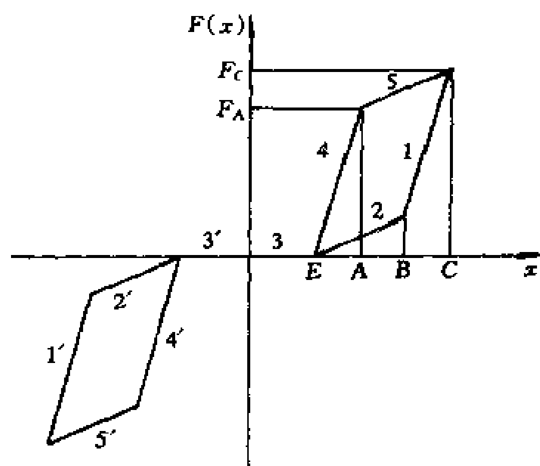


图 8-9　有间隙的滞回模型

根据物料破碎的机理及机器特殊的机构形式，可以认为在振动破碎机与物料相互作用的系统中，由于正向加卸载、反向加卸载以及矿石空隙的充填等因素影响，物料层的恢复力是一种特殊形式的滞回恢复力[218]。为简化起见，可以用图 8-9 所示的有间隙的双线性滞回模型表示，并可写成式(29)的形式。

$$F(x)=\begin{cases} k_1x+a_1\mathrm{sgn}(x) & \text{区间 }1,1' \quad x_B\leqslant |x|<x_C \\ k_2x+a_2\mathrm{sgn}(x) & \text{区间 }2,2' \quad e\leqslant |x|<x_B \\ 0 & \text{区间 }3,3' \quad |x|<e \\ k_1x+a_3\mathrm{sgn}(x) & \text{区间 }4,4' \quad e\leqslant |x|<x_A \\ k_2x+a_4\mathrm{sgn}(x) & \text{区间 }5,5' \quad x_A\leqslant |x|<x_C \end{cases} \tag{29}$$

式中，sgn 为符号函数，k_1 为弹性加载刚度；k_2 为塑性加载刚度；e 为间隙量；$a_1=-k_1x_C+F_C$；$a_2=-k_2e$；$a_3=-k_1e$；$a_4=-k_2x_A+F_A$。

内破碎锥受激振力作用，在 xoy 平面内沿 x 方向与 y 方向作往复运动，内破碎锥与外破碎锥之间是依靠物料来传递能量。考虑物料层的滞回恢复力作用，其振动系统的力学模型如图 8-10。

因为新型振动破碎机的结构具有对称性，在 x，y 方向的破碎过程及特性完全相同，所以只研究一个方向。x 方向的运动方程为：

$$m_1\ddot{x}_1 + r_{x1}\dot{x}_1 - r_{x1}\dot{x}_2 + F(x) = 2m_0 r\omega^2 \sin\omega t \tag{30}$$
$$m_2\ddot{x}_2 + r_{x1}\dot{x}_1 + (r_{x1} + r_{x2})\dot{x}_2 + k_{x2}x_2 - F(x) = 0$$

式中　x_1, x_2, x——质体 1 和质体 2 的位移及两者间的相对位移，$x = x_1 - x_2$；

m_1, m_2——质体 1 和质体 2 的参振质量；

r_{x1}——质体 1 的等效线性阻尼系数；

r_{x2}——质体 2 的等效线性阻尼系数；

k_{x2}——质体 2 与机座之间 x 方向的弹簧刚度；

m_0——激振器偏心块质量；

r——偏心块质心的回转半径；

ω——偏心块回转角速度；

$F(x)$——物料层在 x 方向上的滞回力，见式(29)。

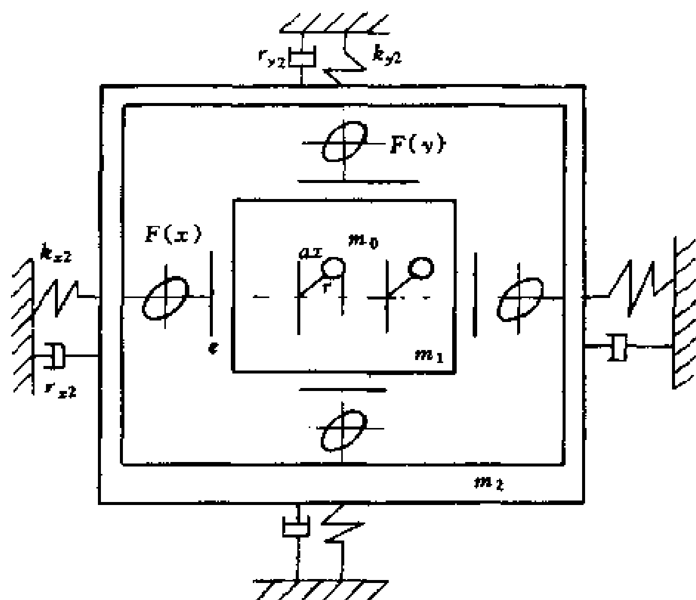


图 8-10　新型振动破碎机的力学模型

对于弱非线性问题，在一次近似的前提下，对物料非线性滞回力进行等效线性化表示，即

$$F(x) = r_e\dot{x} + k_e x + O(\varepsilon) \tag{31}$$

在求等效阻尼系数 r_e 和等效刚度 k_e 时，假设一次近似解的形式为

$$x = a\cos\varphi + \varepsilon u_1 + \cdots \tag{32}$$

并在具体处理时略去 εu_1 等小参数项。上式中 a 为相对位移 x 的振幅，φ 为相位角。记

$$\varphi_e = \arccos\frac{e}{a},\quad \varphi_a = \arccos\frac{x_A}{a},\quad \varphi_b = \arccos\frac{x_B}{a},\quad \varphi_c = 0 \tag{33}$$

则图 8-9 所示的 E, A, B, C 点对应的相位角分别为 $\varphi_e, 2\pi - \varphi_a, \varphi_b, \varphi_c$。其它各点对应的相位角也可由上述角度表达，从而可以确定 φ 在 $[0, 2\pi]$ 内的分段积分区间。

由渐近法导出物料层的等效阻尼系数和等效刚度为：

$$r_e = -\frac{1}{2\pi\omega a}\int_0^{2\pi}F(a\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi = -\frac{1}{2\pi\omega a}[2(F_C-k_1x_C)(1-\cos\varphi_b)$$
$$-2(F_A-k_2x_A)(1-\cos\varphi_a)+2k_1e(\cos\varphi_a-\cos\varphi_e)+2k_2e(\cos\varphi_e-\cos\varphi_b)$$
$$+(k_1-k_2)a\sin^2\varphi_a-(k_1-k_2)a\sin^2\varphi_e-k_2a\sin^2\varphi_b] \tag{34}$$

$$k_e = \frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}F(a\cos\varphi)\cos\varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi a}[a(k_1+k_2)(\varphi_e+\frac{1}{2}\sin2\varphi_e)$$
$$+a(k_1-k_2)(\varphi_b-\varphi_a+\frac{1}{2}\sin2\varphi_b-\frac{1}{2}\sin2\varphi_a)+2k_2e(\sin\varphi_B-\sin\varphi_e) \tag{35}$$

将物料滞回力 $F(x)$ 近似为等效阻尼力和等效弹性恢复力之和后，代入式(30)，并整理成矩阵形式为：

$$\boldsymbol{M}\ddot{x}+\boldsymbol{R}\dot{x}+\boldsymbol{K}x=\boldsymbol{E} \tag{36}$$

式中 $x=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}$，$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}m_1 & 0\\0 & m_2\end{bmatrix}$；

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}r_{x1}+r_e, & -r_{x1}-r_e\\-r_{x1}-r_e & r_{x1}+r_{x2}+r_e\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}k_e & -k_e\\-k_e & k_{x2}+k_e\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{E}=\begin{Bmatrix}2m_0r\omega^2\sin\omega t\\0\end{Bmatrix}$$

采用实模态阻尼假设，由

$$\det(\boldsymbol{K}-\omega_0^2\boldsymbol{M})=0 \tag{37}$$

得固有频率 ω_{0j}^2，$(j=1,2)$ 和相应的固有振型矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$。

利用 $\boldsymbol{\Phi}$ 将式(36)化为主坐标方程，记为：

$$m_{pj}\ddot{x}_{pj}+r_{pj}\dot{x}_{pj}+k_{pj}x_{pj}=F_{pj}e^{i\omega t}\quad (j=1,2) \tag{38}$$

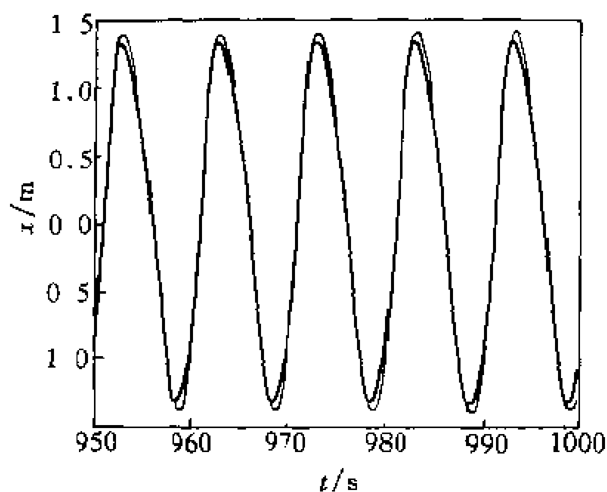
则主坐标下的解为：

$$x_{pj}=\frac{F_{pj}}{k_{pj}\sqrt{(1-s_j^2)^2+2(\zeta_js_j)^2}}e^{i(\omega t-\theta_j)}$$
$$\theta_j=\arctan\frac{2\zeta_js_j}{1-s_j^2}(j=1,2) \tag{39}$$

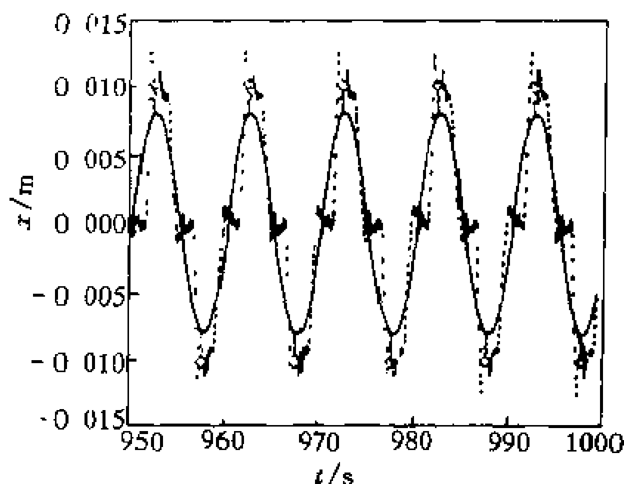
式中 $s_j=\frac{w}{w_{0j}}$，$\zeta_j=\frac{r_{pj}}{2w_{0j}m_{pj}}$。则物理坐标下的系统响应不难求出：

$$x=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\boldsymbol{\Phi}\begin{Bmatrix}x_{p1}\\x_{p2}\end{Bmatrix} \tag{40}$$

假设系统参数取值如下：$m_1=1$，$m_2=2$，$r_{x1}=r_{x2}=0.01$，$k_{x2}=100$，$m_0=1$，$r=0.55$，$\omega=2\pi\times0.1$，$k_1=1$，$k_2=0$，$e=0.3$，$x_A=0.8$，$x_B=0.8$，$x_C=1.3$，$F_A=1$，$F_B=0$，$F_C=1$，则 $\varphi_e=1.338$，$\varphi_a=0.908$，$\varphi_b=0.908$，$\varphi_c=0$，求得物料层的等效阻尼系数和等效刚度分别为：$r_e=0.465$，$k_e=0.497$。由式(36)和式(39)求得系统的近似解析解。系统的位移响应如图 8-11 中实线所示。用数值方法得到的仿真结果如图 8-11 中虚线所示。可见一次近似解析解得到的响应曲线与仿真结果一致，只是外破碎锥存在一定的高次谐波误差。



(a)内破碎锥的时间-位移曲线



(b)外破碎锥的时间-位移曲线

图 8-11　系统的位移响应(实线:解析解,虚线:数值解)

计算与思考

1. 求系统的周期解,式中 $0<\varepsilon\ll 1$。

$$\dot{x}=\varepsilon x+y,\ \dot{y}=-x+\varepsilon y-\varepsilon x^2 y$$

2. 求下式所示系统的周期解,其中 ε 为小参数。

$$\ddot{x}+x=\varepsilon\left[\frac{4}{3}\dot{y}-(1-x^2)\dot{x}\right]$$

$$\ddot{y}+\frac{1}{4}y=\varepsilon\frac{4}{3}[(1-x^2)\dot{x}-\dot{y}]$$

3. 上题中系统受外激励作用,两方程的右端分别加上 $4\cos 2t$ 和 $5\cos 2t$,求系统的周期解。

4. 自激振动系统的方程为

$$\ddot{x}+\omega_1^2 x=\varepsilon(\alpha_1-\alpha_2 x^2)\dot{x}+\varepsilon\alpha_3 y$$

$$\ddot{y}+\omega_2^2 y=\varepsilon(\alpha_1-\alpha_2 y^2)\dot{y}+\varepsilon\alpha_4 x$$

求其周期解。

5. 求下面系统的强迫振动

$$\ddot{x}+\omega_1^2 x=-2\varepsilon\beta_1\dot{x}-\alpha_1 xz-\frac{1}{2}\alpha_2 x\dot{z}+2F_1\cos\Omega t$$

$$\ddot{y}+\omega_2^2 y=-2\varepsilon\beta_2\dot{y}-\alpha_1 yz-\frac{1}{2}\alpha_2 y\dot{z}$$

$$\ddot{z}+\omega_3^2 z=-2\varepsilon\beta_3\dot{z}-\frac{1}{2}\alpha_1(x^2+y^2)-\frac{1}{2}\alpha_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\dot{x}+y\dot{y})+2F_3\cos\Omega t$$

式中 $\omega_1=\omega_2,\omega_3=2\omega_1+\varepsilon\sigma,\Omega=\omega_3+\varepsilon\sigma_3,F_1=\varepsilon f_1$。

6. 求下面系统的强迫振动

$$\ddot{x}+\omega_1^2 x=-2\varepsilon\beta_1\dot{x}+\varepsilon yz+2\varepsilon f_1\cos\Omega t$$

$$\ddot{y}+\omega_2^2 y=-2\varepsilon\beta_2\dot{y}+\varepsilon xz+2\varepsilon f_2\cos\Omega t$$

$$\ddot{z}+\omega_3^2 z=-2\varepsilon\beta_3\dot{z}+\varepsilon xy+2\varepsilon f_3\cos\Omega t$$

式中 $\omega_3=\omega_1+\omega_2+\varepsilon\sigma,\Omega=\omega_3+\varepsilon\sigma_3$。

7. 系统的方程为

$$\ddot{x}+x+8\varepsilon(x^3+xy^2)=2\varepsilon f\cos\Omega t$$

$$\ddot{y}+y+8\varepsilon(y^3+x^2y)=0$$

式中 $\Omega=1+\varepsilon\sigma$。列出求定常振幅的方程。

8. 一组关于旋转轴的运动方程是：

$$\ddot{u}_1+\Gamma\omega\dot{u}_2+u_1=-2\varepsilon\mu_1\dot{u}_1-\omega^2\cos\omega t$$

$$\ddot{u}_2+\Gamma\omega\dot{u}_1+u_2=-2\varepsilon\mu_2\dot{u}_2-\varepsilon\omega^2u_2^3$$

在下列情况下确定求振幅的公式（p_1,p_2 为固有频率）：

(1) $p_1+p_2=2\omega+\varepsilon\sigma$

(2) $3p_1=\omega+\varepsilon\sigma_1,p_2=3\omega+\varepsilon\sigma_2$

第九章　慢变参数振动系统的渐近法

在振动系统中，若质量、阻尼、刚度或干扰力等参数在一个"时间的自然单位(振动周期T)"内仅发生微小变化，则该系统为慢变参数系统[1,2]。换言之，慢变参数在经历多个振动周期的时间后变化才较明显。例如，火箭发射过程中，由于燃料不断地燃烧和消耗，火箭的整体质量是随时间而慢变的；大型燃气轮机、发电机和电动机等回转机构上的转子，当转轴表面产生裂纹时，随着裂纹的逐步扩展和加深，转子刚度会发生缓慢变化[135,146,147,248]；矿井提升机提升罐笼，罐笼与钢绳组成的振动系统的振动质量和刚度会随钢绳的缩短或伸长而缓慢变化[147,246]；挖掘机铲斗的振动，当考虑斗杆向前推进或往后退缩时，可视为一长度慢变的摆；在采用改变支承刚度的办法控制转子系统过共振区的过程中，支承刚度是慢变的[240]；装有惯性激振器的振动机起动过程属于干扰力慢变的振动系统；再如智能结构的形状或位置发生变化的动态过程多数也属于慢变过程[183]。从这些实例可以看出，慢变参数系统具有广泛的工程背景，对该类问题的求解方法进行研究无疑是有实际意义的。

9.1　慢变参数自治系统的渐近法

对于自治的慢变参数系统，如果干扰力是小量，则系统的微分方程式可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[M(\tau)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right]+k(\tau)x=\varepsilon f\left(\tau,x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)\tag{9-1}$$

式中　τ——慢变时间，$\tau=\varepsilon t$；

ε——小参数；

$M(\tau)$——慢变质量；

$k(\tau)$——慢变刚度；

$f\left(\tau,x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)$——非线性作用力。

在带有慢变参数的振动系统中，固有频率$\omega(\tau)$是慢变时间τ的函数。

我们假设方程的解有以下形式

$$x=a\cos\psi+\varepsilon u_1(\tau,a,\psi)+\varepsilon^2u_2(\tau,a,\psi)+\cdots\tag{9-2}$$

式中a和ψ是时间t的周期函数，$u_1(\tau,a,\psi)$，$u_2(\tau,a,\psi)$，…是角ψ的以2π为周期的函数。

设该非线性系统的等效阻尼比δ_e和等效固有频率ω_e表示为小参数ε的幂级数的形式，即

$$\delta_e=\varepsilon\delta_1(\tau,a)+\varepsilon^2\delta_2+\cdots$$

$$\omega_e=\omega+\varepsilon\omega_1(\tau,a)+\varepsilon^2\omega_2(\tau,a)+\cdots$$

可求出a和ψ

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\left[\varepsilon\delta_1(\tau,a)+\varepsilon^2\delta_2(\tau,a)\right]a+\varepsilon^3\cdots$$

$$\frac{d\psi}{dt}=\omega(\tau)+\varepsilon\omega_1(\tau,a)+\varepsilon^2\omega_2(\tau,a)+\varepsilon^3\cdots \tag{9-3}$$

式中 固有频率 $\omega(t)=\sqrt{\dfrac{k(\tau)}{M(\tau)}}$。

与前两章类似，本章的核心问题是利用渐近法如何确定 $u_1,u_2,\delta_1,\delta_2,\omega_1,\omega_2,\cdots$。为了求出上述未知系数，将方程(9-1)的左边表示为上述未知系数的函数，将方程的右边展为泰勒级数，令方程两边 ε 的同次幂的系数相等，可得

$$\begin{aligned}
\varepsilon^1: k(\tau)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2}+u_1\right)=&f_0(\tau,a,\psi)+2M(\tau)\omega(\tau)(\delta_1 a)\sin\psi+2M(\tau)\omega(\tau)a\omega_1\cos\psi\\
&+\frac{d[M(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau}a\sin\psi\\
\varepsilon^2: k(\tau)\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial\psi^2}+u_2\right)=&f_1(\tau,a,\psi)+M(\tau)\Big[2\omega(\tau)a\omega_2-\frac{\partial(\delta_1 a)}{\partial a}(\delta_1 a)+a\omega_1^2-\frac{\partial(\delta_1 a)}{\partial\tau}\\
&-\frac{dM(\tau)}{d\tau}\frac{(\delta_1 a)}{M(\tau)}\Big]\cos\psi+M(\tau)\Big[2\omega(\tau)(\delta_2 a)+2(\delta_1 a)\omega_1\\
&+a\frac{\partial\omega_1}{\partial a}(\delta_1 a)+a\frac{\partial\omega_1}{\partial\tau}+\frac{dM(\tau)}{d\tau}\frac{a\omega_1}{M(\tau)}\Big]\sin\psi
\end{aligned}\tag{9-4}$$

式中

$$\begin{aligned}
f_0(\tau,a,\psi)=&f(\tau,a\cos\psi,-a\omega\sin\psi,-a\omega^2\cos\psi)\\
f_1(\tau,a,\psi)=&f_x'(\tau,a\cos\psi,-a\omega\sin\psi,-a\omega^2\cos\psi)u_1\\
&+\left[(\delta_1 a)\cos\psi-a\omega_1\sin\psi+\omega(\tau)\frac{\partial u_1}{\partial\psi}\right]f_{\dot{x}}'(\tau,a\cos\psi,-a\omega\sin\psi,-a\omega^2\cos\psi)\\
&+M(\tau)\Big[2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau\partial\psi}\omega(\tau)+2\omega(\tau)(\delta_1 a)\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\partial\psi}+2\omega(\tau)\omega_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2}\\
&+\frac{\partial u_1}{\partial\psi}\frac{d\omega(\tau)}{d\tau}+\frac{\partial u_1}{\partial\psi}\frac{\omega(\tau)}{M(\tau)}\frac{dM(\tau)}{d\tau}\Big]
\end{aligned}\tag{9-5}$$

式中 f_x' 和 $f_{\dot{x}}'$ 是函数 f 关于位移 x 和速度 $\dot{x}$ 的一阶导数。

为了单值地确定 $\delta_1,\delta_2\cdots,\omega_1,\omega_2\cdots,u_1,u_2\cdots$ 的值，要求在 $u_1(\tau,a,\psi)$ 中不包含一次谐波，利用这一条件进行相应的运算以后，可求得

$$\begin{aligned}
u_1(\tau,a,\psi)=&\frac{1}{2\pi k(\tau)}\sum_{n\neq\pm1}\frac{e^{in\psi}}{1-n^2}\int_0^{2\pi}f_0(\tau,a,\psi)e^{-in\psi}d\psi\\
\delta_1(\tau,a)=&-\frac{1}{2M(\tau)\omega(\tau)}\frac{d[M(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau}-\frac{1}{2\pi aM(\tau)\omega(\tau)}\int_0^{2\pi}f_0(\tau,a,\psi)\sin\psi d\psi\\
\omega_1(\tau,a)=&-\frac{1}{2\pi aM(\tau)\omega(\tau)}\int_0^{2\pi}f_0(\tau,a,\psi)\cos\psi d\psi
\end{aligned}\tag{9-6}$$

由上式可求出方程的第一近似解

$$x=a\cos\psi \tag{9-7}$$

式中

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt}=&-\frac{\varepsilon a}{2M(\tau)\omega(\tau)}\frac{d[M(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau}-\frac{\varepsilon}{2\pi M(\tau)\omega(\tau)}\int_0^{2\pi}f_0(\tau,a,\psi)\sin\psi d\psi\\
\frac{d\psi}{dt}=&\omega(\tau)-\frac{\varepsilon}{2\pi aM(\tau)\omega(\tau)}\int_0^{2\pi}f_0(\tau,a,\psi)\cos\psi d\psi
\end{aligned}\tag{9-8}$$

等效阻尼比 $\delta_e(\tau,a)$ 和等效固有频率 $\omega_e(\tau,a)$ 可表示为

$$
\left.\begin{aligned}
\delta_e(\tau,a) &= \frac{\varepsilon}{2\pi a M(\tau)\omega(\tau)}\int_0^{2\pi} f_0(\tau,a,\psi)\sin\psi\,\mathrm{d}\psi \\
\omega_e^2 &= \omega^2(\tau) - \frac{\varepsilon}{\pi a M(\tau)}\int_0^{2\pi} f_0(\tau,a,\psi)\cos\psi\,\mathrm{d}\psi
\end{aligned}\right\} \tag{9-9}
$$

这时有

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\varepsilon a}{2M(\tau)\omega(\tau)}\frac{\mathrm{d}[M(\tau)\omega(\tau)]}{\mathrm{d}\tau} - \delta_e(\tau,a)a \\
\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} &= \omega_e(\tau)
\end{aligned}\right\} \tag{9-10}
$$

在二次近似解中，同样是 $u_2(\tau,a,\psi)$ 中不包含一次谐波，由方程(9-4)第二式得

$$
\begin{aligned}
\delta_2(\tau,a) = &-\frac{1}{2\omega(\tau)}\left[\frac{\partial\omega_1}{\partial a}(\delta_1 a) + \frac{\partial\omega_1}{\partial\tau} + 2(\delta_1)\omega_1 + \frac{1}{M(\tau)}\frac{\mathrm{d}M(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\omega_1\right] \\
&-\frac{1}{2\pi a M(\tau)\omega(\tau)}\int_0^{2\pi} f_1(\tau,a,\psi)\sin\psi\,\mathrm{d}\psi \\
\omega_2(\tau,a) = &\frac{1}{2\omega(\tau)a}\left[\frac{\partial(\delta_1 a)}{\partial a}(\delta_1 a) + \frac{\partial(\delta_1 a)}{\partial\tau} - a\omega_1^2 + \frac{1}{M(\tau)}\frac{\mathrm{d}M(\tau)}{\mathrm{d}\tau}(\delta_1 a)\right] \\
&-\frac{1}{2\pi a M(\tau)\omega(\tau)}\int_0^{2\pi} f_1(\tau,a,\psi)\cos\psi\,\mathrm{d}\psi
\end{aligned} \tag{9-11}
$$

所以，二次近似解为

$$
x = a\cos\psi + \varepsilon u_1(a,\psi,\nu t) \tag{9-12}
$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= -[\varepsilon\delta_1(\tau,a) + \varepsilon^2\delta_2(\tau,a)]a \\
\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} &= \omega(\tau) + \varepsilon\omega_1(\tau,a) + \varepsilon^2\omega_2(\tau,a)
\end{aligned}\right\} \tag{9-13}
$$

【例 9.1.1】 长度慢变的单摆运动微分方程式如下

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[ml^2(\tau)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right] + 2n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[l(\tau)\theta] + mgl(\tau)\sin\theta = 0
$$

取

$$
\sin\theta \approx \theta - \frac{1}{6}\theta^3
$$

这时，上式可写为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[ml^2(\tau)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right] + mgl(\tau)\theta = \varepsilon f\left(\tau,\theta,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) \\
&\varepsilon f\left(\tau,\theta,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = -2n\left[l(\tau)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right] - 2\varepsilon n\frac{\mathrm{d}l(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\theta + \frac{1}{6}mgl(\tau)\theta^3 \\
&\omega(\tau) = \sqrt{\frac{g}{l(\tau)}}
\end{aligned}
$$

根据前述方法可求得第一近似解为

$$
\begin{aligned}
\theta &= a\cos\psi \\
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= -\frac{na}{ml(\tau)} - \frac{3\varepsilon L'(\tau)}{4l(\tau)}a \\
\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} &= \omega(\tau) - \frac{\omega(\tau)a^2}{16}
\end{aligned}
$$

设初始条件：当 $t=0$ 时，$a=a_0$。对方程组第二个方程进行积分，得

$$a=a_0 e^{-\frac{n}{m}\int_0^t \frac{dt}{l(\tau)}}\left[\frac{l(0)}{l(\tau)}\right]^{3/4}$$

从第三个方程，可求得

$$\psi=\int_0^t \omega(\tau)\left\{1-\frac{1}{16}a_0^2 e^{-2\frac{n}{m}\int_0^t \frac{dt}{l(\tau)}}\left[\frac{l(0)}{l(\tau)}\right]^{3/2}\right\}dt$$

9.2 慢变参数非自治系统的渐近法

9.2.1 周期激振力作用下的慢变参数非线性系统

对于周期激振力作用下的慢变参数系统，其运动方程式作适当变换之后，可表示为

$$\frac{d}{dt}\left[M(\tau)\frac{dx}{dt}\right]+k(\tau)x=\varepsilon\cdot F\left(\tau,\theta,x,\frac{dx}{dt},\frac{d^2x}{dt^2}\right) \tag{9-14}$$

式中 τ——慢变时间，$\tau=\varepsilon t$；

ε——小参数；

$M(\tau)$——慢变质量；

$k(\tau)$——慢变刚度；

$F\left(\tau,\theta,\frac{dx}{dt},\frac{d^2x}{dt^2}\right)$——关于 $\theta(\theta=\nu t)$ 的周期为 2π 的非线性函数。

与慢变参数的自治系统类似，慢变参数的非自治系统的固有频率 $\omega(\tau)$ 也是慢变时间 τ 的函数。

首先我们将非线性函数展为富氏级数

$$F\left(\tau,\theta,x,\frac{dx}{dt},\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\sum_{n=-N}^{N}F_n\left(\tau,x,\frac{dx}{dt},\frac{d^2x}{dt^2}\right)\cdot e^{in\theta} \tag{9-15}$$

设方程的解有以下形式

$$x=a\cos\left(\frac{p}{q}\theta+\vartheta\right)+\varepsilon u_1\left(\tau,a,\theta,\frac{p}{q}\theta+\vartheta\right)+\varepsilon^2 u_2\left(\tau,a,\theta,\frac{p}{q}\theta+\vartheta\right)+\cdots \tag{9-16}$$

式中的 a 和 $\frac{p}{q}\theta+\vartheta$ 是时间 t 的周期函数，$u_1\left(\tau,a,\theta,\frac{p}{q}\theta+\vartheta\right)$，$u_2\left(\tau,a,\theta,\frac{p}{q}\theta+\vartheta\right)$，…是 θ，$\frac{p}{q}\theta+\vartheta$ 的以 2π 为周期的函数，当 $\delta_1,\delta_2,\omega_1,\omega_2$ 求出后便可求出 a 和 ϑ。

$$\frac{da}{dt}=\left[\varepsilon\delta_1(\tau,a,\vartheta)+\varepsilon^2\delta_2(\tau,a,\vartheta)\right]a+\cdots$$

$$\frac{d\vartheta}{dt}=\omega(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)+\varepsilon\omega_1(\tau,a,\vartheta)+\varepsilon^2\omega_2(\tau,a,\vartheta)+\cdots \tag{9-17}$$

式中 固有频率 $\omega(\tau)=\sqrt{\frac{k(\tau)}{M(\tau)}}$。

为了求出 $\delta_1,\omega_1,\delta_2,\omega_2$，我们采用谐波平衡方法，即

$$\int_0^{2\pi q}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[M(\tau)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right]+k(\tau)x-\varepsilon\cdot F\left(\tau,\theta,x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)\right\}_{x=a\cos\left(\frac{p}{q}\theta+\vartheta\right)+}\cos\left(\frac{p}{q}\theta+\vartheta\right)\mathrm{d}\theta=0$$

$$\int_0^{2\pi q}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[M(\tau)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right]+k(\tau)x-\varepsilon\cdot F\left(\tau,\theta,x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)\right\}_{x=a\cos\left(\frac{p}{q}\theta+\vartheta\right)+}\sin\left(\frac{p}{q}\theta+\vartheta\right)\mathrm{d}\theta=0$$

(9-18)

方程的一次近似解为

$$x=a\cos\left(\frac{p}{q}\theta+\vartheta\right)\tag{9-19}$$

式中的 a 和 ϑ 是时间 t 的周期函数，可由下式求出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}&=\varepsilon\delta_1(\tau,a,\vartheta)a\\ \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}&=\omega(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)+\varepsilon\omega_1(\tau,a,\vartheta)\end{aligned}\tag{9-20}$$

未知函数 δ_1,ω_1 可由下式求出

$$\begin{aligned}\left[\omega(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right]a\frac{\partial\omega_1}{\partial\vartheta}+2\omega(\tau)(\delta_1a)&=-\frac{1}{M(\tau)}\frac{\mathrm{d}[M(\tau)\omega(\tau)]}{\mathrm{d}\tau}\\&\quad-\frac{1}{2\pi^2M(\tau)}\sum_\sigma\mathrm{e}^{i\sigma q\vartheta}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}F_0(\tau,a,\theta,\psi)\\&\quad\cdot\mathrm{e}^{-i\sigma q\vartheta'}\sin\psi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\psi\\ \left[\omega(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right]\frac{\partial(\delta_1a)}{\partial\vartheta}+2a\omega(\tau)\omega_1&=\frac{1}{2\pi^2M(\tau)}\\&\quad\times\sum_\sigma\mathrm{e}^{i\sigma q\vartheta}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}F_0(\tau,a,\theta,\psi)\\&\quad\cdot\mathrm{e}^{-i\sigma q\vartheta'}\cos\psi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\psi\end{aligned}\tag{9-21}$$

式中 σ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的整数。

$$\begin{aligned}F_0(\tau,a,\theta,\psi)&=F(\tau,\theta,a\cos\psi,-a\omega(\tau)\sin\psi,-a\omega(\tau)\cos\psi)\\ \vartheta'&=\psi-\frac{p}{q}\theta\end{aligned}\tag{9-22}$$

如求方程的二次近似解，可设

$$x=a\cos\left(\frac{p}{q}\theta+\vartheta\right)+\varepsilon u_1\left(\tau,a,\theta,\frac{p}{q}\theta+\vartheta\right)\tag{9-23}$$

式中

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}&=\left(\varepsilon\delta_1(\tau,a,\psi)+\varepsilon^2\delta_2(\tau,a,\vartheta)\right)a\\ \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}&=\omega(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)+\varepsilon\omega_1(\tau,a,\vartheta)+\varepsilon^2\omega_2(\tau,a,\vartheta)\end{aligned}\tag{9-24}$$

而 $u_1\left(\tau,a,\theta,\frac{p}{q}\theta+\vartheta\right)$ 可由下式求出

$$\begin{aligned}u_1\left(\tau,a,\theta,\frac{p}{q}\theta+\vartheta\right)&=\frac{1}{4\pi^2M(\tau)}\sum_{n,m}\frac{\mathrm{e}^{i\left[n\theta+m\left(\frac{p}{q}\theta+\vartheta\right)\right]}}{\omega^2(\tau)-[m\omega(\tau)+n\nu(\tau)]^2}\\&\quad\times\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}F_0(\tau,a,\theta,\psi)\cdot\mathrm{e}^{-i(n\theta+m\psi)}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\psi\end{aligned}\tag{9-25}$$

式中的 n 和 m 满足以下条件

$$nq + p(m+1) \neq 0 \tag{9-26}$$

δ_2 和 ω_2 可由下式决定

$$\left[\omega(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau)\right]\frac{\partial \omega_2}{\partial \vartheta} + 2\omega(\tau)(\delta_2)$$

$$-\left[\frac{\partial \omega_1}{\partial a}a(\delta_1) + \frac{\partial \omega_1}{\partial \vartheta}\omega_1 + \frac{\partial \omega_1}{\partial \tau} + 2(\delta_1)\omega_1 + \frac{\mathrm{d}M(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\frac{\omega_1}{M(\tau)}\right]$$

$$-\frac{1}{2\pi^2 aM(\tau)}\sum_{\sigma}\mathrm{e}^{i\sigma q\vartheta}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}F_1(\tau,a,\theta,\psi)\cdot \mathrm{e}^{-i\sigma q\vartheta}\sin\psi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\psi$$

$$\left[\omega(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau)\right]\frac{\partial(\delta_2)}{\partial \vartheta} + 2\omega(\tau)\omega_2$$

$$= \left[\frac{\partial(\delta_1 a)}{\partial a}\delta_1 + \frac{\partial(\delta_1 a)}{a\partial \vartheta}\omega_1 + \frac{\partial(\delta_1 a)}{a\partial \tau} - \omega_1^2 + \frac{\mathrm{d}M(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\frac{(\delta_1)}{M(\tau)}\right]$$

$$+\frac{1}{2\pi^2 aM(\tau)}\sum_{\sigma}\mathrm{e}^{i\sigma q\vartheta}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}F_1(\tau,a,\theta,\psi)\cdot \mathrm{e}^{-i\sigma q\vartheta}\cos\psi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\psi$$

$$F_1(\tau,a,\theta,\psi) = f_x{}'u_1 + f_{\dot{x}}\left[\delta_1 a\cos\psi - a\omega_1\sin\psi + \frac{\partial u_1}{\partial \psi}\omega(\tau)\right] \tag{9-27}$$

式中 $F_1(\tau,a,\theta,\psi)$是 θ 和 ψ 的周期为 2π 的周期函数。由此可求出方程的二次近似解可由式(9-24)~(9.27)求出。

9.2.2 干扰力为慢变的非线性系统

$$M\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx = \varepsilon f\left(x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right) + \varepsilon E(\tau)\sin\theta \tag{9-28}$$

式中$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \nu(\tau)$, $\tau = \varepsilon t$, m 和 k 是常数。

方程的第一近似解为

$$x = a\cos(\theta + \vartheta) \tag{9-29}$$

式中 a 和 ϑ 是时间 t 的周期函数,可由下式求出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \varepsilon\delta_1(\tau,a,\vartheta)a\\ \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} &= \omega - \frac{p}{q}\nu(\tau) + \varepsilon\omega_1(\tau,a,\vartheta)\end{aligned} \tag{9-30}$$

为了求出未知函数 $\delta_1(\tau,a,\vartheta)$, $\omega_1(\tau,a,\vartheta)$,我们求

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\cos(\theta+\vartheta) - a\sin(\theta+\vartheta)\frac{\mathrm{d}(\theta+\vartheta)}{\mathrm{d}t}\\ &= \varepsilon(\delta_1 a)\cos(\theta+\vartheta) - a\omega\sin(\theta+\vartheta) - \varepsilon a\omega_1\sin(\theta+\vartheta)\\ \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= \varepsilon\left\{[\omega - \nu(\tau)]\frac{\partial(\delta_1 a)}{\partial\vartheta} + 2a\omega\omega_1\right\}\cos(\theta+\vartheta) - a\omega^2\cos(\theta+\vartheta)\\ &\quad - \varepsilon\left\{[\omega - \nu(\tau)]a\frac{\partial\omega_1}{\partial\vartheta} + 2\omega(\delta_1 a)\right\}\sin(\theta+\vartheta)\end{aligned} \tag{9-31}$$

方程的左端可写为

$$\left.M\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx\right\}_{x=a\cos(\theta+\vartheta)} = \varepsilon M\left\{[\omega - \nu(\tau)]\frac{\partial(\delta_1 a)}{\partial\vartheta} + 2a\omega\omega_1\right\}\cos(\theta+\vartheta)$$

$$\varepsilon M\left\{[\omega-\nu(\tau)]a\frac{\partial\omega_1}{\partial\vartheta}+2\omega(\delta_1 a)\right\}\sin(\theta+\vartheta) \tag{9-32}$$

而方程的右端可写为

$$\begin{aligned}\left\{\varepsilon f\left(x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)+\varepsilon E(\tau)\sin\theta\right\}_{x=a\cos(\theta+\vartheta)} = {} & \frac{\varepsilon\cos(\theta+\vartheta)}{\pi}\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi)\cos\psi\mathrm{d}\psi \\ & +\frac{\varepsilon\sin(\theta+\vartheta)}{\pi}\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi \\ & +\varepsilon\sum_{n\neq1}\left\{f_n^{(1)}(a)\cos n(\theta+\vartheta)\right. \\ & \left.+f_n^{(2)}(a)\sin n(\theta+\vartheta)\right\} \\ & +\varepsilon E(\tau)\left[\cos\vartheta\sin(\theta+\vartheta)-\sin\vartheta\cos(\theta+\vartheta)\right]\end{aligned}$$

$$f_0(a,\psi)=f(a\cos\psi,\quad a\omega\sin\psi,-a\omega^2\cos\psi) \tag{9-33}$$

式中

$$\begin{aligned}f_n^{(1)}(a) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi)\cos n\psi\mathrm{d}\psi \\ f_n^{(2)}(a) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi)\sin n\psi\mathrm{d}\psi\end{aligned} \tag{9-34}$$

$(\delta_1 a)$和 ω_1 可由下式求出

$$\begin{aligned}M[\omega-\nu(\tau)]\frac{\partial(\delta_1 a)}{\partial\vartheta}+2a\omega\omega_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi)\cos\psi\mathrm{d}\psi-E(\tau)\sin\vartheta \\ M[\omega-\nu(\tau)]a\frac{\partial\omega_1}{\partial\vartheta}+2\omega(\delta_1 a) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi-E(\tau)\cos\vartheta\end{aligned} \tag{9-35}$$

由此可求出

$$\begin{aligned}\delta_1(\tau,a,\vartheta) &= -\frac{1}{2\pi Ma\omega}\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi-\frac{E(\tau)}{Ma[\omega+\nu(\tau)]}\cos\vartheta \\ \omega_1(\tau,a,\vartheta) &= -\frac{1}{2\pi M\omega a}\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi)\cos\psi\mathrm{d}\psi+\frac{E(\tau)}{Ma[\omega+\nu(\tau)]}\sin\vartheta\end{aligned} \tag{9-36}$$

于是一次近似方程具有以下形式

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi M\omega}\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi-\frac{E(\tau)}{M[\omega+\nu(\tau)]}\cos\vartheta \\ \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} &= \omega-\nu(\tau)-\frac{\varepsilon}{2\pi M\omega a}\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi)\cos\psi\mathrm{d}\psi+\frac{E(\tau)}{Ma[\omega+\nu(\tau)]}\sin\vartheta\end{aligned} \tag{9-37}$$

利用第八章中已采用的符号，上式可写为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= -\delta_e(a)a-\frac{E(\tau)}{M[\omega+\nu(\tau)]}\cos\vartheta \\ \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} &= \omega_e(a)-\nu(\tau)+\frac{E(\tau)}{Ma[\omega+\nu(\tau)]}\sin\vartheta\end{aligned} \tag{9-38}$$

而 $u_1(\tau,a,\theta,\theta+\vartheta)$可由下式求出

$$\begin{aligned}u_1(\tau,a,\theta,\theta+\vartheta) = {} & \frac{1}{\pi\omega^2}\sum_{n\neq1}\frac{1}{1-n^2}\left[\cos n(\theta+\vartheta)\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi)\cos n\psi\mathrm{d}\psi\right. \\ & \left.+\sin n(\theta+\vartheta)\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi)\sin n\psi\mathrm{d}\psi\right]\end{aligned} \tag{9-39}$$

由此可求出方程的一次近似解与二次近似解。

9.3 应用举例

【例 9.3.1】 分析如下受简谐激励作用的非线性振动器在其激励力幅和激励频率慢变、通过共振时的强迫振动。

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2n\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+cx+\mathrm{d}x^3=E\sin\theta \tag{1}$$

式中 m,n,c,d,E 为正常数。按下式引入无量纲坐标 x_1 和时间 t_1：

$$x_1=\sqrt{\frac{d}{c}}x,\quad t_1=\sqrt{\frac{c}{m}}t \tag{2}$$

这样原方程成为(略去 x_1 和 t_1 的下标)：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\delta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x+x^3=E_1\sin\theta \tag{3}$$

其中 $\delta=\frac{b}{\sqrt{mc}}, E_1=\frac{E}{c}\sqrt{\frac{d}{c}}$。

假定系统中摩擦很小($\delta\ll1$)，外力力幅和系统偏离平衡位置量也较小($E_1\ll1, x^2\ll1$)。记：

$$\varepsilon f(\tau,x,\dot{x})+\varepsilon E(\tau)\sin\theta=-x^3-2\delta\dot{x}+E_1\sin\theta \tag{4}$$

系统方程的第一次近似解为：

$$x=a\cos(\theta+\beta) \tag{5}$$

其中 a 和 β 由如下第一次近似的微分方程组确定$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\nu(\tau),\tau=\varepsilon t\right)$：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}&=-\delta a-\frac{E_1}{1+\nu(\tau)}\cos\beta\\ \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}&=1-\nu(\tau)+\frac{3}{8}a^2+\frac{E_1}{a(1+\nu(\tau))}\sin\beta\end{aligned} \tag{6}$$

先研究系统的平稳状态。这时，$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=0,\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}=0$，此外应有$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}t}=0$。由上式得到的振幅和外力频率之间第一次近似时的关系：

$$a^2\left\{\left[\left(1+\frac{3}{8}a^2\right)^2-\nu^2\right]^2+4\delta^2\right\}=E_1^2\qquad\tan\beta=\frac{1+\frac{3}{8}a^2-\nu}{2\delta} \tag{7}$$

由此得出的幅频响应曲线和相频响应曲线(解和激励均用正弦表示，故相位角改为$\left(\frac{3}{2}\pi-\beta\right)$，如图 9-1 所示(参数取值 $m=1,c=1,n=\delta=0.01,E_1=0.02$)。

现在研究系统通过共振的情况。设外力频率是时间的线性函数：

$$\nu(\tau)=\nu_0+\eta t \tag{8}$$

把 $\nu(\tau)$值代入方程组，进行数值积分。在三种通过速度($\eta=\pm0.0001,\eta=\pm0.001,\eta=\pm0.01$)的情况下如图 9-2 所示。

【例 9.3.2】 矿山提升机罐笼与钢绳组成的振动系统的方程为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\left[m_p+\frac{1}{3}\rho L(\tau)\right]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right\}+c\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{AE}{L(\tau)}y=0 \tag{9}$$

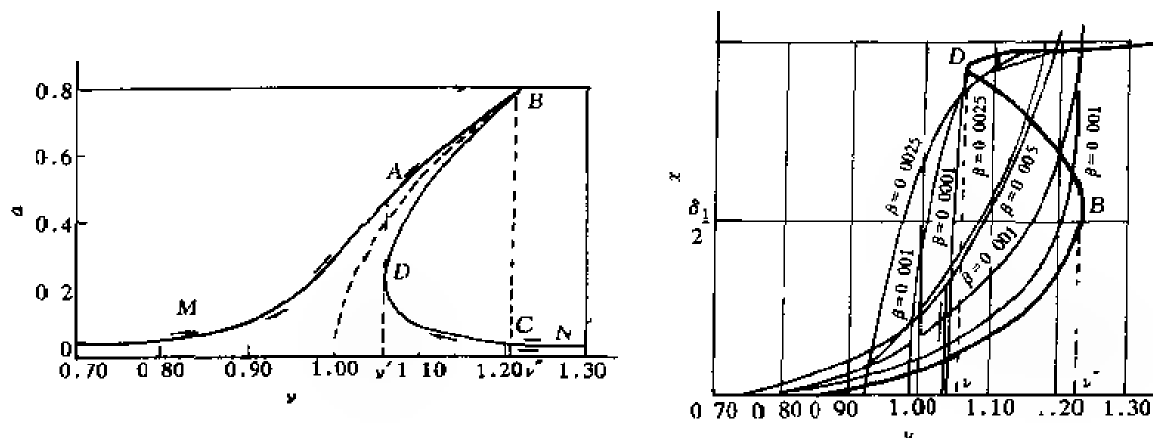


图 9-1　平稳状态时系统幅频和相频响应曲线

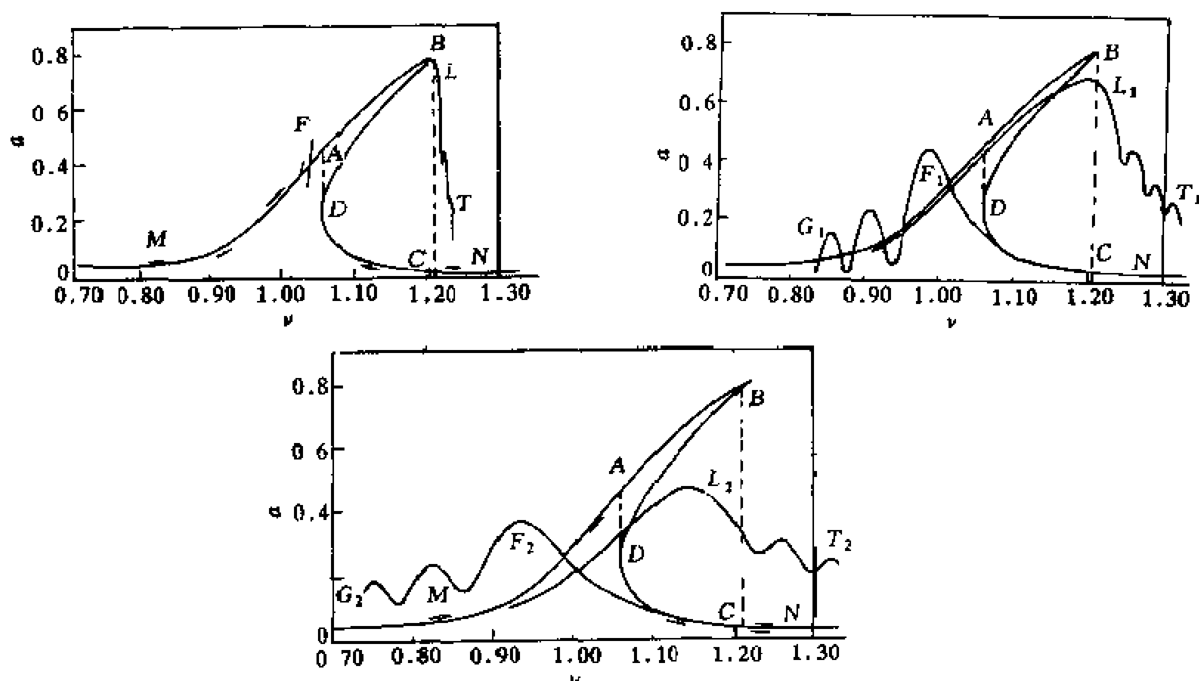


图 9-2　不同通过速度下的幅频特性

其中 m_p 为不变质量，ρ 为单位长度钢绳的质量，g 为重力加速度，A 为钢绳断面积，E 为弹性模量，c 为阻尼系数，$L(\tau)$为钢绳长度，$\tau=\epsilon t$ 为慢变时间。求：1)该系统的等效固有频率 $\omega_e(a)$和等效阻尼系数 $\delta_e(a)$；2)一阶近似解的振幅 a 和相位 ψ 的控制方程；3)给出产生自激振动的条件。

设方程的第一次近似解为

$$y=a\cos\psi \tag{10}$$

方程中非线性项为

$$\epsilon f=-c\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{11}$$

设慢变质量和慢变刚度为

$$
\begin{aligned}
M(\tau) &= m_p + \frac{1}{3}\rho L(\tau) \\
K(\tau) &= \frac{AE}{L(\tau)}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

则系统固有频率为

$$
\omega(\tau) = \sqrt{\frac{K(\tau)}{M(\tau)}} \tag{13}
$$

一次近似时的等效阻尼系数和等效固有频率为

$$
\delta_e(a,\tau) = \frac{\varepsilon}{2M\omega}\frac{\mathrm{d}(M\omega)}{\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{2\pi M\omega a}\int_0^{2\pi} f_0 \sin\psi \mathrm{d}\psi = \frac{\varepsilon}{2M\omega}\frac{\mathrm{d}(M\omega)}{\mathrm{d}\tau} + \frac{c}{2M} \tag{14}
$$

$$
\omega_e^2(a,\tau) = \omega^2 - \frac{1}{\pi Ma}\int_0^{2\pi} f_0 \cos\psi \mathrm{d}\psi = \omega^2 \tag{15}
$$

振幅和相位由如下方程确定

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= -\delta_e(a,\tau)a \\
\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} &= \omega_e(a,\tau)
\end{aligned}
\tag{16}
$$

当等效阻尼为负时，则系统振动的幅值不衰减，即

$$
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = -\delta_e(a,\tau)a \geqslant 0 \tag{17}
$$

【例 9.3.3】 转子系统的振动问题是工程实际中常见的问题。如果转子存在着偏心，在启动和制动过程中，就会产生随时间慢变的不平衡激振力。有时由于支承原因，转子系统的刚度也具有慢变特征。这些参数的慢变都会使系统产生不平衡振动。

假设转子在 x 与 y 方向的支承刚度在控制过程中始终保持对称，则转子系统的运动方程式可表示为

$$
m\ddot{x} + c_x\dot{x} + k_x(\tau)x = me\nu^2\sin\theta \tag{18}
$$

其中，m，e 分别为转子的质量和偏心距，$\nu = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$，$c_x$，$k_x(\tau)$ 分别为阻尼系数和慢变刚度。

令 $c_1 = c_x/m = \varepsilon c$，$k(\tau) = k_x(\tau)$，$\omega^2(\tau) = k(\tau)/m$，$E_1 = e\nu^2(t) = \varepsilon E$

从而方程(18)可化为

$$
\ddot{x} + \omega^2(\tau)x = \varepsilon(E\sin\theta - c\dot{x}) \tag{19}
$$

应用渐近方法解此方程，得系统的一次近似解为

$$
x = a\cos(\theta + \psi) \tag{20}
$$

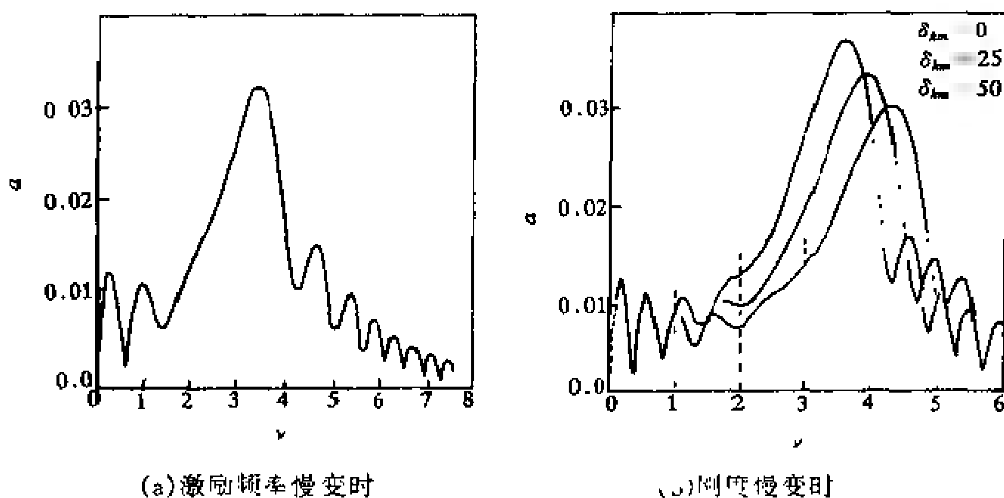
其中，a 和 ψ 由以下方程决定

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\varepsilon E}{\omega + \nu}\cos\psi - \frac{\varepsilon a}{2\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\tau} - \frac{\varepsilon ca}{2} \\
\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} &= \omega - \nu + \frac{\varepsilon E}{a(\omega + \nu)}\sin\psi
\end{aligned}
\right\}
\tag{21}
$$

取 $\varepsilon = 0.01$，$m = 12.4\mathrm{kg}$，$e = 0.04\mathrm{m}$，$k(0) = 3.2\times 10^6\mathrm{N/m}$，$c_1 = 0.2\mathrm{s}^{-1}$，$\nu = 628\mathrm{s}^{-1}$ 进行计算。

图 9-3 为一转子在激励和刚度慢变时的频率特性图。从图中可以看出，激励频率慢变的速度会影响共振曲线波动的剧烈程度和稳定区域的大小，刚度的慢变会使不平稳的共振

曲线产生偏移



(a)激励频率慢变时　　(b)刚度慢变时

图 9-3　慢变参数转子系统的幅频特性

计算与思考

1．求如下系统的振幅和频率的表达式：

(1) $\frac{d}{dt}[m(\tau)\dot{u}]+k(\tau)u+\alpha(\tau)u^3=0$

(2) $\frac{d}{dt}[m(\tau)\dot{u}]+k(\tau)u+\varepsilon\alpha(\tau)u|u|=0$

2．一自激系统对慢变外激励的强迫响应由方程

$$\ddot{u}+\omega_0^2u=\varepsilon(1-u^2)\dot{u}+\omega_0^2f(\varepsilon t)$$

所描述，这里 $f(\varepsilon t)=O(1)$。试推导出响应的一次近似解，确定描述振幅和相位的方程。

3．具有慢变长度的摆的振动方程可以写成：

$$\frac{d}{dt}\left[ml^2(\tau)\frac{d\theta}{dt}\right]+2\delta\frac{d}{dt}[l(\tau)\theta]+mgl(\tau)\sin\theta=0$$

将 $\sin\theta$ 代以它的幂级数的前两项，分析当摆长缓慢变化时振动的振幅和相位的变化规律。

4．某小质量物体 εM 沿梁运动，对梁产生简谐性激励 $\varepsilon F(\theta)=F\sin\theta$，略去梁横断面的惯性和剪切力，梁的运动方程为

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{EI}{\rho A}\frac{\partial^4y}{\partial x^4}=\varepsilon\Phi(\tau,\theta,\dot{y})$$

$$\varepsilon\Phi(x,\theta,\dot{y})=[\varepsilon F(\theta)+\varepsilon Mg-\varepsilon M\ddot{y}]_{x=\xi}$$

式中 ξ 是与小物体走行速度 ν 有关的流动坐标 $\xi=\varepsilon\nu t$。相应于一阶固有振动的梁的单频振动，分析物体走行速度对梁振动的影响。

第十章 强非线性振动系统的定量分析方法

强非线性振动系统的研究一直是一个很有难度的课题。首先，其精确解很难求出，多数情况下不存在封闭解。再者，现有的对弱非线性问题行之有效的近似解法，如多尺度法、渐近法等，难以直接应用到对强非线性系统的分析中来。目前提出的强非线性系统的分析方法主要有广义平均法、椭圆函数法、时间变换法、参数展开法、频闪法、利用 FFT 的迦辽金法、增量谐波平衡法、推广的渐近法、能量法等，而所能够解决的强非线性问题仍是十分有限的。

在工程上，为了得到具体的周期解的解析表达式，从而分析解的各次谐波成分与各参数间的定量关系，采用一些近似定量解析分析方法是非常必要的。这里主要介绍两种强非线性振动问题的定量近似求解方法推广的渐近法和能量法[68]。

10.1 用推广的渐近法求解强非线性拟保守系统

强非线性拟保守系统的一般形式为

$$\ddot{x} + g(x) = \varepsilon f(x, \dot{x}) \tag{10-1}$$

$g(x)$是 x 的任意非线性函数，其力学意义为弹性力。当 $\varepsilon = 0$ 时，方程有如下初积分

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) = \text{const.} \tag{10-2}$$

其中 $V(x) = \int_0^x g(\xi)\mathrm{d}\xi$。

设式(10-1)对应的保守系统

$$\ddot{x} + g(x) = 0 \tag{10-3}$$

有周期解 $x_0(a, \varphi)$。

当 $\varepsilon \neq 0$ 时，构造方程的摄动解如下

$$x = x_0(a, \varphi) + \varepsilon x_1(a, \varphi) + \varepsilon^2 x_2(a, \varphi) + \cdots \tag{10-4}$$

其中 a, φ 满足方程

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \cdots \\ \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} &= B_0(a) + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \cdots \end{aligned} \tag{10-5}$$

设初始条件为

$$t = 0, \varphi = 0, x(a, 0) = a_0, \dot{x}(a, 0) = 0 \tag{10-6}$$

把 $x, \dot{x}$ 展成幂级数，g 和 f 也用幂级数近似

$$\begin{aligned} g(x) &= g(x_0) + \varepsilon g_x'(x_0) x_1 + \cdots \\ f(x, \dot{x}) &= f\left(x_0, B_0 \frac{\partial x_0}{\partial \varphi}\right) + \cdots \end{aligned} \tag{10-7}$$

将 $\ddot{x}, \dot{x}, x$ 以及$g(x), f(x, \dot{x})$的渐近表达式代入原方程(10-1)，令 ε 的同次幂系数相等，

得

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^0: B_0^2(a)\frac{\partial^2 x_0}{\partial\varphi^2}+g(x_0)=0\\
&\varepsilon^1: B_0^2(a)\frac{\partial^2 x_1}{\partial\varphi^2}+g_x'(x_0)x_1=F_1(x_0,A_1,B_1)
\end{aligned}
\tag{10-8}
$$

其中

$$
F_1(x_0,A_1,B_1)=f\left(x_0,B_0\frac{\partial^2 x_0}{\partial\varphi^2}\right)-\left(2B_0A_1\frac{\partial^2 x_0}{\partial a\partial\varphi}+2B_0A_1\frac{\partial^2 x_0}{\partial\varphi^2}+A_1\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}a}\frac{\partial x_0}{\partial\varphi}\right) \tag{10-9}
$$

1. 首先在初始条件 $t=0,\varphi=0,x_0(a,0)=a_0,\dfrac{\partial x_0(a,0)}{\partial\varphi}=0$ 已知的前提下由(10-8)之第一式求得0次解 $x_0(a,\varphi)$。

2. 然后求式(10-8)之第二式的解。这个解应由通解和特解构成。

(1)求对应的齐次方程的通解。通解由两个线性无关的解组成

$$
x_1^{(1)}=\frac{\partial x_0}{\partial\varphi} \tag{10-10}
$$

$$
x_1^{(2)}=\frac{\partial x_0}{\partial a}+\varphi\frac{1}{B_0}\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}a}\frac{\partial x_0}{\partial\varphi} \tag{10-11}
$$

(2)求式(10-8)之第二式的特解。可在两个通解的基础上,用常数变易法求得。

$$
x_1^{(3)}=-\frac{x_1^{(1)}}{g(a)}\int_0^{\varphi}x_1^{(2)}F_1\mathrm{d}\varphi+\frac{x_1^{(2)}}{g(a)}\int_0^{\varphi}x_1^{(1)}F_1\mathrm{d}\varphi \tag{10-12}
$$

这样由(10-8)之第二式求得 $x_1(a,\varphi)$ 为

$$
x_1(a,\varphi)=C(a)x_1^{(1)}+D(a)x_1^{(2)}-\frac{x_1^{(1)}}{g(a)}\int_0^{\varphi}x_1^{(2)}F_1\mathrm{d}\varphi+\frac{x_1^{(2)}}{g(a)}\int_0^{\varphi}x_1^{(1)}F_1\mathrm{d}\varphi
$$

初始条件 $t=0$ 时,$\varphi=0,x(a,0)=a_0,\dot{x}(a,0)=0$,以及 $x_0(a,0)=a_0,\dfrac{\partial x_0(a,0)}{\partial\varphi}=0$,并可推知 $t=0$ 时,还满足

$$
\begin{aligned}
&A_1\frac{\partial x_0(a,0)}{\partial a}+B_0\frac{\partial x_1(a,0)}{\partial\varphi}=0\\
&\frac{\partial x_0(a,0)}{\partial a}=1
\end{aligned}
$$

即 x_1 的初始条件为

$$
t=0,\quad x_1(a,0)=0,\quad \frac{\partial x_1(a,0)}{\partial\varphi}=-\frac{A_1(a)}{B_0(a)} \tag{10-13}
$$

因此,x_1 通解中待定系数可以推得如下

$$
\begin{aligned}
&C(a)=\frac{1}{g(a)}B_0(a)A_1(a)\\
&D(a)=0
\end{aligned}
\tag{10-14}
$$

这时 x_1 化为

$$
x_1(a,\varphi)=\frac{1}{g(a)}B_0(a)A_1(a)x_1^{(1)}-\frac{x_1^{(1)}}{g(a)}\int_0^{\varphi}x_1^{(2)}F_1\mathrm{d}\varphi+\frac{x_1^{(2)}}{g(a)}\int_0^{\varphi}x_1^{(1)}F_1\mathrm{d}\varphi \tag{10-15}
$$

式(10-15)中的 F_1 中还存在着未知的 A_1 和 B_1，需要作进一步推导。

用 $x_1^{(1)}$ 同乘(10-8)式之第二式的两端并对 φ 从 0 到 2π 求积分

$$\int_0^{2\pi} x_1^{(1)}\left[B_0^2(a)\frac{\partial^2 x_1}{\partial\varphi^2}+g_x'(x_0)x_1\right]\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi} x_1^{(1)}F_1\mathrm{d}\varphi \tag{10-16}$$

由初始条件及解 $x_0, x_1, \cdots$ 的周期性可知，

$$x_1^{(1)}(a,2\pi)=x_1^{(1)}(a,0)=0$$

同样道理，还应有

$$x_1(a,0)=x_1(a,2\pi)=0$$

应用分部积分，可知上式中左端等于 0，故有

$$\int_0^{2\pi} x_1^{(1)}F_1\mathrm{d}\varphi=0 \tag{10-17}$$

再用 $x_1^{(2)}$ 同乘式(10-8)式之第二式的两端并同样对 φ 从 0 到 2π 进行积分，得到类似式(10-16)的积分式。由初始条件可得

$$x_1^{(2)}(a,0)=x_1^{(2)}(a,2\pi)=1$$

由此并根据(10-15)式，以及 $x_1^{(1)}$，$x_1^{(2)}$ 的特点，可得

$$x_1(a,0)=x_1(a,2\pi)=0$$

$$\frac{\partial x_1(a,0)}{\partial\varphi}=\frac{\partial x_1(a,2\pi)}{\partial\varphi}=0$$

同样得到关于 $x_1^{(2)}$ 的积分式满足

$$\int_0^{2\pi} x_1^{(2)}F_1\mathrm{d}\varphi=0 \tag{10-18}$$

根据式(10-17)，(10-18)两式即可以确定 $A_1(a)$ 和 $B_1(a)$ 了。将 F_1 的表达式(10-9)代入式(10-17)，(10-18)，通过计算得

$$\int_0^{\varphi} x_1^{(1)}F_1\mathrm{d}\varphi=-B_0A_1\left(\frac{\partial x_0}{\partial a}\frac{\partial x_0}{\partial\varphi}+\frac{g(a)}{B_0^2(a)}\varphi\right)-B_0B_1\left(\frac{\partial x_0}{\partial\varphi}\right)^2+I_1(a,\varphi)=0$$

$$\int_0^{\varphi} x_1^{(2)}F_1\mathrm{d}\varphi=B_0A_1\left[\left(\frac{\partial x_0}{\partial a}\right)^2-1\right]-\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}a}A_1\left(\varphi\frac{\partial x_0}{\partial a}\frac{\partial x_0}{\partial\varphi}+\frac{1}{2}\frac{g(a)}{B_0^2(a)}\varphi^2\right)$$

$$-B_0B_1\left(\frac{\partial^2 x_0}{\partial a\partial\varphi}-\frac{g(a)}{B_0^2(a)}\varphi\right)-\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}a}B_1\varphi\left(\frac{\partial x_0}{\partial\varphi}\right)^2+I_2(a,\varphi)=0$$

其中

$$I_i(a,\varphi)=\int_0^{\varphi} x_1^{(i)}f\left(x_0,B_0\frac{\partial x_0}{\partial\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi\quad(i=1,2) \tag{10-19}$$

由此解得 $A_1(a)$ 和 $B_1(a)$ 的公式如下

$$A_1(a)=\frac{B_0}{2\pi g(a)}I_1(a,2\pi)$$

$$B_1(a)=\frac{1}{2g(a)}\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}a}I_2(a,2\pi)-\frac{B_0}{2\pi g(a)}I_1(a,2\pi) \tag{10-20}$$

至此可以求得原强非线性振动方程的一次近似解

$$x=x_0+\varepsilon x_1+\cdots \tag{10-21}$$

其中 $x_1(a,\varphi)$ 为

$$x_1(a,\varphi)=-\frac{A_1}{B_0}\varphi\frac{\partial x_0}{\partial a}-\frac{1}{2B_0^2}\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}a}A_1\varphi^2\frac{\partial x_0}{\partial\varphi}-\frac{B_1}{B_0}\varphi\frac{\partial x_0}{\partial\varphi}-\frac{1}{g(a)}\frac{\partial x_0}{\partial\varphi}I_2(a,\varphi)$$

$$+\frac{1}{g(a)}\left\{\frac{\partial x_0}{\partial a}+\frac{1}{B_0}\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}a}\varphi\frac{\partial x_0}{\partial \varphi}\right\}I_1(a,\varphi) \tag{10-22}$$

10.2　强非线性自治拟保守系统的能量法

上节介绍的推广渐近法在实际应用中会受到函数 $g(x)$ 具体形式的限制，因为式(10-8)中的第一式的精确解 $x_0(a,\varphi)$ 在很多情况下不易求得，进而下一步求解 $x_1, x_2\cdots$ 难以进行。为了能够对任意形式的 $g(x)$ 进行处理，下面介绍一种以能量函数为基础的摄动法，简称能量法。

对于强非线性系统

$$\ddot{x}+g(x)=\varepsilon f(x,\dot{x}) \tag{10-23}$$

当 $\varepsilon=0$ 时，上式有一能量积分

$$E=\frac{1}{2}\dot{x}^2+V(x) \tag{10-24}$$

E 为大于 0 的常数。式中 $V(x)=\int_0^x g(\xi)\mathrm{d}\xi$，为弹性力 $g(x)$ 的势能。

与该等能闭曲线对应的摄动解由下面步骤推出。设解有如下形式

$$x=a\cos\varphi+b(a)=x_0(a,\varphi) \tag{10-25}$$

由能量积分特征可知

$$V(a+b)=V(-a+b)=E \tag{10-26}$$

$g(x)$ 为奇数时，

$$b(a)=0 \tag{10-27}$$

当 $g(x)$ 为任意时，一般地 $b\neq 0$，由于

$$\frac{\partial}{\partial b}[V(a+b)-V(-a+b)]=g(a+b)-g(-a+b)\neq 0 \tag{10-28}$$

故可由(10-26)式惟一地求出 $b(a)$ 来。

由式(10-25)求导得 $\dot{x}$ 后代入式(10-24)可得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{|a\sin\varphi|}\sqrt{2[V(a+b)-V(a\cos\varphi+b)]}\xlongequal{记作}B_0(a,\varphi) \tag{10-29}$$

可以证明右端项根号能够被 $|a\sin\varphi|$ 整除，且应注意右端项为负。

对于 $\varepsilon\neq 0$ 的式(10-23)，构造如下摄动解

$$\begin{aligned}
&x=x_0(a,\varphi)+\varepsilon x_1(a,\varphi)+\varepsilon^2x_2(a,\varphi)+\cdots\\
&\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\varepsilon A_1(a)+\varepsilon^2A_2(a)+\cdots\\
&\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=B_0(a,\varphi)+\varepsilon B_1(a,\varphi)+\varepsilon^2B_2(a,\varphi)+\cdots
\end{aligned} \tag{10-30}$$

在求 $\dot{x}$，$\ddot{x}$ 的级数式时，将用到 $\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}$，$\frac{\mathrm{d}^2b}{\mathrm{d}t^2}$ 项，可以推出这两项分别为

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}=\frac{g(-a+b)+g(a+b)}{g(-a+b)-g(a+b)}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\xlongequal{记作}F(a,b)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\\
&\frac{\mathrm{d}^2b}{\mathrm{d}t^2}=F(a,b)\frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}t^2}+G(a,b)\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2
\end{aligned} \tag{10-31}$$

其中

$$G(a,b) = 2\frac{g(-a+b)g_x'(a+b)+g(a+b)g_x'(-a+b)}{[g(-a+b)-g(a+b)]^2} + 2F(a,b)\frac{g(-a+b)g_x'(a+b)-g(a+b)g_x'(-a+b)}{[g(-a+b)-g(a+b)]^2} \tag{10-32}$$

因而导出的 $x, \dot{x}$ 的级数式为

$$x = -aB_0\sin\varphi + \varepsilon(A_1\cos\varphi - aB_1\sin\varphi + FA_1) + \cdots \overset{记作}{=} v_0 + \varepsilon v_1 + \cdots$$

$$x = -aB_0\frac{\partial B_0}{\partial\varphi}\sin\varphi - aB_0^2\cos\varphi + \varepsilon\left\{-\left[A_1B_0 + a\left(A_1\frac{\partial B_0}{\partial a} + B_0\frac{\partial B_0}{\partial\varphi} + B_1\frac{\partial B_0}{\partial\varphi}\right)\right]\sin\varphi - 2aB_0B_1\cos\varphi\right\} + \cdots$$

将 g 在 x_0 处展成幂级数

$$g(x) = g(x_0) + \varepsilon g'(x_0)x_1 + \cdots \tag{10-33}$$

将 $f(x,x)$ 在 (x_0, v_0) 处展成幂级数

$$f(x,x) = f(x_0,x_0) + \varepsilon[f_x'(x_0,v_0)x_1 + f_{\dot{x}}'(x_0+v_0)v_1] + \cdots \tag{10-34}$$

将以上各式代入式(10-23)，令两端 ε^n 项系数相等，得到如下递推公式

$$-a\frac{\partial}{\partial\varphi}(B_0B_n\sin^2\varphi) - A_n\left(2B_0 + a\frac{\partial B_0}{\partial a}\right)\sin^2\varphi + x_ng_x'(a\cos\varphi+b) = F_n(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},A_0,A_1\cdots,A_{n-1},B_0,B_1\cdots,B_{n-1})\sin\varphi \tag{10-35}$$

且有

$$F_1 = f(x_0, v_0) \tag{10-36}$$

综上所述，得到如下三个重要递推公式

$$x_n(a) = -\frac{a}{g(-a+b)-g(a+b)}\int_0^{2\pi}\left[F_n\sin\varphi + A_n\left(2B_0 + a\frac{\partial B_0}{\partial a}\right)\sin^2\varphi\right]d\varphi \tag{10-37}$$

$$A_n(a) = -\frac{\int_0^{2\pi}F_n\sin\varphi d\varphi}{\int_0^{2\pi}\left(2B_0 + a\frac{\partial B_0}{\partial a}\right)\sin^2\varphi d\varphi} \tag{10-38}$$

$$B_n(a) = -\frac{1}{aB_0\sin^2\varphi}\int_0^{\varphi}\left[F_n\sin\varphi + A_n\left(2B_0 + a\frac{\partial B_0}{\partial a}\right)\sin^2\varphi + x_ng_x'\sin\varphi\right]d\varphi \tag{10-39}$$

$(n = 1,2\cdots)$

10.3　一般强非线性非自治系统的能量法

对于受周期激励的一般强非线性系统

$$\ddot{x} + f(x,\dot{x},\nu t) + g(x) = \cos\nu t \tag{10-40}$$

设其解为

$$x = a\cos\varphi + b(a) \tag{10-41}$$

根据 10.2 节的内容，利用如下能量变换

$$
\begin{aligned}
x &= \pm\sqrt{2[V(a+b)-V(a\cos\varphi+b)]}\\
E &= V(a+b)\\
\nu t &= \frac{m}{n}(\varphi-\beta)
\end{aligned}
\tag{10-42}
$$

进行变换，可将原方程化成如下方程组

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= b_0(a,\beta)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[b_0^{(1)}(a,\beta)\cos\frac{k}{n}\varphi+b_0^{(2)}(a,\beta)\sin\frac{k}{n}\varphi\right]\\
\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} &= c_0(a,\beta)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[c_0^{(1)}(a,\beta)\cos\frac{k}{n}\varphi+c_0^{(2)}(a,\beta)\sin\frac{k}{n}\varphi\right]
\end{aligned}
\tag{10-43}
$$

若存在 $a^*>0$ 和 β^*，使得

$$
b_0(a^*,\beta^*)=0,\quad c_0(a^*,\beta^*)=\frac{n}{m}\nu
$$

则方程(10-40)存在周期解。$\left(即\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=0+\varepsilon,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{n}{m}\nu+\varepsilon\right)$，周期为 $2\pi\Big/\left(\frac{n}{m}\nu\right)$。$\frac{n}{m}\nu$ 为振动频率，记作 ω。

以下步骤导出了周期解 x 的近似解析式

对于特定的周期解振幅 a^*，将式(10-41)对时间求导，应与式(10-42)中的第一式相等

$$
-a^*\sin\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\pm\sqrt{2[V(a+b)-V(a\cos\varphi+b)]}
\tag{10-44}
$$

该式右端在 $0<\varphi\leqslant\pi$ 时为正，当 $\pi<\varphi\leqslant2\pi$ 为负，另外$\frac{\mathrm{sgn}(\sin\varphi)}{\sin\varphi}=\frac{1}{|\sin\varphi|}$，故由式(10-44)可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{a^*\sin\varphi}\left\{\pm\sqrt{2[V(a^*+b^*)-V(a^*\cos\varphi+b^*)]}\right\}\\
&= -\frac{1}{a^*|\sin\varphi|}\sqrt{2[V(a^*+b^*)-V(a^*\cos\varphi+b^*)]}
\end{aligned}
\tag{10-45}
$$

可见$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$是 φ 的偶函数，其富氏级数中只含有 cos 项，即

$$
\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\omega_0^*+\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k^*\cos k\varphi
\tag{10-46}
$$

其中 $\omega_0^*=\omega_0^*(a)=\frac{n}{m}\nu$，$\omega_k^*=\omega_k^*(a)$，注意到 $\varphi=\frac{n}{m}\nu t+\beta^*=\omega t+\beta^*$。而由

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -a^*\sin\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=-a^*\sin\varphi\left[\omega_0^*+\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k^*\cos k\varphi\right]\\
&= -a^*\left\{\omega_0^*\sin\varphi+\frac{1}{2}\omega_1^*\sin2\varphi+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\omega_k^*[\sin(k+1)\varphi-\sin(k-1)\varphi]\right\}
\end{aligned}
$$

积分上式，且考虑 $\omega_0^*=\frac{n}{m}\nu$，$\varphi=\frac{n}{m}\nu t+\beta^*$，补上常数 $b(a^*)$，得到周期解 x 的近似解析式为

$$
\begin{aligned}
x = a^*\Bigg\{&\cos\left(\frac{n}{m}\nu t+\beta^*\right)+\frac{1}{4}\frac{\omega_1^*}{\omega_0^*}\cos2\left(\frac{n}{m}\nu t+\beta^*\right)\\
&+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\omega_k^*}{\omega_0^*}\left[\frac{1}{k+1}\cos(k+1)\left(\frac{n}{m}\nu t+\beta^*\right)\right.
\end{aligned}
$$

$$-\frac{1}{k-1}\cos(k-1)\left(\frac{n}{m}\nu t+\beta^{*}\right)\Big]\Big|+b(a^{*}) \tag{10-47}$$

10.4　应用举例

【例 10.4.1】　用推广的渐近法求如下自治 Duffing, van del Pol 方程的近似解。

$$\ddot{x}-x+x^{3}=\varepsilon(1-x^{2})\dot{x} \tag{1}$$

初值为 $x(0)=a_0, \dot{x}(0)=0$。

解　方程写成标准形式，g 和 f 分别为

$$g(x)=-x+x^{3},\quad f=(1-x^{2})\dot{x} \tag{2}$$

1. 根据式(10-8)之第一式求 $x_0(a,\varphi)$

$$B_0^2(a)\frac{\partial^2 x_0}{\partial\varphi^2}-x+x^{3}=0 \tag{3}$$

由初始条件 $x_0(a,0)=a_0$, $\dfrac{\partial x_0(a,0)}{\partial\varphi}=0$, 上式有解为

$$x_0(a,\varphi)=a\,\mathrm{cn}\frac{2K\varphi}{\pi} \tag{4}$$

其中 cn 为 Jacobi 椭圆函数, K 为第一类完全椭圆积分, 其模 $K=\dfrac{a^2}{2(a^2-1)}$。且此时 $B_0(a)$ 应取

$$B_0(a)=\frac{\pi}{2K}\sqrt{a^2-1} \tag{5}$$

2. 求 $x_1(a,\varphi)$:

1)通解 $x_1^{(1)}$

$$x_1^{(1)}=\frac{\partial x_0}{\partial\varphi}=-\frac{2K}{\pi}a\,\mathrm{sn}\left(\frac{2K}{\pi}\right)\mathrm{dn}\left(\frac{2K}{\pi}\right) \tag{6}$$

2)通解 $x_1^{(2)}$

$$\begin{aligned}x_1^{(2)}=\frac{\partial x_0}{\partial a}+\frac{1}{B_0}\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}a}\varphi\frac{\partial x_0}{\partial\varphi}=&\,\mathrm{cn}\frac{2K\varphi}{\pi}+\frac{a^2}{(a^2-1)(a^2-2)}\mathrm{sn}^2\frac{2K\varphi}{\pi}\mathrm{cn}\frac{2K\varphi}{\pi}\\&-\frac{2}{a^2-2}Z\left(\frac{2K\varphi}{\pi}\right)\mathrm{sn}\frac{2K\varphi}{\pi}\mathrm{dn}\frac{2K\varphi}{\pi}-\frac{B_0'}{B_0}a\frac{2K\varphi}{\pi}\mathrm{sn}\frac{2K\varphi}{\pi}\mathrm{dn}\frac{2K\varphi}{\pi}\end{aligned} \tag{7}$$

$$\frac{B_0'}{B_0}=\frac{1}{a}\left(1+\frac{2}{a^2-2}\frac{E}{K}\right) \tag{8}$$

其中 sn, dn 均为 Jacobi 椭圆函数, Z 为 Jacobi Zeta 函数。E 为第二类完全椭圆积分, $B_0'=\dfrac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}a}$。

3)根据 $x_1^{(1)}$ 和 $x_1^{(2)}$ 以及式(10-19), 可求

$$I_1(a,\varphi)=\int_0^{\varphi}x_1^{(1)}f\left(x_0,B_0\frac{\partial x_0}{\partial\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi \tag{9}$$

$$I_2(a,\varphi)=\int_0^{\varphi}x_1^{(2)}f\left(x_0,B_0\frac{\partial x_0}{\partial\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi \tag{10}$$

积分后代入式(10-20), 得

$$A_1(a) = -\frac{B_0}{2\pi g(a)}I_1(a,2\pi) = \frac{1}{15a}\left[(a^2-2)(3a^2+1) - 2(3a^4-6a^2-1)\frac{E}{K}\right] \tag{11}$$

$$B_1(a) = 0$$

3. 稳态周期解

令 $A_1(a) = 0$,可由上式求解出稳态时的振幅 $a^* = 1.8396$。另外可知$\frac{\mathrm{d}A_1(a^*)}{\mathrm{d}a}<0$,可见这个周期解是稳定的。

故在一次近似下,系统的周期解为

$$x = x_0(a^*,\varphi) + \epsilon x_1(a^*,\varphi) + \cdots \tag{12}$$

其中各项如下

$$1)\ x_0(a^*,\varphi) = a^*\mathrm{cn}\frac{2K\varphi}{\pi} \tag{13}$$

而由$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = B_0 + \epsilon B_1 + \cdots = B_0$,得

$$2)\ \varphi = B_0(a^*)t + \varphi_0 \tag{14}$$

$$\begin{aligned}3)\ x_1(a^*,\varphi) = & -\frac{1}{g(a^*)}\frac{\partial x_0(a^*,\varphi)}{\partial\varphi}I_2(a^*,\varphi)\\ & + \frac{1}{g(a^*)}\left[\frac{\partial x_0(a^*,\varphi)}{\partial a} + \frac{1}{B_0(a^*)}\frac{\mathrm{d}B_0(a^*)}{\mathrm{d}a}\varphi\frac{\partial x_0(a^*,\varphi)}{\partial\varphi}\right]I_1(a^*,\varphi)\end{aligned} \tag{15}$$

【例 10.4.2】 用能量法求如下自治 Duffing, van del pol 方程的周期解。

$$\ddot{x} - x + x^3 = \epsilon(1-x^2)\dot{x} \tag{16}$$

解

$$g = -x + x^3,\quad f = (1-x^2)\dot{x} \tag{17}$$

$$V(x) = \int_0^x g(\xi)\mathrm{d}\xi = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 \tag{18}$$

可知 $b=0$。即

$$x_0 = a\cos\varphi \tag{19}$$

由

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{a\sin\varphi}\sqrt{2[V(a) - V(a\cos\varphi)]} = -\sqrt{-1+\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2\cos2\varphi}\\ &= -\sqrt{\left(-1+\frac{3}{4}a^2\right)\left(1+\frac{a^2\cos2\varphi/4}{-1+3a^2/4}\right)} = -\sqrt{-1+\frac{3}{4}a^2}\sqrt{1+\frac{a^2/4}{-1+3a^2/4}\cos2\varphi}\\ &= \sqrt{-1+\frac{3}{4}a^2}\left\{1+\frac{1}{8}\frac{a^2}{-1+3a^2}\cos2\varphi+\cdots\right\} \triangleq B_0\end{aligned} \tag{20}$$

当上式根号内为正时,$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$有意义,即

$$1+\frac{3}{4}a^2 \geqslant 0 \qquad a \geqslant \sqrt{4/3} = 1.1547 \tag{21}$$

而

$$F_1 = f(x_0, v_0) = f(a\cos\varphi,\ -aB_0\sin\varphi) \tag{22}$$

故

$$A_1=\frac{\int_0^{2\pi}F_n\sin\varphi\mathrm{d}\varphi}{\int_0^{2\pi}\left(2B_0+a\frac{\partial B_0}{\partial a}\right)F_n\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi}=\frac{\int_0^{2\pi}(1-a^2\cos2\varphi)(1-aB_0\sin\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi}{\int_0^{2\pi}\left(2B_0+a\frac{\partial B_0}{\partial a}\right)\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi}$$

$$=\frac{\pi\sqrt{-1+3a^2/4}\,(a^2/4+d/2-1/2)}{\int_0^{2\pi}\left(2B_0+a\frac{\partial B_0}{\partial a}\right)\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi} \tag{23}$$

其中 $d=\frac{a^2}{8(-1+3a^2/4)}$，这样得到了一次近似解

$$x=a\cos\varphi+\cdots \tag{24}$$

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\varepsilon A_1(a)+\cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=B_0(a,\varphi)+\varepsilon B_1(a,\varphi)+\cdots \tag{25}$$

其中

$$B_1(a,\varphi)=-\frac{1}{aB_0\sin^2\varphi}\int_0^{\varphi}\left[F_1\sin\varphi+A_1\left(2B_0+a\frac{\partial B_0}{\partial a}\right)\sin^2\varphi+x_1g_x{}'\sin\varphi\right]\mathrm{d}\varphi \tag{26}$$

【例 10.4.3】 求如下系统的近似周期解。

$$\ddot{x}+\mu\dot{x}+2\alpha x+4\beta x^3+6\gamma x^5=\delta\cos\nu t \tag{27}$$

解 根据已有研究可知，它只能产生 $\omega=\mp\frac{\nu}{2i+1}$，$(i=0,1,2,\cdots)$的共振(主共振 $i=0$ 和次谐波共振 $i\geqslant1$)。其能量函数为

$$V(x)=\alpha x^2+\beta x^4+\gamma x^6 \tag{28}$$

由式(10-45)得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{a^*|\sin\varphi|}\sqrt{2[V(a^*+b^*)-V(a^*\cos\varphi+b^*)]}$$

$$=-\sqrt{2\alpha+3\beta a^{*2}+\frac{15}{4}\gamma a^{*4}+\left[(\beta a^{*2}+2\gamma a^{*4})\cos2\varphi+\frac{1}{4}\gamma a^{*4}\cos4\varphi\right]}$$

$$\approx\omega_0^*+\omega_2^*\cos2\varphi+\omega_4^*\cos4\varphi \tag{29}$$

其中

$$\omega_0^*=-\sqrt{2\alpha+3\beta a^{*2}+\frac{15}{4}\gamma a^{*4}}$$

$$\omega_2^*=\frac{\beta a^{*2}+2\gamma a^{*4}}{2\omega_0^*}$$

$$\omega_4^*=\frac{\gamma a^{*4}}{8\omega_0^*} \tag{30}$$

故由式(10-47)求得系统主振动、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{5}$次谐振动的表达式为

$$x_i=a_i^*\left\{\left(1\quad\frac{1}{2}\frac{\omega_{2i}^*}{\omega_{0i}^*}\right)\cos\left(\frac{1}{2i+1}\nu t+\beta^*\right)+\frac{1}{6}\frac{\omega_{2i}^*-\omega_{4i}^*}{\omega_{0i}^*}\cos3\left(\frac{1}{2i+1}\nu t+\beta^*\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{10}\frac{\omega_{4i}^*}{\omega_{0i}^*}\cos5\left(\frac{1}{2i+1}\nu t+\beta^*\right)\right\}\qquad i=0,1,2,\cdots \tag{31}$$

计算与思考

1. 用推广的渐近法求如下系统的周期解。

$$\dot{x} + x + \frac{3}{2}x^2 = -\varepsilon(\mu + x)\dot{x}$$

$$x(0) = b, \dot{x}(0) = 0, 0 < \varepsilon \leqslant 1, \mu > 0$$

2. 求如下强非线性系统的周期解。

$$\ddot{x} + x - x^2 + \varepsilon\delta\dot{x} = \varepsilon f\cos\Omega t$$

3. 讨论如下系统的周期共振解和次谐波周期解。

$$\ddot{x} + x^3 = \varepsilon(f\cos\Omega t - 2\mu\dot{x})$$

4. 分析如下强非线性系统的振动特性。

$$\ddot{x} + RF'(x)\dot{x} + \frac{1}{L}F(x) = A\cos\Omega t$$

$$F(x) = \alpha x + \beta x^3$$

第十一章　非线性方程解的某些物理性质

非线性方程式的解与线性方程式在物理性质上有本质的区别，主要表现在以下几个方面[37,128]：

1．当恢复力为非线性时固有频率是振幅的函数

对杜芬方程，即恢复力含有位移的三次项的非线性方程，其固有频率的近似值为

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{M}\left(k+\frac{3}{4}bA^{2}\right)} \tag{11-1}$$

对于分段线性的非线性系统，其固有频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{M}\left\{k+\Delta k\left[1-\frac{2}{\pi}\left(\phi_{e}+\frac{\sin 2\phi_{e}}{2}\right)\right]\right\}} \tag{11-2}$$

或

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{M}\left\{k+\Delta k\left[1-\frac{4}{\pi}\frac{e}{A}\left(1-\frac{1}{6}\left(\frac{e}{A}\right)^{2}-\frac{1}{40}\left(\frac{e}{A}\right)^{4}\right)\right]\right\}} \tag{11-3}$$

从式(11-1)和式(11-3)可看出，对于硬式非线性振动系统，固有频率 ω 随振幅 A 的增大而增加；而对于软式非线性振动系统，固有频率 ω 随振幅 A 的增大而减小。图 11-1 表示固有频率与振幅的关系曲线。曲线 1 所示的是固有频率随振幅的增大而增加；曲线 2 所示的是固有频率随振幅的增大而减小；而直线 3 是线性振动系统的固有频率，它是一个常量，不随振幅的变化而改变。

假如对某振动系统进行振幅逐渐减小的衰减试验，测出其振动位移与时间的关系曲线，当振幅减小时，振动周期 T 随振幅的减小而增大，则为硬式非线性系统；若振动周期随振幅的减小而减小，则为软式非线性系统；若振动周期不随振幅大小而变化则为线性振动系统。如图 11-2 所示，左图为软式非线性振动系统的仿真曲线，右图为硬式非线性振动系统的仿真曲线。

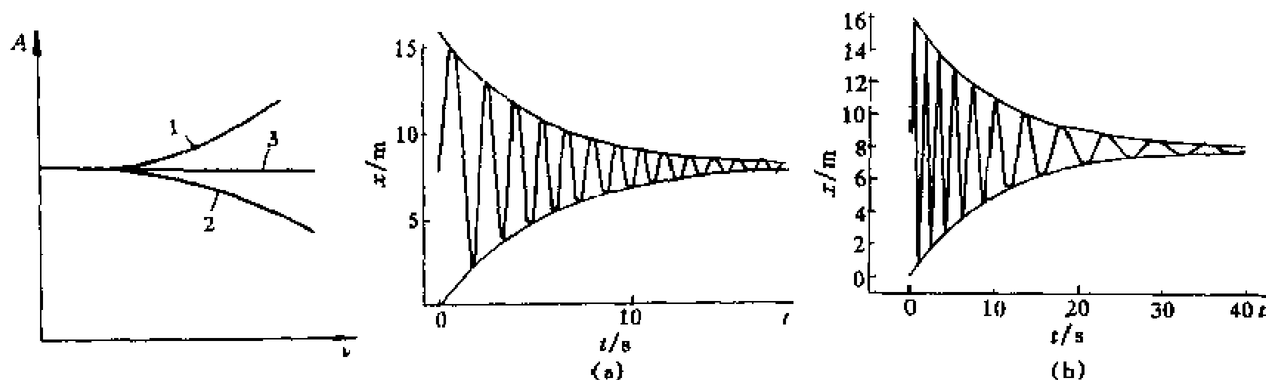


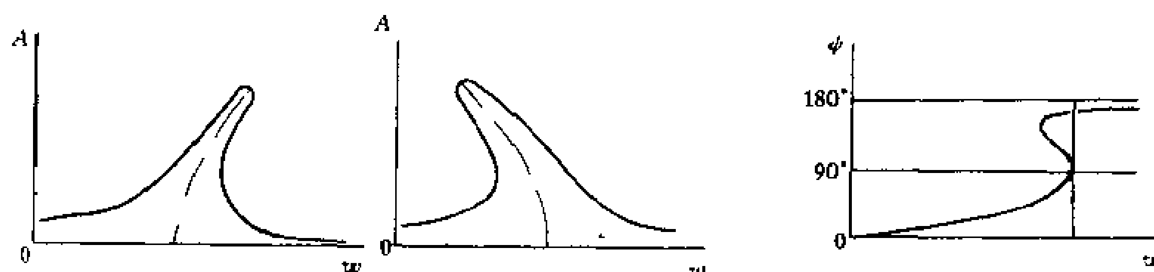
图 11-1　固有频率与振幅的关系曲线

图 11-2　硬式与软式非线性系统仿真的振动曲线

2．共振曲线形状不同于线性振动系统的曲线形状

非线性振动系统的共振曲线，即振幅与频率关系曲线（幅频曲线）和相位与频率的关系

曲线(相频曲线)与线性振动系统的有本质区别。图 11-3 中的 a,b 和 c 分别示出在简谐干扰力作用下硬式和软式非线性系统的幅频曲线及相频曲线。



(a)硬式非线性系统幅频曲线　(b)软式非线性系统幅频曲线　(c)硬式非线性系统相频曲线

图 11-3　非线性振动系统的幅频曲线与相频曲线

对于方程(11-1)所对应的非线性系统,其共振曲线一次近似解可由下式所示

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{F_0\cos\alpha}{k \pm \frac{3}{4}bA^2 - M\omega^2} \\
\alpha &= \arctan\frac{c\omega}{k \pm \frac{3}{4}bA^2 - M\omega^2}
\end{aligned}
\tag{11-4}
$$

按上式可作出 $A-\omega$ 曲线,当公式中之 ± 号取 + 号时,为图 11-3(a),当取 − 号时,则为图 11-3(b)。

对于分段线性的非线性振动系统,其共振曲线的一次近似解可表示为

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{F_0\cos\alpha}{k \pm \Delta k\left\{1 - \frac{4}{\pi}\frac{e}{A}\left[1 - \frac{1}{6}\left(\frac{e}{A}\right)^2 - \frac{1}{40}\left(\frac{e}{A}\right)^4\right]\right\} - M\omega^2} \\
\alpha &= \arctan\frac{c\omega}{k \pm \Delta k\left\{1 - \frac{4}{\pi}\frac{e}{A}\left[1 - \frac{1}{6}\left(\frac{e}{A}\right)^2 - \frac{1}{40}\left(\frac{e}{A}\right)^4\right]\right\} - M\omega^2}
\end{aligned}
\tag{11-5}
$$

如果阻力系数 c 很小,相位差角 $\alpha = 0°$ 或 $180°$, $\cos\alpha = \pm 1$。此时上式成为

$$
f\left(\frac{e}{A}\right) = \frac{1}{10\pi}\left(\frac{e}{A}\right)^5 + \frac{2}{3\pi}\left(\frac{e}{A}\right)^3 - \left(\frac{4}{\pi} + \frac{F_0\cos\alpha}{e\Delta k}\right)\frac{e}{A} + \frac{k \pm \Delta k - M\omega^2}{\pm\Delta k} = 0 \tag{11-6}
$$

按照上式,可画出 $f\left(\frac{e}{A}\right)$ 与 $\frac{e}{A}$ 的关系曲线,当 $f\left(\frac{e}{A}\right) = 0$ 时,可求出上述代数方程的解 $\frac{e}{A}$ 值,最终画出 $A-\omega$ 曲线。

由图 11-3(a)看出,共振曲线 A 的头部向右倾斜,此为硬式非线性系统的共振曲线特征;图 11-3(b)所示的共振曲线的头部向左倾斜,此为软式非线性系统的共振曲线特征。

3. 强迫非线性振动系统的振动有滞后与跳跃现象

对于非线性系统,如果我们使激振力幅保持不变,而缓慢地增加激振频率,振动系统的响应振幅将沿着图 11-4 上箭头所示的方向逐渐增大,当增加至一定值时,出现降幅跳跃,接着振幅将逐渐减小。反之,逐渐减小振动频率,振幅将渐渐增大,增至某一点之后,又会出现增幅跳跃,此后,振幅将逐渐减小。这种跳跃现象在线性振动系统中是不可能出现的。

由图 11-4 还能看出,返回过程的跳跃总是落后于前进过程的跳跃。这种现象,我们称它为滞后现象,这种滞后现象在线性振动系统中也是不会出现的。

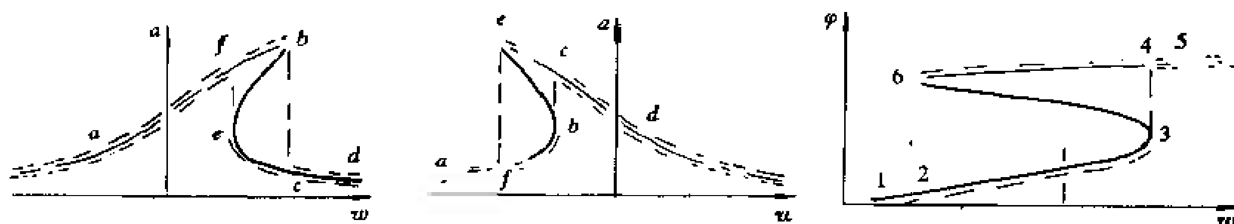

(a)硬式非线性振动系统的幅频曲线　(b)软式非线性振动系统的幅频曲线　(c)硬式非线性振动系统的相频曲线

图 11-4　强迫非线性振动系统出现的跳跃现象和滞后现象

4．共振曲线有稳定与不稳定区段

在简谐干扰力作用下的非线性振动系统，共振曲线中有稳定区与不稳定区。共振曲线上两次跳跃点之间的中间线段是不稳定的，而其它部分的线段是稳定的。对于线性振动系统，当阻尼为正时，振动通常是稳定的。当阻尼为零时，仅在共振条件下振动是不稳定的。

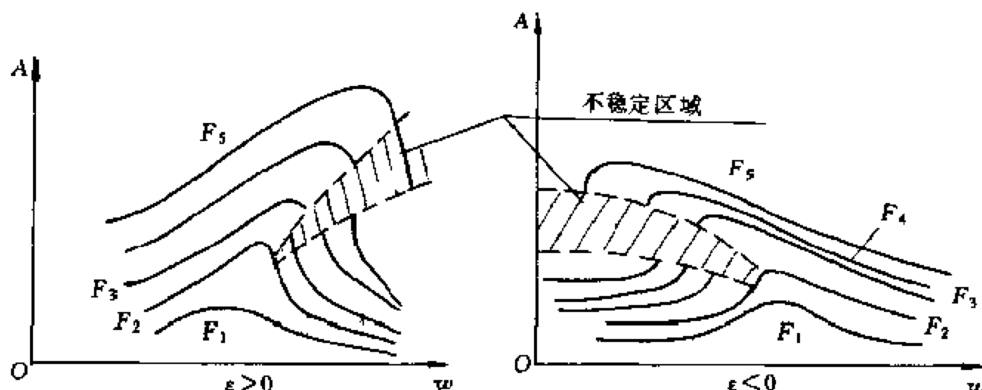


图 11-5　非线性振动系统共振曲线上的稳定区与不稳定区

5．强迫振动系统有超谐波响应和次谐波响应

在简谐激振力作用下的非线性系统，其强迫振动不一定是简谐振动，其响应的波形通常由各次谐波组成，除与激振力频率相同的谐波外，还含有频率为激振频率 Ω 的几分之一，即频率为 Ω/n 的次谐波响应及频率为激振频率 Ω 的整数倍，即频率为 $m\Omega$ 的超谐波响应(n，m 为正整数)。

次谐波振动和超谐波振动有两点不同，即

(1)超谐波响应在一般的非线性系统中或多或少是存在的，而次谐波响应则只在一定条件下才产生。

(2)当系统中存在阻尼时，阻尼只能影响超谐波振动的振幅大小，但对于次谐波振动，只要阻尼大于某一定值，就会阻止次谐波振动的出现。

由于存在次谐波与超谐波振动，非线性系统共振频率的数目将多于系统的自由度数。

当激振频率接近于系统固有频率的整数倍，例如等于固有频率的 3 倍时，该系统将出现振幅较大的而频率等固有频率的次谐波共振；而当激振频率接近系统固有频率的几分之一，例如三分之一时，则该系统将出现振幅较大的其频率等于固有频率的超谐波共振。

6．多个简谐激振力作用下的组合振动

非线性系统受激振力 $F_1\cos\Omega_1 t$ 和 $F_2\cos\Omega_2 t$ 作用，该系统不仅会出现频率为 Ω_1，Ω_2，$2\Omega_1$，$2\Omega_2$，$3\Omega_1$，$3\Omega_2$，…，而且会出现频率等于两个激振频率倍数之和或之差的组合频率的振

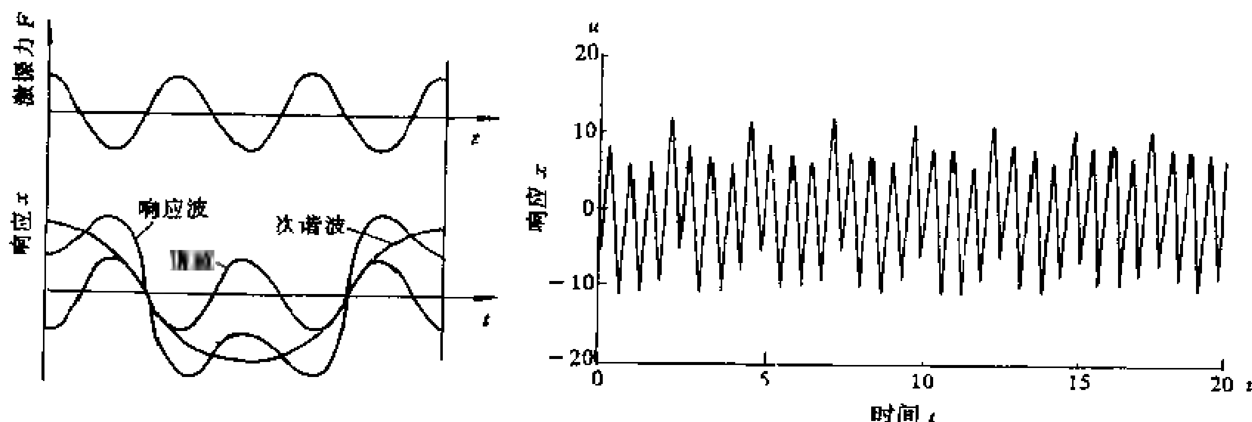


图 11-6　非线性振动系统的次谐波振动与超谐波振动

动，即 $|m\Omega_1 \pm n\Omega_2|$，($n, m$ 为正整数)，例如，$|\Omega_1+\Omega_2|$，$|2\Omega_1 \pm \Omega_2|$，$|\Omega_1 \pm 2\Omega_2|$ 等。在某些情况下，组合频率的振动较其它频率的振动要多得多，现在我们举例说明组合频率振动的产生过程。

假设某一非线性振动系统作用有两个频率的激振力，其运动微分方程式如下：

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x+bx^3 = F_1\cos\Omega_1 t+F_2\cos\Omega_2 t \tag{11-7}$$

方程的一次近似解为

$$x_1(t) = A_1\cos\Omega_1 t+A_2\cos\Omega_2 t \tag{11-8}$$

代入以上方程

$$\begin{aligned}\ddot{x}+\omega_0^2 x &= -b(A_1\cos\Omega_1 t+A_2\cos\Omega_2 t)^3+F_1\cos\Omega_1 t+F_2\cos\Omega_2 t\\ &= -b\left[A_1^3\cos^3\Omega_1 t+3A_1^2A_2\cos^2\Omega_1 t\cos\Omega_2 t+3A_1A_2^2\cos\Omega_1 t\cos^2\Omega_2 t\right.\\ &\quad \left.+A_2^3\cos^3\Omega_2 t\right]+F_1\cos\Omega_1 t+F_2\cos\Omega_2 t\end{aligned} \tag{11-9}$$

我们可以组合出以下三角函数表示上式的右边部分：

$$\begin{aligned}&\cos\Omega_1 t,\cos\Omega_2 t,\cos3\Omega_1,\cos3\Omega_2 t,\cos(2\Omega_1+\Omega_2)t,\\ &\cos(2\Omega_2+\Omega_1)t,\cos|2\Omega_1-\Omega_2|t,\cos|2\Omega_2-\Omega_1|t\end{aligned} \tag{11-10}$$

将这些项代入前式，我们可以求出含有以下各种频率的振动响应，除了 Ω_1 和 Ω_2 外，还有高次谐波 $3\Omega_1$ 和 $3\Omega_2$，以及组合频率 $2\Omega_1+\Omega_2$，$2\Omega_2+\Omega_1$，$|2\Omega_1-\Omega_2|$ 和 $|2\Omega_2-\Omega_1|$。若 $\Omega_1=100\text{Hz}$，$\Omega_2=120\text{Hz}$，按照前面的公式，会出现以下各种频率的振动：20，80，100，120，140，220，300，320，340 和 360 Hz。

7. 叠加原理不适用于非线性振动系统

在求解线性振动问题时，我们普遍采用叠加原理，但对于非线性振动系统，不能应用叠加原理。如有以下线性方程

$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2 x = F_1(t)+F_2(t) \tag{11-11}$$

可将上面的方程分解成以下两个方程

$$\begin{aligned}\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2 x &= F_1(t)\\ \ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2 x &= F_2(t)\end{aligned} \tag{11-12}$$

原方程的解 $x(t)$ 是由上面两个方程的解 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 叠加而成，即

$$x(t) = x_1(t)+x_2(t) \tag{11-13}$$

对于线性微分方程式，以下的叠加是成立的

$$\frac{\mathrm{d}^n(x_1+x_2)}{\mathrm{d}t^n}=\frac{\mathrm{d}^n x_1}{\mathrm{d}t^n}+\frac{\mathrm{d}^n x_2}{\mathrm{d}t^n} \tag{11-14}$$

如果方程不是线性的，而是非线性方程，由于高次项$(x_1+x_2)^2$，(式中 $n=2, 3, \cdots$)存在，因此叠加原理是不适用的，即出现了以下不等式

$$\begin{aligned}&(x_1+x_2)^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2\neq x_1^2+x_2^2\\&(x_1+x_2)^3=x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3\neq x_1^3+x_2^3\\&\frac{\mathrm{d}(x_1+x_2)^2}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x_1^2}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}(2x_1x_2)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}x_2^2}{\mathrm{d}t}\neq\frac{\mathrm{d}x_1^2}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}x_2^2}{\mathrm{d}t}\end{aligned} \tag{11-15}$$

如果在非线性系统中应用叠加原理，所得结果就会和实际正确的结果出现较大的差异，其结果往往是错误的。

8. 存在频率俘获现象

在线性振动系统中，如果同时存在频率为 ω_0 和 Ω 两个简谐振动，则当这两个频率比较近近时，会产生拍振。两个频率相差越小，拍振周期越大。当两个频率相等时，拍振才消失，两个振动就合成为一个简谐振动。

在非线性振动系统中，则不如此。例如，自激振动系统以频率 ω_0 自振时，若受到频率为 Ω 的，且和 ω_0 相接近的激振力的作用，则只出现一个频率的振动，即频率 Ω 和 ω_0 进入同步，这一现象称为“频率俘获”。能产生频率俘获现象的频带，称为频率俘获区域[140,141]。

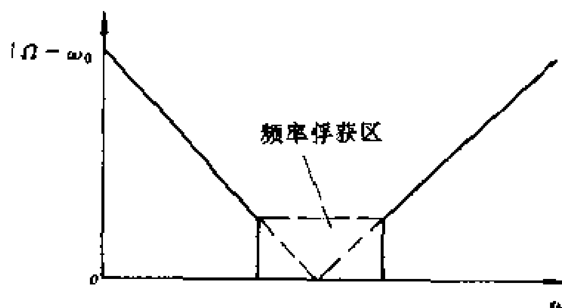


图 11-7 $|\Omega-\omega_0|$和 Ω 的关系

在工程中已得到广泛应用的自同步振动机，由两台感应电动机分别驱动，就是利用频率俘获原理进行工作的。

图 11-7 示出$|\Omega-\omega_0|$和 Ω 的关系。对于线性系统，此两个参数之间的关系是：只当 $\Omega=\omega_0$ 时，$|\Omega-\omega_0|$才等于零。对于非线性系统，例如对自激振动系统，当$|\Omega-\omega_0|$小于某一定值时，频率 Ω 和 ω_0 将吻合而出现频率俘获现象。图中的 $\Delta\omega$ 为频率俘获区。

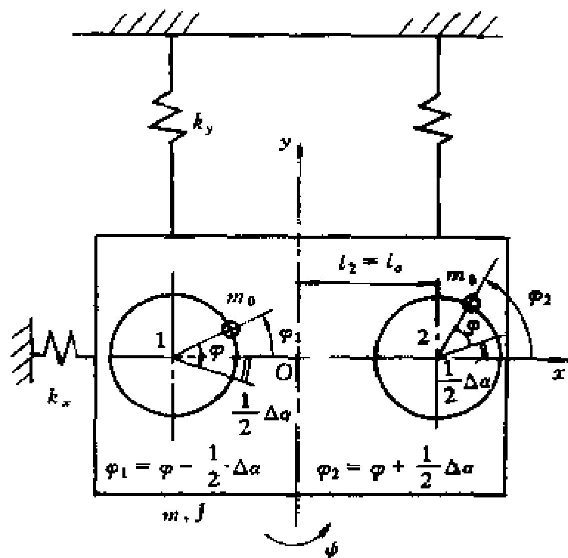


图 11-8 由两台振动电机驱动的自同步振动机的工作原理图

在工程中，频率俘获现象已得到广泛的应用，由两台感应电动机分别驱动的并装于同一振动系统中的两个偏心转子激振器，就是利用这一原理而进行工作的。目前在工业部门中应用的数以万计的自同步振动机都基于这一原理。图 11-8 表示了双激振电机(转轴上带有偏心块的电动机，作激振器使用)驱动的振动机示意图。试验曾指出，当两台激振电动机单独运转时，其转速分别为

962r/min 和 940r/min，而当同时运转时，其转速同为 950r/min，这就是明显的频率俘获现象。

除作平面运动的自同步振动机外，还有作空间运动的自同步振动机。

9．某些非线性振动系统会出现自激振动

在线性系统中自由振动总是衰减的，严格的周期运动只可能是周期干扰力作用下产生的强迫振动。而在非线性振动系统中，即使存在阻尼，也可能是周期运动。能量的损失可以由输入该系统的能量补偿，但输入能量的时间和大小由振动系统本身进行调节，这就是自激振动。

10．非线性系统有时会产生混沌运动

对于许多非线性振动系统，当其中的参数发生变化时，系统的运动就会从一般的周期运动、倍周期运动、概周期运动过渡到混沌运动。混沌，这是一种貌似随机运动的确定性运动，确定性是指它由内在原因而不是由外来的噪声或干扰所产生；而随机性指的是不规则的和不可预测的行为。美国气象学家 Lorenz 在大气中对流的一个简化模型的研究中和日本物理学家 Ueda 在一种变形 Duffing 方程的研究中，发现了确定性非线性系统的一些奇怪性态——混沌性态。即在一定条件下，这些系统的解，并不显现所预期的那种极限性态，这类运动具有对初值的极端敏感性，即初始条件的微小改变将会导致以后较长时间系统运动轨迹面目全非。非线性系统的混沌运动具有以下一些特性：具有连续的功率谱，奇怪吸引子的维数是分数的，具有正的 Lyapunov 指数，正测度熵等几何特性，此外，混沌运动具有局部不稳定而整体稳定等特征。混沌运动是 20 世纪的重大科学发现之一，在理论与实际应用方面均有重大意义。混沌现象对于研究转子故障或利用混沌作为转子故障的一种诊断手段，具有实际价值；混沌在通讯保密系统的设计中也具有重大实用意义。

计算与思考

1．非线性振动系统的共振曲线与线性振动系统相比有什么区别？试选择一种非线性振动系统的方程的稳态解作出共振曲线。

2．非线性振动系统的固有频率为什么与振幅的大小有关？

3．从非线性振动系统的幅频曲线与相频曲线可看出随着频率的变化会出现跳跃现象和滞后现象，试举例说明。

4．为什么叠加原理不适用于非线性振动系统？试举例说明。

5．在非线性振动系统中为什么会出现超谐共振、亚谐共振和组合共振？

6．频率俘获的含义及机理，试举例说明之。

7．自激振动具有那些特征？试举例说明。

8．为什么混沌运动是非线性振动系统的一种特殊的运动形式？

第十二章　非线性系统周期解的稳定性

12.1　研究周期解稳定性的意义及主要方法

12.1.1　研究的意义

对于线性振动系统，除了无阻尼共振情况外，所有周期运动都是稳定的。但是对于非线性系统，在出现的许多不同类型的周期运动中，如主谐波振动和次谐波振动，其中有的周期运动是稳定的，而有的周期运动是不稳定的，有关稳定性问题的研究有不少专门著作[6,13,42,68]。

在工程中，对平衡位置稳定性及运动状态稳定性的研究具有十分重要的意义。在某些情况下，确定系统在其平衡位置上是否稳定或研究所出现的运动状态的稳定性，比研究运动状态本身还重要。例如，在机械工程中常遇到自激振动的问题，其中关键就是判别该系统在什么条件下会产生自激振动，即着重研究自激振动的稳定性及系统的参数对稳定性的影响，而自激振动的形式和振幅大小并不重要。

在振动利用工程中，双激振电机自同步振动机两种同步运转状态所对应的双偏心转子两种不同相位的判定问题是一个典型的稳定性问题[33,34,129]。多激振电机的自同步振动机相位角的判定也是一个稳定性问题。

振动系统的运动由其运动方程式来描述，方程的一个解确定了系统的一种运动状态，方程的一个周期解对应着系统的一种周期运动，可以认为平衡位置是周期运动的一个特例，即运动周期等于∞的周期性运动，因此，对稳定性问题的研究归结于对系统运动方程周期解稳定性的讨论。

12.1.2　研究的主要方法

判别平衡位置和运动状态稳定性的方法有多种，常用的有：

1．图解法

对于二阶自治系统或自激振动系统，通常采用相平面法。对于平衡位置的稳定性，可由奇点的稳定与不稳定来判别。对于周期解的稳定性，可以由极限环的稳定性加以判别。

对于非自治系统，可以用点变换(或称点映射)或胞变换(或称胞映射)方法进行研究，也可以用频闪法加以判别。还可以将周期运动的稳定性判定问题转化为 Poincaré 不动点的稳定性判定加以解决。

2．代数判据法

依据微分方程定性理论，由微分方程特征根实部的符号来判定微分方程的稳定性。微分方程的特征方程为代数方程，从而可以利用代数判据法来判别线性系统运动状态的稳定性。

3．一次近似判别法

对于非临界情形的非线性系统的稳定性，可以用其对应的一次近似方程的稳定性来判

别。

4. 马提鄂(Mathieu)方程稳定性判别法

将微分方程变换为马提鄂方程的扰动方程式，然后利用马提鄂方程的稳定与不稳定区域图判别运动状态的稳定性。某些具有周期系数的非线性系统周期解的稳定性问题可以用此方法判别。

5. 里雅普诺夫(Lyapunov)直接法(第二方法)

根据微分方程的特点找出所谓的里雅普诺夫函数，再根据里雅普诺夫函数的性质判别运动状态的稳定性。

6. 中心流形判别法

对于临界情形的 $n+m$ 维非线性系统的稳定性，可以用其具有零实部的 n 维系统中的中心流形来判定。

12.1.3　稳定性的定义

对于给定的振动系统，可用如下形式的微分方程表示：

$$\dot{x}=f(t,x),\quad x\in R^n \tag{12-1}$$

其中 $x=0$ 时，系统存在零解 $f(t,0)=0$。对于方程(12-1)的任意解 $x=\varphi(t)$ 的稳定性的研究，可以通过变换 $y=x-\varphi(t)$ 化为零解 $y=0$ 的稳定性研究。以下仅研究方程(12-1)零解的稳定性问题。下面给出里雅普诺夫意义下稳定性的有关定义。

定义 1：如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$ 和 $t_0=0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0$，对于任一满足 $\|x_0\|<\delta$ 的 x_0，使得方程(12-1)满足初始条件 $x(t_0)=x_0$ 的解 $x=x(t)$，当 $t>0$ 时，均有 $\|x(t)\|<\varepsilon$，则称方程(12-1)的零解 $x=0$ 是稳定的。

定义 2：如果方程(12-1)的零解是稳定的，并且存在 $\delta>0$，当 $\|x_0\|<\delta$ 时，使得对于满足初始条件 $x(t_0)=x_0$ 的解 $x=x(t)$，均有 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$，则称方程(12-1)的零解是渐近稳定的。

定义 3：如果对于某个给定的 $\varepsilon>0$，无论 $\delta>0$ 怎样小，总存在一个 x_0，$\|x_0\|<\delta$，使得方程(12-1)满足初始条件 $x(t_0)=x_0$ 的解 $x=x(t)$，至少在某个时刻 $t_1>t_0$，有 $\|x(t_1)\|>\varepsilon$，则称方程(12-1)是不稳定的。

12.2　常系数线性系统的稳定性

线性系统的稳定性研究在非线性系统的稳定性研究中占有重要地位，所以下面先研究常系数线性系统的稳定性。

设常系数线性系统的微分方程为

$$\dot{x}=Ax\qquad x\in R^n \tag{12-2}$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 为 n 维矢量，$A=(a_{ij})$ 为 $n\times n$ 阶常数矩阵。令方程(12-2)的解为

$$x=Ce^{\lambda t} \tag{12-3}$$

其中 $C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^T$ 为 n 维矢量。将式(12-3)代入方程(12-2)，得

$$(A-\lambda I)C=0 \tag{12-4}$$

其中 I 为 $n\times n$ 阶单位矩阵。方程(12-4)有非零解的条件是其系数行列式的值为零,即

$$D(\lambda)=|A-\lambda I|=0 \tag{12-5}$$

展开(12-5)式后,有

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_0=0 \tag{12-6}$$

其中 λ 为矩阵 A 的特征根。

由微分方程理论,有以下稳定性定理:

定理 1:若 A 的所有特征根均有负实部,则方程(12-1)的零解是渐近稳定的。

定理 2:若 A 的特征根中至少有一个根有正实部,则方程(12-1)的零解是不稳定的。

定理 3:若 A 的特征根中没有正实部,但有零实部,则方程(12-1)的零解可能是不稳定的也可能是稳定的,但总不会是渐近稳定的。

定理 4:若 A 的特征根中没有正实部,但有实部为零的单根(有零根或一对纯虚根),则方程(12-1)的零解是稳定的,但不是渐进稳定的。

定理 5:若 A 的特征根中没有正实部,但有实部为零的重根,则

①若每个重根的代数重数与几何重数相等,则方程(12-1)的零解是稳定的。

②若至少有一个重根的几何重数小于代数重数,则方程(12-1)的零解是不稳定的。

【例 12.2.1】 单摆的自由振动的微分方程为

$$\ddot{x}+p^2x=0 \tag{1}$$

分析其稳定性。

解 将单摆的自由振动的微分方程改写为一阶方程

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2\\ \dot{x}_2&=-p^2x_1\end{aligned} \tag{2}$$

其特征方程的特征根 $\lambda_1,\lambda_2=\pm pj$,由稳定性定理 4 知方程(1)的零解,即单摆的平衡位置是稳定的。

【例 12.2.2】 分析阻尼振动系统

$$\ddot{x}+2\mu\dot{x}+p^2x=0 \tag{3}$$

的稳定性。

解 该系统的特征方程为

$$\lambda^2+2\mu\lambda+p^2=0 \tag{4}$$

其特征根为 $\lambda_{1,2}=-\mu\pm\sqrt{\mu^2-p^2}$,根据定理 1 知,该系统的零解是渐近稳定的。

【例 12.2.3】 分析如下系统的稳定性

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-x-y+2z\\ \dot{y}&=x-y\\ \dot{z}&=x-y\end{aligned} \tag{5}$$

解 该系统的特征方程为 $\lambda^2(\lambda+2)=0$,其特征根 $\lambda_{1,2}=0,\lambda_3=-2$。特征根 $\lambda=0$ 的代数重数为 2,而对应于特征根 $\lambda=0$ 的特征向量只有一个(1, 1, 1),故几何重数为 1。根据稳定性定理 5 中第二项,知该系统的零解是不稳定的。

【例 12.2.4】 分析如下系统的稳定性

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-5x-5y+z+w\\ \dot{y}&=3x+3y-z-w\end{aligned}$$

$$\dot{z} = 4x - 4y - 2z - 2w$$
$$\dot{w} = 3x + 3y + z + w \tag{6}$$

解 该系统的特征方程为 $\lambda^2(\lambda+1)(\lambda+2)=0$，其特征根为 $\lambda_{1,2}=0, \lambda_3=-1, \lambda_4=-2$。对于二重根 $\lambda=0$，其对应的特征向量有两个 $a_1=(1,-1,0,0), a_2=(0,0,1,-1)$，故 $\lambda=0$ 的几何重数为 2，等于其代数重数。根据定理 5 的第二项，该系统的零解是稳定的。

12.3 非线性系统稳定性的一次近似判别法

对于非线性自治系统

$$\dot{x} = f(x) \qquad x \in R^n \tag{12-7}$$

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 邻域内有连续二阶偏导数，则由多元 Taylor 公式，可将 $f(x)$ 展为

$$f(x) = A \cdot x + g(x) \tag{12-8}$$

其中

$$A = \mathrm{D}f = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}_{x=0}$$

为 n 阶常数矩阵，$f=(f_1, f_2, \cdots, f_n)^T$，$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 为向量函数，$\mathrm{D}f$ 为函数 f 的 Jacobi 矩阵，且非线性项 $g(x)$ 满足

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0 \tag{12-9}$$

由此，式(12-7)可写成

$$\dot{x} = Ax + g(x) \tag{12-10}$$

其对应的一次近似系统为

$$\dot{x} = Ax \tag{12-11}$$

对于式(12-10)的零解的稳定性问题可分为两大类：

1)非临界情形 这种情形的非线性系统的稳定性态可以由其线性近似系统决定。

2)临界情形 在这种情形下非线性系统的稳定性态不能仅由其线性近似系统决定，需要考虑非线性项的影响。这种情形的稳定性问题，可以用里雅普诺夫第二方法，或者中心流形定理进行分析，但这往往是很复杂和困难的。

本节仅讨论非临界情形的稳定性问题，对于临界情形，将在 12.5 节和 12.6 节研究。

对于非临界情形的零解的稳定性问题，有以下的稳定性定理：

定理 1：若一次近似系统式(12-11)的矩阵 A 的所有特征值的实部均为负值，则非线性系统式(12-10)的零解是渐近稳定的。

定理 2：若一次近似系统式(12-11)的矩阵 A 的特征值至少有一个正实部，则非线性系统式(12-10)的零解是不稳定的。

定理 3：若一次近似系统式(12-11)的矩阵 A 的特征值有零实部，而其余的特征值的实部均为负值。则非线性系统式(12-10)的零解由高阶项 $g(x)$ 决定。

在研究非线性系统式(12-10)的零解的稳定性问题中，判定一次近似系统式(12-11)的

矩阵 A 的特征值的实部是否均为负值十分重要。但当方程的阶数 $n>3$ 后，解特征方程求特征值将是困难的。Hurwits 定理解决了如何判定一个 n 次代数方程所有根的实部是否为负的问题。

定理 1：实系数的 n 次代数方程

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{12-12}$$

的所有根的实部均为负值的充分必要条件是下列Hurwits行列式

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \cdots$$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{vmatrix}, \quad \Delta_n = a_n\Delta_{n-1}$$

都大于零。其中当 $k>n$ 时，$a_0=1, a_k=0$。

由此可知，如果式(12-12)中有一个是零或是负值时，Hurwits 条件不成立，就不必再计算行列式的值了。

定理 2：式(12-12)的所有根的实部均为负值的充分必要条件是

①式(12-12)的系数全是正值，即 $a_i>0(i=0,1,\cdots,n)$

②式(12-12)的 Hurwits 一半行列式的值大于零，即 $\Delta_{n-1}>0, \Delta_{n-3}>0, \cdots$ 应用定理 2 可以少计算一半行列式的值。

定理 3：式(12-12)的所有根的实部均为负值的必要条件

$$a_ia_{i+1} > a_{i-1}a_{i+2} \quad (i=1,2,\cdots,n-2)$$

式(12-12)的所有根的实部均为负值的充分条件是

$$a_ia_{i+1} > 3a_{i-1}a_{i+2} \quad (i=1,2,\cdots,n-2)$$

灵活运用 Hurwits 的这三个定理，可以快速判定特征根是否均为负实部。

【例 12.3.1】　若有以下非线性方程式

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2x = \varepsilon f(x,\dot{x}) \tag{7}$$

式中 ε 为小参数。

当 $\varepsilon=0$ 时，以上方程变为以下线性方程

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \tag{8}$$

设方程的解为

$$x = Ae^{\lambda t} \tag{9}$$

代入方程(8)中，得原方程的特征方程式

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{10}$$

上式可写成以下一般形式

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \tag{11}$$

得

$$\lambda = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0} \tag{12}$$

如果以上方程中之 a_0, a_1, a_2 均大于零,即

$$a_0>0, \quad a_1>0, \quad a_2>0 \tag{13}$$

即方程的特征根 λ 具有负实部,则方程的解将逐渐衰减为零,所以运动是渐近稳定的。因此二阶方程的稳定性条件是式(13)。

对于三阶代数方程

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \tag{12-13}$$

为使 λ 全有负实部,则应满足以下条件

$$a_0, a_1, a_2, a_3>0, \quad \Delta = a_1a_2 - a_0a_3>0 \tag{12-14}$$

对于以下四阶代数方程

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0 \tag{12-15}$$

使 λ 有负实部的条件为

$$\begin{aligned} &a_0, a_1, a_2, a_3, a_4>0 \\ &\Delta = a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4>0 \end{aligned} \tag{12-16}$$

若四阶方程中 $a_4=0$,即 λ 的一个根为零,则四阶方程可按三阶方程处理。

任何多自由度系统的振动方程均可以化为高阶代数方程,当方程的系数确定以后,可用前面公式判别系统的运动状态的稳定性。

【例 12.3.1】 研究如下非线性系统的稳定性

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x + y - z + x^2e^y \\ \dot{y} &= \sin x - y + x^2y + z^4 \\ \dot{z} &= x + y - z - e^x(\cos z - 1) \end{aligned} \tag{14}$$

解 该系统在 $x=0$ 附近的一次近似系统的矩阵为

$$A = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

其特征方程

$$\begin{aligned} &D(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0 \\ &\Delta_1 = a_1 = 4>0 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 17>0 \end{aligned} \tag{15}$$

由 Hurwits 定理知特征方程(12-8)的所有根均为负值,又由一次近似判别定理 1 知该非线性系统是渐近稳定的。

【例 12.3.2】 分析如下系统的稳定性

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - y - z + xyz \\ \dot{y} &= x - 2y + 2z + x^2 + yz \\ \dot{z} &= x + 2y - z + xz + yz \end{aligned} \tag{16}$$

解 该系统的一次线性近似系统的特征方程为

$$D(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 5\lambda - 9 = 0 \tag{17}$$

因特征方程式(17)有系数为负的项,由 Hurwits 定理知该系统的零解是不稳定的。

12.4 线性周期系数系统的稳定性

12.4.1 线性周期系数系统稳定性的一般定理

设线性周期系数系统

$$\dot{x}=A(t)x \qquad t\in(-\infty,+\infty) \qquad x\in R^n$$

其中 $A(t)$是$(-\infty,+\infty)$上连续的 $n\times n$ 矩阵函数，$A(t+T)=A(t)$。从表面上看，线性周期系数系统与常系数线性系统的解的稳定性问题十分类似。但是，实际上由于线性周期系数系统的稳定性需要根据特征乘数或特征指数判定，而确定特征乘数或特征指数一般是极其困难的，对于一般问题，根本没有能得到特征指数或特征乘数的解析法，更不能根据矩阵 $A(t)$的特征值的情况判定线性周期系数系统的稳定性，因此这两类系统的解的稳定性研究有很大的差别。在此，仅给出两个稳定性定理。有关特征乘数或特征指数的知识限于篇幅，请参见有关微分方程著作。

定理 1：如果线性周期系数系统的一切特征乘数的模都小于 1，而且每个模等于 1 的特征乘数都对应矩阵 $C=e^{TR}$的若当(Jordan)标准形中的一维若当块(即线性周期系数系统的一切特征指数都有非正实部，且每个有零实部的特征指数都对应矩阵 R 的若当标准形中的一维若当块)，则线性周期系数系统的解是稳定的。

定理 2：如果线性周期系数系统的一切特征乘数的模都小于 1(即线性周期系数系统的一切特征指数都有非正实部)，则线性周期系数系统的解是渐近稳定的。

对于非线性周期系数系统的零解的稳定性，有如下的稳定性定理：

定理 1：如果非线性周期系数系统的一次近似系统的一切特征指数都有负实部，则非线性周期系数系统的零解是渐近稳定的。

定理 2：如果非线性周期系数系统的一次近似系统至少有一个特征指数具有正实部，则非线性周期系数系统的零解是不稳定的。

12.4.2 马提鄂(Mathieu)方程判别法

若有以下非线性方程

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=F(t) \tag{12-17}$$

其中

$$F(t)=F(t+T)$$

首先建立扰动方程式，设方程的解或周期运动状态出现以下扰动，即

$$x=x_0(t)+\eta(t) \tag{12-18}$$

式中 $\eta(t)$——扰动量；

$x_0(t)$ ——方程的解。

如果 $\eta(t)$越来越小，最后趋近于零，则称 $x_0(t)$是渐近稳定的。

如果 $\eta(t)$在某一规定的小区域内，则称 $x_0(t)$是稳定的。

如果 $\eta(t)$越来越大，或超出规定的范围，则称 $x_0(t)$是不稳定的。

将式(12-18)代入(12-17)中，则有

$$\ddot{x}_0+\ddot{\eta}+f(x_0+\eta)(\dot{x}_0+\dot{\eta})+g(x_0+\eta)=F(t) \tag{12-19}$$

再将 $f(x_0+\eta)$ 及 $g(x_0+\eta)$ 展为泰勒级数

$$\ddot{x}_0+\ddot{\eta}+f(x_0)\dot{x}_0+f(x_0)\dot{\eta}+\dot{f}(x_0)\eta\dot{x}_0+\dot{g}(x_0)\eta+g(x_0)=F(t) \tag{12-20}$$

因原方程为 $\ddot{x}_0+f(x_0)\dot{x}_0+g(x_0)=F(t)$，所以可得以下扰动方程式

$$\ddot{\eta}+f(x_0)\dot{\eta}+[\dot{f}(x_0)\dot{x}_0+\dot{g}(x_0)]\eta=0 \tag{12-21}$$

因为 $x_0(t)$ 是周期函数，所以 $f(x_0)$ 与 $[\dot{f}(x_0)+\dot{g}(x_0)]$ 也是周期函数。因此，我们可以将以上的扰动方程式变成带周期系数的微分方程式，即参数方程式

$$\ddot{\eta}+p(t)\dot{\eta}+g(t)\eta=0 \tag{12-22}$$

其中马提鄂方程即为其中一个特例

$$\ddot{\eta}+(\theta_0+2\theta_1\cos 2t)\eta=0 \tag{12-23}$$

马提鄂方程的稳定性依赖于 θ_0 和 θ_1 数值的大小，根据 θ_0 和 θ_1 的值可作出稳定区域与不稳定区域图，如图 12.1。图中阴影部分为不稳定区，白色区域为稳定区。

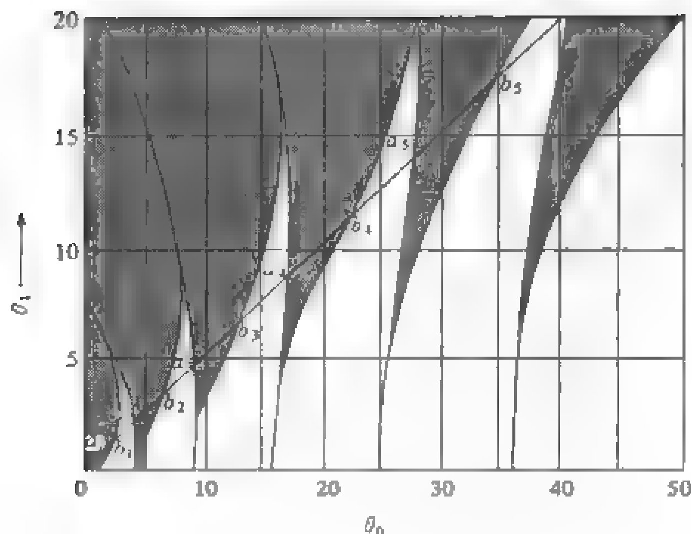


图 12-1 马提鄂方程的稳定区与不稳定区

【例 12.4.1】 若有以下方程

$$\ddot{x}+0.85x+0.05x^3=0.1\cos 3t \tag{18}$$

设该方程有以下次谐波解 $x=\cos t$，试判别此解是否稳定。

解 设该方程的解出现扰动，即 $x=2\cos t+\eta$，因而扰动方程式可写为

$$\ddot{\eta}+[0.85+3\times 0.05(2\cos t)^2]\eta=0 \tag{19}$$

因为 $(2\cos t)^2=2(1+\cos 2t)$，所以有

$$\ddot{\eta}+[1.15+0.15(2\cos 2t)]\eta=0 \tag{20}$$

由稳定性分区图 12-1 查得的 η 正好处在白色的区域内，所以上方程的次谐波解是稳定的。

12.5 里雅普诺夫直接方法

设一非线性系统的运动微分方程为

$$\dot{y}=F(y,t),\quad y\in R^n,\quad F\in R^n$$

该系统在初始条件 $y=y_0$ 下的特解 $y=f(y,t)$ 称为未扰运动，给初始条件 $y=y_0$ 一个微小的摄动 $y=y_0+\varepsilon(\varepsilon\in R^n)$。在此 $y=y_0+\varepsilon$ 初始条件下方程的特解 $y=\bar{f}(y,t)$ 称为被扰运动。现引入新变量 $x=y-\bar{y}$，则原系统微分方程化为

$$\dot{x}=\dot{y}-\dot{\bar{y}}=f(y,t)-f(\bar{y},t)=g(x,t)$$

并称为扰动方程。当 $x=0$，$g(0,t)\equiv 0$，即扰动变量的平衡位置对应于未扰运动，从而未扰运动周期解的稳定性问题就转变为扰动方程零解的稳定性问题。

里雅普诺夫直接法是根据微分方程式来构造一个所谓的里雅普诺夫函数 V。该函数是二次型，根据函数 V 的性质，可以判定微分方程式的周期解的稳定性。

当函数 $V\geqslant 0$，(或 $V\leqslant 0$)，称为常号函数，$V>0$(或 $V<0$)称为定号函数，当 $V\geqslant 0$，称为常正，$V\leqslant 0$ 称为常负，如果 $V>0$，而有时 $V<0$，称为变号函数。

定理 1：如果对于扰动方程可以求得一定号函数 $V(t,x_1,x_2,\cdots)$，而其导数 V' 或是与 V 符号相反的常号函数，或等于零，则此未被扰动的运动是稳定的。

定理 2：如果对于扰动方程可以求得一定号函数 $V(t,x_1,x_2,\cdots)$，而其导数 V' 是与 V 符号相反的定号函数，则未被扰动的运动是渐近稳定的。

定理 3：如果对于扰动方程存在一个非常负(常正)函数 $V(t,x)$，而其导数 V' 是正定(负定)的，则未被扰运动是不稳定的。

此定理要求 V 函数不是常负的，即 V 可以是正定的，常正的或变号函数中的任何一种，而 V' 是正定的，则未被扰动不稳定。

【例 12.5.1】 有以下方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0 \tag{21}$$

该方程可写为

$$\frac{dx}{dt}=y$$
$$\frac{dy}{dt}=-kx \tag{22}$$

该方程的总能量为

$$V=\frac{1}{2}(kx^2+y^2) \tag{23}$$

其导数 $\frac{dV}{dt}=0$，所以，根据定理 1，未被扰动的运动是稳定的。

【例 12.5.2】 研究下述方程描述的非线性系统的稳定性

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-y-\alpha x^3\\ \dot{y}&=x-\alpha y^3\end{aligned} \tag{24}$$

解　构造里雅普诺夫函数 $V(x,y)=x^2+y^2$，其全导数

$$V'=2x\dot{x}+2y\dot{y}=-2\alpha(x^4+y^4) \tag{25}$$

当 $\alpha>0$ 时，V 是定正的，而 V' 是定负的，由定理 2 知该系统是渐近稳定的。
当 $\alpha<0$ 时，V 是定正的，而 V' 也是定正的，由定理 3 知该系统是不稳定的。

利用里雅普诺夫稳定性定理判定非线性系统的稳定性，不但可以解决非临界情形的稳定性问题，而且还可以解决某些用一次近似判别法不能判定的临界情形的稳定性问题。但是构造里雅普诺夫函数往往是困难的，有时甚至是不一定能找到的。

12.6 中心流形判别法

对于临界情形的非线性系统,即一次近似系统的特征值具有零实部,当系统微分方程的维数 $n \geqslant 3$ 时,其稳定性的判定是个尚未完全解决的难题。利用微分动力系统中的中心流形定理可以判别某些临界情形的非线性系统的稳定性。

下面先介绍中心流形的概念。设非线性系统

$$\dot{x} = Cx + \Phi(x) \tag{12-24}$$

其中 $x \in R^{n+m}$, C 为非线性系统对应的线性近似方程的系数矩阵,在原点 O 的一个邻域内,映射 $\Phi: \Omega \to R^{n+m}$, $\Phi(0) = 0$, $D\Phi(0) = 0$, Φ 具有二阶以上连续偏导数。设 C 有 n 个特征根的实部为零,有 m 个特征根的实部为负。于是经过非奇异的线性变换后,系统(12-24)在 Ω 内可写成

$$\begin{aligned} \dot{u} &= Au + f(u, v) \\ \dot{v} &= Bv + g(u, v) \end{aligned} \qquad (u, v) \in \Omega \subset R^n \oplus R^m \tag{12-25}$$

其中 A 和 B 分别为 $n \times n$ 和 $m \times m$ 阶常数矩阵, A 的 n 个特征根的实部为零, B 的 m 个特征根的实部为负,并且 $f: \Omega \to R^n$, $g: \Omega \to R^m$, $f(0,0) = 0$, $g(0,0) = 0$, $Df(0,0) = 0$, $Dg(0,0) = 0$。称 $v = h(u)$ 为方程(12-25)的满足上述条件的一个局部中心流形,并且满足 $h(0) = 0$, $Dh(0) = 0$。通常在不引起混淆时简称为中心流形。

将 $v = h(u)$ 代入式(12-25)的第一式,得到

$$\dot{u} = Au + f(u, h(v)) \qquad u \in R^n \tag{12-26}$$

对于中心流形 $v = h(u)$,有下面的稳定性定理:

中心流形定理:如果方程(12-26)的零解是稳定(渐近稳定、不稳定)的,则原非线性系统(12-24)的零解也是稳定(渐近稳定、不稳定)的。

中心流形定理将 $n + m$ 维系统的稳定性问题变换为 n 维系统的稳定性问题,降低了所研究系统的维数,从而简化了问题的复杂性。对于特征值具有零实部的非线性系统,一次近似方法失效,而用里雅普诺夫直接方法又难以构造出里雅普诺夫函数时,中心流形定理是一种较为有效的方法。

下面介绍如何构造中心流形。将 $v = h(u)$ 代入方程(12-25)的第二式,并利用链式求导法则,有

$$Dh(u)\dot{u} = Bh(u) + g(u, h(u)) \tag{12-27}$$

再将方程(12-25)的第一式代入上式中,整理后得到中心流形应满足的方程

$$Dh(u)[Au + f(u, h(\mu))] - Bh(u) - g(u, h(u)) = 0 \tag{12-28a}$$

中心流形还应满足条件:

$$h(0) = 0 \qquad Dh(0) = 0 \tag{12-28b}$$

从方程(12-27)及(12-28)求出中心流形 $v = h(u)$ 后,即可以由方程(12-26)的稳定性判定原系统(12-24)的稳定性。

需要指出的是,要从方程(12-27)及(12-28)求出中心流形 $v = h(u)$,一般是不能精确地求解的。但是可以在保证中心流形具有惟一连续导数的前提下得到 $v = h(u)$ 的一定精度的近似解,而此近似解对于判定原系统(12-24)的稳定性是足够的。

【例 12.6.1】 研究下述非线性系统零解的稳定性

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -y + \alpha xz \\
\dot{y} &= x + \alpha yz \\
\dot{z} &= -z + x^2 + y^2 + p(x, y, z)
\end{aligned}
\tag{26}
$$

其中 $p(x,y,z)$ 是有连续二阶偏导数的非线性函数，并且 $p\to 0$，当 $(x,y)\to 0$ 时。

解　该系统对应的线性近似系统特征方程的特征根分别为 $\lambda = \pm i, \lambda = -1$，即特征根有零实部和负实部。与(12-25)比较，知 $n = 2$，$m = 1$，即方程(26)的前二式相应于(12-25)中的第一式，第三式相应于(12-25)中的第二式。设 $z = h(x, y)$ 是该系统的一个中心流形，于是(12-28a)式成为

$$
\begin{bmatrix}\frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y}\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x\\ y\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\alpha xh\\ \alpha yh\end{Bmatrix}\right] + h - [x^2 + y^2 + p(x, y, z)] = 0 \tag{27}
$$

展开后得到确定 $h(x,y)$ 的偏微分方程式

$$
-(y + \alpha xh)\frac{\partial h}{\partial x} + (x + \alpha yh)\frac{\partial h}{\partial y} + h - (x^2 + y^2 + p(x, y, z)) = 0 \tag{28}
$$

由中心流形条件

$$
h(0,0) = 0,\quad \frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = 0,\quad \frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = 0 \tag{29}
$$

令

$$
z = h(x, y) = h_2(x, y) + h_3(x, y) \tag{30}
$$

其中 $h_2(x,y)$ 为 (x,y) 的二次齐次式，$h_3(x,y)$ 为 (x,y) 的至少三次项。代入上式，并比较二次幂项，得到

$$
-y\frac{\partial h_2}{\partial x} + x\frac{\partial h_2}{\partial y} + h_2 - (x^2 + y^2) = 0 \tag{31}
$$

根据式(30)，再令 $h_2 = ax^2 + 2bxy + cy^2$，代入式(30)后，得到关于待定系数 a, b, c 的代数方程：$a + b + c = 0$，$a + 2b = 0$，$2b + c = 0$，解之得 $a = 1$，$b = 0$，$c = 1$。于是得到一个中心流形

$$
z = x^2 + y^2 + h_3(x, y)
$$

再将此中心流形代入原系统的前二个方程，得到降为二维的非线性系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -y + \alpha x[x^2 + y^2 + h_3(x, y)] \\
\dot{y} &= x + \alpha y[x^2 + y^2 + h_3(x, y)]
\end{aligned}
\tag{32}
$$

对于此系统，其线性近似系统的特征根的实部均为零。取里雅普诺夫函数

$$
V(x, y) = (x^2 + y^2)/2 > 0 \tag{33}
$$

其导数

$$
V'(x, y) = x\dot{x} + y\dot{y} = \alpha(x^2 + y^2)[(x^2 + y^2) + h_3(x, y)] \tag{34}
$$

由里雅普诺夫第二方法，知当 $\alpha > 0$ 时，二维系统式(32)的零解不稳定，当 $\alpha < 0$ 时，二维系统式(32)的零解渐近稳定，而当 $\alpha = 0$ 时，二维系统式(32)的零解稳定但不渐近稳定。再由中心流形定理，知原非线性系统式(26)零解的稳定性与此降维的非线性系统式(32)的稳定性一致。

12.7　应用举例

下面分析摩擦摆在平衡位置的稳定性，参看第一章中的图 1-3(b)及运动方程式(1-8)。

为研究位置 φ_0 的稳定性，可设

$$x = \varphi - \varphi_0,\quad \dot{x} = \dot{\varphi},\quad \ddot{x} = \ddot{\varphi} \tag{35}$$

代入式(1 11)，得到摆在 φ_0 处的扰动方程式

$$J\ddot{x} + ul\dot{x} - F(\Omega - \dot{x}) + mgl\sin(\varphi_0 + x) = 0 \tag{36}$$

式中

$$F(\Omega - \dot{x}) = [mgl\cos(\varphi_0 + x) - ml\dot{x}^2]r^2 f(\Omega - \dot{x})$$

由于所研究的是在 φ_0 附近的微扰动，故可将 $(\varphi_0 + x)$ 及 $F(\Omega - \dot{x})$ 展成

$$\sin(\varphi_0 + x) \approx \sin\varphi_0 + \cos\varphi_0 \cdot x + \cdots$$
$$F(\Omega - \dot{x}) \approx F(\Omega) - F'(\Omega)\cdot \dot{x} + \cdots \tag{37}$$

式(36)则为

$$J\ddot{x} + ul\dot{x} + F'(\Omega)\cdot\dot{x} - F(\Omega) + mgl\sin\varphi_0 + mgl\cos\varphi_0 x = 0 \tag{38}$$

静平衡时有 $\ddot{x} = \dot{x} = x = 0$，则有

$$F(\Omega) - mgl\sin\varphi_0 = 0 \tag{39}$$

考虑到式(39)，式(38)变成

$$J\ddot{x} + [ul + F(\Omega)]\dot{x} + mgl\cos\varphi_0 x = 0 \tag{40}$$

设

$$a = \frac{ul + F(\Omega)}{J},\qquad b = \frac{mgl\cos\varphi_0}{J} \tag{41}$$

则式(40)变成

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \tag{42}$$

显然，$b > 0$，若 $a > 0$，即阻尼是正的，则 φ_0 是渐近稳定的；若 $a = 0$，则 φ_0 是稳定的，若 $a < 0$，则 φ_0 是不稳定的。

计算与思考

1. 试判别如下线性方程组零解的稳定性

$$\dot{x} = -x - y$$
$$\dot{y} = -y - z$$
$$\dot{z} = -z - x$$

2. 试判别如下线性方程组零解的稳定性

$$\dot{x} = x - y - z$$
$$\dot{y} = x + y - 3z$$
$$\dot{z} = x - 5y - 3z$$

3. 试用一次近似判别法判别如下方程组的稳定性

$$\dot{x} = e^{-x-2y} - 1$$
$$\dot{y} = -x(1 - y)^2$$

4. 试用一次近似判别法判别如下方程组零解的稳定性

$$\dot{x} = e^x\sin y + \sin x + e^x - 1$$
$$\dot{y} = \sin(x + y)$$
$$\dot{z} = \ln(1 + x + y)$$

5. 试用 Hurwits 判据判别如下方程组零解的稳定性

$$\dot{x} = y + x^2$$

$$\dot{y} = z + y^2$$

$$\dot{z} = \quad x - 2y - 3z + z^2$$

6. 试用里雅普诺夫直接方法判别如下方程组零解的稳定性

$$\dot{x} = \sin(x + y)$$

$$\dot{y} = -\sin(y - x)$$

7. 试用里雅普诺夫直接方法判别如下方程组零解的稳定性

$$x = y + xy^2$$

$$\dot{y} = -x + x^2 y$$

8. 试用中心流形定理判别如下方程组零解稳定性

$$\dot{x} = -y + xz$$

$$\dot{y} \quad x + yz$$

$$\dot{z} = -z - (x^2 + y^2)$$

9. 试用中心流形定理判别如下方程组零解稳定性

$$\dot{x} = -z^2 + xyz$$

$$y = \quad y + 4xy + x^3$$

$$\dot{z} = -z + 5xz + x^4$$

第十三章　图解方法与数值方法

13.1　图解方法

13.1.1　相平面与相轨迹

振动系统的状态可用位移 x 和速度 y 来表示，xy 平面称为相平面。xy 平面上的点即为相点(或称状态点)。在相平面上的积分曲线称为相轨迹。根据相轨迹即可了解系统发生运动的总情况。自治系统的图解方法就是在相平面上作出运动微分方程轨迹的方法。

如果有以下微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+f\left(x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)=0 \tag{13-1}$$

令 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y$，则上式可写为以下一阶方程组

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=y=P(x,y)\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=-f(x,y)=Q(x,y)\end{aligned} \tag{13-2}$$

相平面上方程的积分曲线上各点切线的斜率为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\bigg/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}=m \tag{13-3}$$

由系统的平衡点 $x=0,y=0$，可以推出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=0\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=0\end{aligned} \tag{13-4}$$

而根据上式可推出平衡点具有更一般的形式

$$\begin{aligned}x&=x_0=\text{const.}\\ y&=y_0=\text{const}\end{aligned} \tag{13-5}$$

平衡状态 (x_0,y_0) 在什么条件下才是稳定的呢？

如图 13-1 所示的相平面上，设有平衡点 (x_0,y_0)，给定任意小的正数 η，由 η 决定任意小的邻域 $\delta(\eta)$。如果存在下面两个条件：

1. 当 $t=t_0$ 时，

$$|x(t_0)-x_0|<\delta(\eta),\ |y(t_0)-y_0|<\delta(\eta) \tag{13-6}$$

2. 在任何时间 t 时，$(t_0<t<+\infty)$，

$$|x(t)-x_0|<\eta,\ |y(t)-y_0|<\eta \tag{13-7}$$

这就是说起点 $[x(t_0),y(t_0)]$ 在 $\delta(\eta)$ 区域内，运动点 $[x(t),y(t)]$ 不跑出 η 区域，则平衡

状态(x_0, y_0)是稳定的。

在相平面图上，周期解是一条或一组封闭的轨迹线。它满足以下条件：

$$x(t+nT)=x(t)$$
$$y(t+nT)=y(t) \tag{13-8}$$

式中 T——时间间隔，或周期。

对于任意长的时间 t，方程的解都满足以上条件。

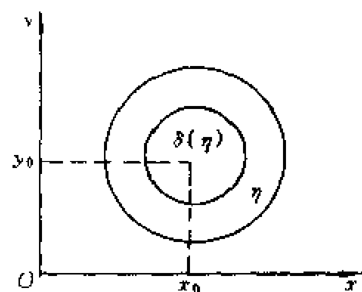


图 13-1 平衡点稳定性条件的示意图

13.1.2 等倾线作图法及相平面图上的奇点

根据式(13-3)，$\frac{dy}{dx}=m=\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}=\text{const.}$，可连成一曲线，这些斜率相等的曲线(或直线)，称为等倾线。

为了用等倾线法作出相平面图，先在 x，y 平面图上作出斜率相同的点，把它们连成曲线(如图 13-2 所示)。沿曲线作斜率相同的微小的直线段，然后由初始点(x_0, y_0)开始，向前向后依次作微小线段，使此微小线段平行于代表该点斜率的线段，并将这些小线段顺次联接起来，即可求得相轨迹。相轨迹上箭头的方向表示时间 t 增加的方向。

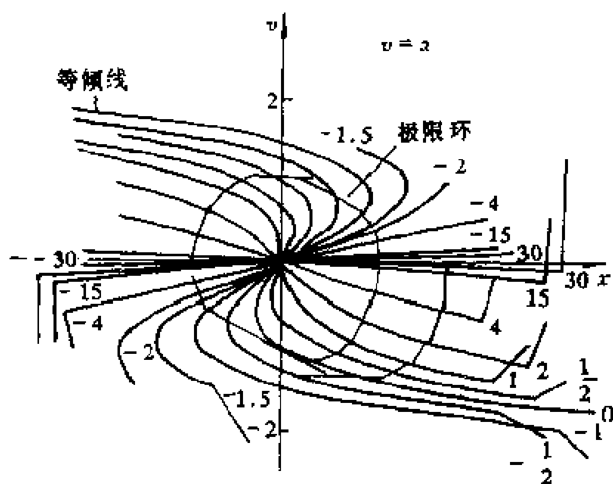


图 13-2 等倾线作图

值得注意的是相平面图上根据轨迹线的形状所出现的各种奇点和极限环，图 13-3 表示了各种奇点和极限环的形状。

1. 中心(图 13-3(a))：闭合相轨迹线中间的点称为中心，每一闭合的积分曲线代表一个周期解。中心代表振动系统的平衡状态，在中心(孤立奇点)邻近的曲线都是闭合的，所以这个奇点是稳定的。

2. 焦点(图 13-3(b))：通常是螺旋线的终点或起点。如果螺旋线的方向是朝向内部的，则此终点为稳定焦点；如果螺旋线的方向是向外的，则此起点为不稳定焦点。因为没有闭合曲线，所以没有周期解。

3. 结点(图 13-3(c)，(d))：为曲线族的交点，如果曲线方向朝向该点，则此交点为稳定结点；如果曲线方向由该点朝向外部的，则此交点为不稳定结点。因为没有闭合曲线，也就没有周期解。

4. 鞍点(图 13-3(d))：只有积分曲线 $x=0$、$y=0$ 通过原点，其它的全在原点附近经过，这个类型的奇点叫鞍点，鞍点是不稳定的。

5. 极限环(图 13-2)：极限环即是相平面图上的封闭曲线。如果当 t 大于某一定值时，积分曲线进入某封闭的环形曲线，则此环形曲线，即极限环是稳定的。如果当 t 大于某定值

时，积分曲线的方向是由某环形曲线流向它的外部，则此环形曲线，即极限环是不稳定的。因为一个极限环通常代表一个周期解，如果极限环是稳定的，则周期解也是稳定的；如果极限环是不稳定的，则周期解也是不稳定的。

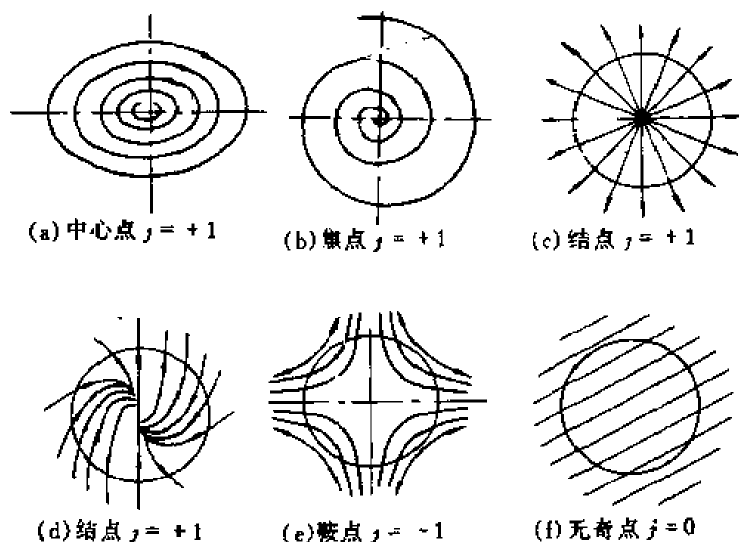


图 13-3　各种奇点图

【例 13.1.1】　具有非线性弹性力的无阻尼振动系统，其运动方程式为

$$\ddot{x}+ax+bx^{3}=0$$

变换为一阶方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-(ax+bx^{3})$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}=\frac{-(ax+bx^{3})}{y}$$

根据以上方程，可在相平面图上作出积分曲线。图 13-4(a)是当 $a>0, b>0$ 的情形。由图看出，该图中有一个中心及一组封闭曲线，每条曲线代表一个周期解，图 13-4(b)是当 $a>0, b<0$ 的情况，例如单摆的运动就属此例，该图中有一个中心和一个鞍点。在图示范围内，存在若干封闭曲线，因此在此区域内有周期解存在。

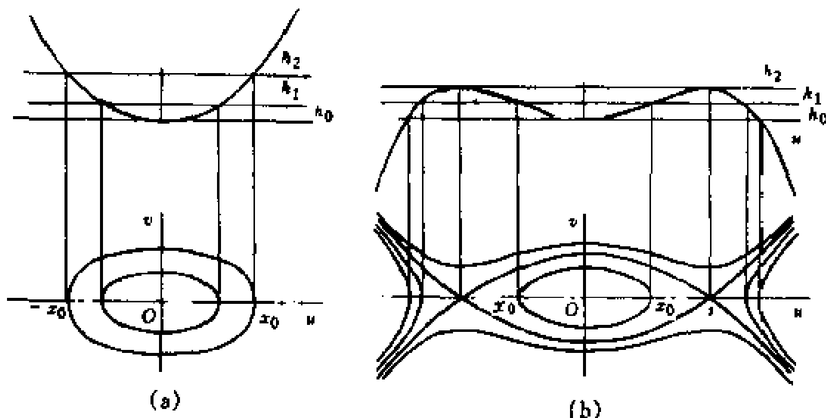


图 13-4　硬式与软式非线性振动系统的相轨迹图

【例 13.1.2】　某自激振动系统，其运动方程式为

$$\ddot{x}-\varepsilon(1-x^{2})\dot{x}+x=0$$

变换为一阶微分方程式

$$\frac{dx}{dt}=y$$

$$\frac{dy}{dt}=-x+\varepsilon(1-x^2)y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x+\varepsilon(1-x^2)y}{y}$$

当 $\varepsilon=0.1$ 和 $\varepsilon=1$ 时，则可求出如图 13-5 所示的相轨迹。由图看出，图中有一条封闭轨迹线。这条闭轨线把 $x-y$ 相平面分成两部分。在此封闭轨迹线以外的所有轨线都不是封闭的，而且当时间增加时，都盘旋地无限趋近于此曲线。在其内部的所有轨线也都不是封闭的，而且当时间增加时从里而逐渐接近此闭轨线。因此，这个闭轨线，即极限环是稳定的。而图中的一个奇点（焦点）是不稳定的。

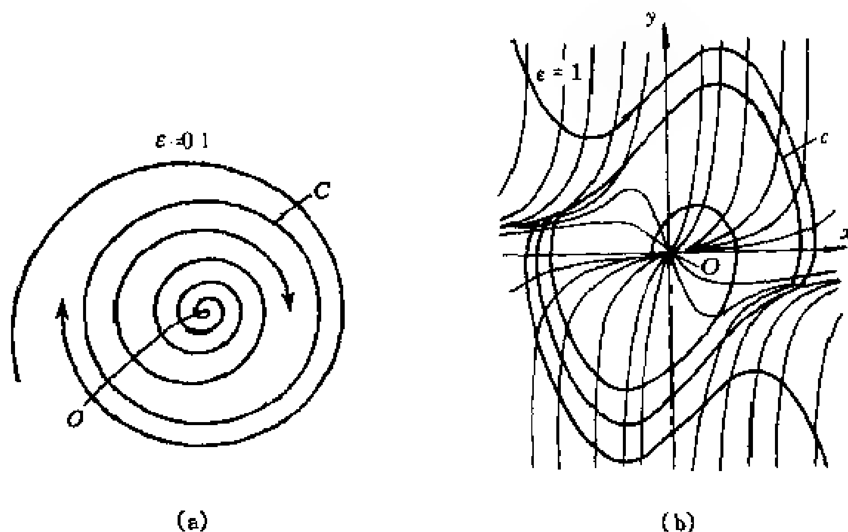


图 13-5 某自振系统的相轨线图

13.1.3 连那得(Lienard)作图法

有以下方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)\frac{dx}{dt}+g(x)=0 \tag{13-9}$$

范德波方程和雷瑞方程都可归为这一类。

令

$$F(x)=\int_0^x f(x)dx \tag{13-10}$$

引入

$$\frac{dx}{dt}=y-F(x),\text{即 } y=\frac{dx}{dt}+F(x) \tag{13-11}$$

则有

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}-\frac{dF(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}-f(x)\frac{dx}{dt} \tag{13-12}$$

但由式(13-9),得

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-f(x)\frac{dx}{dt}-g(x) \tag{13-13}$$

将式(13-12)代入上式,得

$$\frac{dy}{dt}=-f(x)\frac{dx}{dt}-g(x)+f(x)\frac{dx}{dt}=-g(x) \tag{13-14}$$

因而有

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=y-F(x)\\ \frac{dy}{dt}&=-g(x)\end{aligned} \tag{13-15}$$

而

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-g(x)}{y-F(x)} \tag{13-16}$$

法线的斜率为

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y-F(x)}{-g(x)} \tag{13-17}$$

Leinard 作图法的步骤是:

1. 作 Δ 曲线:$y=F(x)$,即 $y-F(x)=0$;
2. 过 $M(x,y)$引垂直线 MCD,交 Δ 曲线于 D;
3. 过 D 作水平线DN,交 y 轴于N;
4. 连接 N 与M,过 M 点作MN 的垂直线;
5. 由点 $M(x_0,y_0)$起始作切线$\overline{MM'}$,再作$\overline{M'M''}$, $\overline{M''M'''}$,连成折线,再作光滑曲线,即得此积分曲线(如图 13-6)。

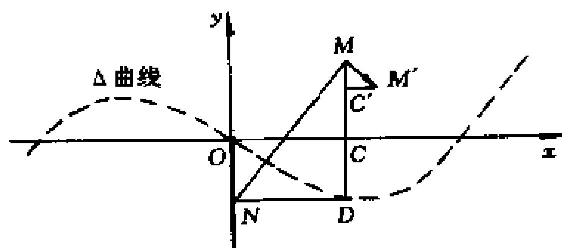


图 13-6　Leinard 作图法

因为法线 MN 的斜率恰好是积分曲线 M 点切线的 $-\frac{1}{\tan\alpha}$ 负倒数,即 $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y-F(x)}$,而 MN 的斜率为 $\frac{dx}{dy_{(M)}}=\frac{y-F(x)}{x}=\frac{MD}{DN}$。

上面的作图法还可以采用下面的一个变换,经变换之后,作图更加方便。

引用变换

$$x_1=\int x\,dt \qquad x=\frac{dx_1}{dt} \tag{13-18}$$

可将方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)\frac{dx}{dt}+x=0 \tag{13-19}$$

变换为

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+F\left(\frac{dx_1}{dt}\right)+x_1=0 \tag{13-20}$$

因为

$$\int \frac{d^2x}{dt^2}dt + \int f(x)\frac{dx}{dt}dt + \int x\,dt = 0 \tag{13-21}$$

以 $x = \frac{dx_1}{dt}$ 代入，即得

$$\int \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)dt + \int f\left(\frac{dx_1}{dt}\right)\frac{d^2x_1}{dt^2}dt + x_1 = 0 \tag{13-22}$$

即

$$\int \frac{d^3x_1}{dt^3}dt + \int F\left(\frac{dx_1}{dt}\right)d\left(\frac{dx_1}{dt}\right) + x_1 = 0 \tag{13-23}$$

于是有

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + F\left(\frac{dx_1}{dt}\right) + x_1 = 0 \tag{13-24}$$

其中

$$F\left(\frac{dx_1}{dt}\right) = \int f\left(\frac{dx_1}{dt}\right)d\left(\frac{dx_1}{dt}\right) \tag{13-25}$$

采用以下方程

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= y\\ \frac{dy}{dt} &= -F(y) - x_1\end{aligned} \tag{13-26}$$

即

$$\frac{dy}{dx_1} = -\frac{F(y)+x_1}{y} \tag{13-27}$$

图 13-7 中的 Δ 曲线是 $x_1 + F(y) = 0$，而

$$\overline{DM} = -y\frac{dy}{dx_1} = \overline{CM} - \overline{CD} = x_1 + F(y) \tag{13-28}$$

所以有

$$\frac{\overline{DM}}{y} = -\frac{dy}{dx_1} \tag{13-29}$$

例：具有干摩擦的自治系统，可由以下方程式表示

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A\,\text{sign}\frac{dx}{dt} + x = 0$$

Δ 曲线的方程可表示为

$$x + F(y) = 0$$

当 $\frac{dx}{dt} > 0$ 时，$F(y) = +A$

当 $\frac{dx}{dt} < 0$ 时，$F(y) = -A$

Δ 曲线为

$$x = -F(y) = -A,\quad 当\ y>0\ 时,$$
$$x = F(y) = A,\quad 当\ y<0\ 时$$

积分曲线 Γ 可以按下面的方法画出，上半相平面的 N 点是 S_1，下半相平面的 N 点是 S_2，也就是曲线 Δ 是由以 S_1 和 S_2 为中心圆弧所组成(图 13-8)。

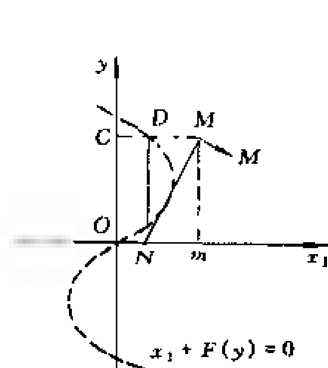


图 13-7　改进的连那得作图法

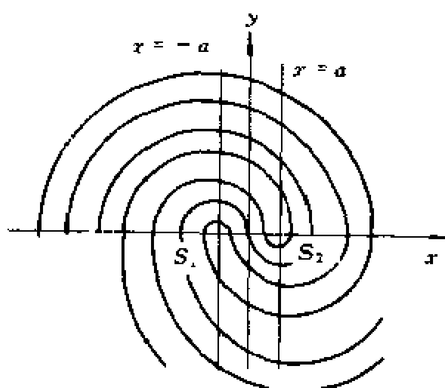


图 13-8　积分曲线 Γ

13.2　点映射与胞映射作图法

点映射法和下一节要讨论的胞映射法是一种适用于研究强非线性系统全局性态的有效方法。该法是通过计算机绘图得出所要研究的结果，因此我们把这种方法也称为图解方法[10,11,19,20,79,163,164]。当我们研究非线性动力系统时，首先感兴趣的是研究平衡状态的位置及其稳定性，而研究非线性系统周期运动的形式及其稳定性，则是本章研究的主题，这两项内容是我们分析和研究非线性系统的主要目标。对于弱非线性振动系统，各种摄动方法都是有效的；但对于强非线性振动系统，如果希望得到对全局性态的精确描绘，摄动方法在多数情况下是不适用的，甚至会完全失效。点映射法和胞映射法用于分析非线性系统全局性态，是一种十分有效的方法。

13.2.1　点映射系统

考察由以下方程控制的周期性非自治动力系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) \tag{13-30}$$

式中　$\boldsymbol{x}$ 为 n 维实向量，$\boldsymbol{f}$ 为实型向量函数，$\boldsymbol{f}$ 对 $\boldsymbol{x}$ 而言是非线性的，$\boldsymbol{f}$ 对显含的 t 是周期性的，我们可以不失一般性地认为周期等于 1。

假如我们能把系统在周期末的状态用系统在周期初始状态来表示，则上式可改写成以下差分方程组

$$\boldsymbol{x}(n+1)=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(n))\qquad n\ 为整数 \tag{13-31}$$

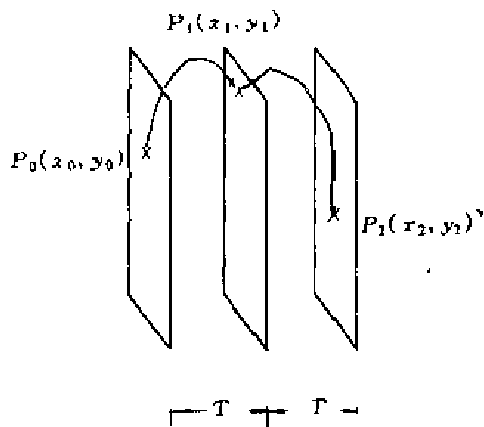
若动力系统的形式如式(13-31)所示，则状态向量 $\boldsymbol{x}(n)$ 只定义在整数时刻；即不研究系统运动的连续时间历程，而只研究在一系列离散时间瞬时系统的状态。研究式(13-31)的解，在确定了式(13-31)系统的性态之后，需要时就可以回到原系统，并得到连续时间历程。

以式(13-31)的方式定义的系统称为点映射系统。

13.2.2　不动点及其种类

下面用图示说明点映射过程及不动点的概念。

在图13-9中用三个平面分别表示时间 $t=0$, $t=T$ 和 $t=2T$ 时的相平面。设在相平面($t=0$)上的点 $p_0(x_0,y_0)$ 经过 T 后，在 $t=T$ 的平面上，被映射到 $p_1(x_1,y_1)$，$p_1(x_1,y_1)$ 点经过 T 后，又映射到 $p_2(x_2,y_2)$ 点上。如果将这一映射过程绘制在一个相平面上，如图13-10所示，就是点映射法的图示过程。



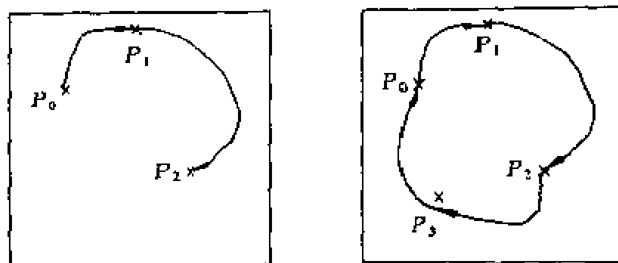


图13-9　点映射过程(1)与点映射过程(2)　　　　图13-10　高次谐波映射过程

所谓不动点就是经过时间 T 后的映射点与原来的位置相同，即：

$$x^*(n)=g(x^*(n))$$

对于二维问题可以写成，$x_2=x_1$，$y_2=y_1$，其中 x_1,y_1,x_2,y_2 分别代表映射点 p_1,p_2。

由上面公式可知，不动点代表系统的周期解或平衡位置。其中周期解可能包括高次谐波解或次谐波解。图13-10所示为次谐波的映射过程。

13.2.3　用点映射法求非线性系统周期运动——不动点

由于非线性系统运动的复杂性，在分析域内可能存在多种周期运动。当我们研究非线性动力系统时，首先感兴趣的是所有的周期运动以及它们的稳定性，而点映射法是求解周期运动和不动点的有效的数值方法。根据长期的研究经验，提出一套算法，可以方便地求出非线性系统 Poincare 截面上的不动点，绘制出时间历程曲线。

算法的基本思想：

一般情况下，相平面上的点，经过有限的时间后，进入某周期运动，而成为不动点。这一有限的时间称为过渡过程。进入某周期后系统作稳态运动。这里所讲的算法就是从这一运动过程分析得出的。取相平面上的有限个点作为初始点，从各个初始点出发进行连续地点映射(利用四阶龙格库塔法求 $x(n+1)=g(x(n))$，当映射的次数足够多时，就会进入某周期运动而成为不动点。以下的算法是如何由这一映射序列来确定周期运动，也就是不动点。

下面以 van der Pol 方程为例，说明周期运动的求法。

$$\ddot{x}+\mu(x^2-1)\dot{x}+x=F\cos\omega t$$

其中，$F=9.0$，$\omega=3.1416$，$\mu=4.125$。

首先根据略知的运动特性确定分析区间，该问题的分析区间为：$-3.0\leqslant x\leqslant 3.0$，$-5.2\leqslant \dot{x}\leqslant 5.2$。

第一，在分析域内选取有限个点作为初始点(一般为矩形网格的中心点)，利用数值积分法计算一个周期后的位置，即求初始点的映射点，然后再从映射点出发连续地进行点映射足够多的次数，例如500次，将最后的21次映射点的数值记录下来。下面的数据是从 $x=0$，v

=0 出发映射的结果，存在 $X(21)$，$V(21)$ 数组中：

	位　移	速　度
1	1.759884	0.788656
2	0.055841	-1.640271
3	-1.789402	1.021515
4	1.460524	1.457577
5	1.759884	0.788656
6	0.055841	-1.640271
7	1.789402	1.021515
8	-1.460524	1.457577
9	1.759884	0.788656
10	0.055841	-1.640271
11	1.789402	1.021515
12	-1.460524	1.457577
13	1.759884	0.788656
14	0.055841	-1.640271
15	1.789402	1.021515
16	-1.460524	1.457577
17	1.759884	0.788656
18	0.055841	-1.640271
19	-1.789402	1.021515
20	-1.460524	1.457577
21	1.759884	0.788656

可以看出，这是一个 P-4 周期运动。那么，程序是怎样进行处理的呢？现分析如下：

如果映射序列是 P-1 运动，那么 $x(1)=x(2)=\cdots=x(21)$；$y(1)=y(2)=\cdots=y(21)$；

如果映射序列是 P-2 运动，那么 $x(1)=x(3)=\cdots=x(21)$；$y(1)=y(3)=\cdots=y(21)$；

$$x(2)=x(4)=\cdots=x(20);\ y(2)=y(4)=\cdots=y(20);$$

如果映射序列是 P-3 运动，那么 $x(1)=x(4)=x(7)\cdots$；$y(1)=y(4)=y(7)\cdots$；

$$x(2)=x(5)=x(8)\cdots;\ y(2)=y(5)=y(8)\cdots;$$

$$x(3)=x(6)=x(9)\cdots;\ y(3)=y(6)=y(9)\cdots;$$

如果映射序列是 P-n 运动，那么 $x(1)=x(n+1)=x(2n+1)\cdots$；

$$y(1)=y(n+1)=y(2n+1)\cdots;$$

$$x(2)=x(n+2)=x(2n+2)\cdots;$$

$$y(2)=y(n+2)=y(2n+2)\cdots;$$

$$x(3)=x(n+3)=x(2n+3)\cdots;$$

$$y(3)=y(n+3)=y(2n+3)\cdots;$$

分别将位移和速度存放在 *XXM*1 和 *XXM*2 数组中，周期运动不动点存放在 *XPER* 1 和 *XPER* 2 中，*NPER* 为周期数。据此可识别出系统运动为 P-4 周期运动。P-4 不动点及时间历程曲线如图 13-11 所示。

在解决具体问题时，找出一周期运动后，如果从某一点出发又找到一周期运动，必须判断新找到的周期运动与原来找到的周期运动是否为同一周期运动，判定的方法是代表周期运动的各个不动点必须完全相同或误差小于给定的精度。

13.2.4　周期解的稳定性——不动点的稳定性

当初始点相对于不动点有微小偏离时，经过几次映射后仍然能回到不动点时为稳定的不动点，即稳定的周期解。

关于周期解是否稳定问题，将在胞映射法中进行讨论。

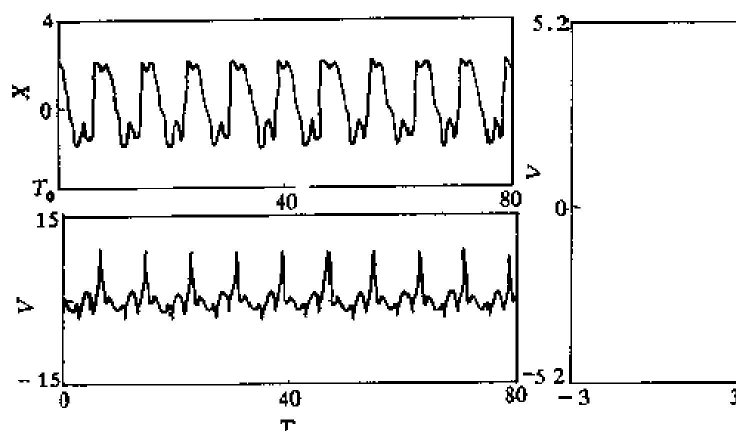


图 13-11　周期运动的不动点及时间历程曲线

13.2.5　将动力系统离散为胞映射系统

任何一个动力系统总可以写成下面点映射形式：

$$X(n+1)=P[X(n)] \tag{13-32}$$

上式表明，状态空间的一点 $X(n)$，在 P 的映射下，一个周期以后，为点 $X(n+1)$。像这样点到点的映射系统称为点映射系统或 Poincare 映射。利用点映射法分析动力系统的全局性态时，状态空间被看成是连续的。

胞映射法认为，点映射系统只是从理论上将状态空间看成是连续的。而实际上，所取的点无论如何不能完全连续，总有一个步长 h。当所找的点与已知点的距离小于 h 时，就会认为它们是同一点。从这一点出发，将一些点的集合，也就是胞作为映射点，从而产生了胞映射法，该法是由美籍华人徐皆苏教授提出的[19,20]。胞映射法把点映射系统中的状态向量 X_i 坐标轴分成间隔为 h_i 的等分，把 $Z(i)$ 定义成在 X_i 轴上满足下面方程

$$(Z(i)-0.5)h_i \leqslant Z_i \leqslant (Z(i)+0.5)h_i \tag{13-33}$$

$$i=1,2,\cdots,n$$

的点。这里 $Z(i)$ 为正整数，叫胞向量；$i=1,2,\cdots,N$；Z 叫做胞。每个胞是 N 维"长方体"或长方形，长方体边长为 $h_i(i=1,2,3,\cdots,N)$，每个胞在状态空间的位置由 N 个正整数 $Z(i)\ (i=1,2,\cdots,N)$ 确定。每一个胞作为整体考虑，以胞的中心点的特性代表整个胞的特性，将振动系统化为中心型胞映射系统：

$$Z(n+1)=C[Z(n)] \tag{13-34}$$

式中　C 代表胞映射(Cell Mapping)。式(13-34)包括了式(13-32)的全部特性。

13.2.6　胞映射系统与连续的非线性动力系统

以二维胞映射为例，说明胞映射系统与连续的动力系统之间的关系。

二维胞映射系统与单自由度振动系统相对应，设强迫振动的周期是 T。将位移分量和速度分量作为胞映射的状态空间。令 X_1 代表位移，X_2 代表速度。设所分析的区域是矩形，如图 13-12 所示。在分析域内有 30 个胞。为了说明方便，将胞以一维形式编号如图 13-12 中(a)所示，图(b)为(a)中各胞的映射胞分布图。

图 13-12 中的(a,b)表示：胞 1 在一个周期后映射到胞 2；胞 2 映射到胞 8；依此类推。映射可描述为：$C[Z(1)]=2$, $C[Z(2)]=8$, $\cdots C[Z(30)]=29$。胞 5, 6, 13, 25 的映射胞是

0，表明它们的映射胞在分析区域外。胞 2 的映射序列是 2-8-16-20-8-16-20-…；胞 3 的映射序列是 3-4-7-16-20-8-16-20-…等等。将所有胞的映射序列查出来后，系统的全局性态也就迎刃而解。胞 29 的映射胞仍为原胞；该胞的特性有两种可能：平衡胞，或者与强迫周期相同的周期胞，称 P-1 周期胞组，图中用＄表示。胞 8，16，20 为周期胞，称 P-3 周期胞组，图中用＃表示。胞 1，2，3，4，7，9，11，12，14，15，17，18，19，21，23 是经过不同的映射次数进入 P-3 周期胞组的胞，这些胞称为 P-3 周期胞组的吸引胞，用＃＃表示；同理，胞 26，27，28，30，22 为 P-1 周期运动的吸引胞，用＄＄表示。全局性态如图 13-12(c)所示。



(a)胞序号图（纵轴 X_2，横轴 X_1）

25	26	27	2	29	30
19	20	21	22	23	24
13	14	15	16	17	18
7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6

(b)映射胞分布图（纵轴 X_2，横轴 X_1）

0	27	28	28	29	29
20	8	16	27	2	1
0	20	8	20	16	17
16	16	17	18	19	17
2	8	4	7	0	0

(c)全局性态图（纵轴 X_2，横轴 X_1）

0	$ $	$ $	$ $	$	$ $
# #	#	# #	$ $	# #	# # #
0	# #	# #	#	# #	# #
# #	#	# #	# #	# #	# #
# #	# #	# #	# #	0	0

图 13-12　二维胞映射系统

上面过程的一般描述为：C^m 代表 m 次映射。C^0 代表恒等映射，若 k 个不同的胞，$Z^*(j)(j=1,2,\cdots,k)$满足：

$$Z^*(m+1)=C^m[Z^*(1)]\quad(m=1,2,\cdots,k-1)\tag{13-35}$$
$$Z^*(1)=C^k[Z(1)]$$

则这个序列就形成了周期为 k 的运动，简称周期 k 运动，记作 P-k 运动。

通过胞映射法将分析域中所有的周期胞组和它们的吸引胞找出来，而某一周期胞组的全部吸引胞为该周期胞组的吸引域。显然，当胞的边长足够小时，分析域中的 P-N 周期胞组与非线性系统中的 $N\times T$ 的周期运动相对应；而周期胞组的吸引域与非线性系统中该周期运动的渐近吸引域相对应。

13.2.7　胞映射算法

用一维胞映射来说明算法，介绍确定周期胞和它的吸引域的有效算法，同时也适用多维情况。考虑一维胞映射系统式(13-34)，一维胞映射的胞向量为一个正整数。首先介绍最重要的和必须的概念。

1. 陷胞与常规胞

有关这个概念涉及到所选择的分析域的大小。一旦确定了分析区间，那么，对区间以外的任何胞的状态就不再关心。因此在分析域中的任何一个胞，一旦映射到分析域外，就叫陷胞。对于一维情况来说，设分析域内有 N_c 个胞，为 $1,2,\cdots,N_c$，常规胞的映射为：$Z(n+1)=C[Z(n)]$，$Z(n)$和 $Z(n+1)$都在 $1,2,\cdots,N_c$ 范围内。

定义 1：如果 $Z(n)=1,2,\cdots,N_c$ 的映射胞 $C[Z(n)]<1$ 或 $C[Z(n)]>N_c$，那么其映射胞为陷胞，定义为 0，陷胞为 P-1 胞组。

定义 2：$C(0)=0$，即陷胞的映射胞仍为陷胞。

从任何一个常规胞开始计算，只能出现下面三种情况：

1)Z 胞是周期组的周期胞。

2)Z 胞经过 r 次映射后进入陷胞，那么这个胞属于陷胞的 r 步吸引胞。

3)Z 胞经过 r 次映射后进入某周期胞，那么这个胞属于这个周期胞组的 r 步吸引胞。

2. 胞的总体特性描述

为了描述 Z 胞的总体特性，引入三个数组：组号 $G(Z)$，周期数 $P(Z)$ 和步数数组 $S(Z)$。每一个周期胞组给出一个组号，把这个组号赋值给周期胞组的每一个胞和该周期胞组的每一个吸引胞。在总体分析过程中，当一个又一个周期胞组被找出来以后，连续地用组号(正整数)来赋值，周期胞组的组数与周期运动的个数相同。引入的四个数组：$C(Z)$，$G(Z)$，$P(Z)$，$S(Z)$ 及 Z 的意义是：

$Z=1,2,\cdots,N_c$ 为分析域中胞的序号。

$C(Z)$：Z 胞的映射胞。　　$G(Z)$：Z 胞所在的组号。

$P(Z)$：Z 胞所在的周期胞组的周期数。　　$S(Z)$：Z 胞是周期胞组的吸引胞的步数。

为了形成算法，更好地便于程序进行处理，对处理过程中的胞进行分类。

(1) 处女胞：在程序中没有经过处理的胞，还不能确定是属于哪一组的，将置 $G(Z)=0$，$Z=1,2\cdots,N_c$。这里有两重含义，第 1 是在程序开始时，将 $G(Z)$ 置成零，第二个含义是，在程序处理过程中，一旦碰到一个胞，当它的 $G(Z)=0$ 时，说明它是一个没有被处理的胞。

(2) 正在处理的胞：代表该胞已被调用过，但正在被处理，这样的胞 $G(Z)=-1$。

(3) 已经处理完的胞：该胞的组号已经确定，周期数及吸引步已确定，这样的胞 $G(Z)\geqslant 1$。

在处理胞的过程中，重复使用下面映射过程，设从第 Z 胞开始，

$$Z\rightarrow C(Z)\rightarrow C^2(Z)\cdots C^i(Z)\rightarrow\cdots C^m(Z) \tag{13-36}$$

这一过程叫做对 Z 胞的 m 阶处理序列。

3. 胞在映射过程中的处理方法：

在胞映射算法中，利用这一处理序列对 $Z=1,2,\cdots,N_c$ 胞一一处理。算法的思想是从处女胞 Z 开始，利用式(13-36)处理 Z，Z 胞的第 i 次映射可出现下面三种情况：

(1)$G(C^i(Z))=0$，这表明 $C^i(Z)$ 是一个没有处理过的胞。令 $G(C^i(Z))=-1$，继续寻找 $C^{i+1}(Z)$。

(2)$C^i(Z)=Z'$，且 $G(Z')=$ 正整数。这表明 $C^i(Z)$ 胞是已经处理完的胞。正在处理的所有胞，都属于这个组，与 Z' 有相同的组号，周期号。吸引域的步数确定为：

$S(C^j(Z))=S(Z')+i \quad j, j=1,2,\cdots,i$。然后处理下一个胞。

(3)设 $C^i(Z)=Z''$，它的组号 $G(Z'')=-1$，这说明 Z'' 胞在前面的处理序列中已经出现过。因此，在这个序列里包含着一个新的周期胞组。将所有正在被处理的胞被赋值成一个新的组号，新的组号比原来的组号大 1。确定新周期胞组中的周期胞、周期胞组的周期数、所有的吸引胞的步数。然后处理下一个胞。

4. 胞映射法程序框图(图 13-13)

13.2.8 胞映射法在工程中的应用举例

应用胞映射法进行全局分析的步骤

(1) 确定分析区间：

根据分析问题进行选取。在解决工程实际问题时，往往对于系统的全局性态有初步了解，根据平衡状态，运动的相平面图，选取分析区间。分析区间在能够反映系统全局性态的条件下应尽量取得小一些。

(2) 确定分析区间内胞的数量或胞的边长：

根据具体问题进行选取。分析区间内胞的数量或胞的边长直接关系到周期运动及其吸

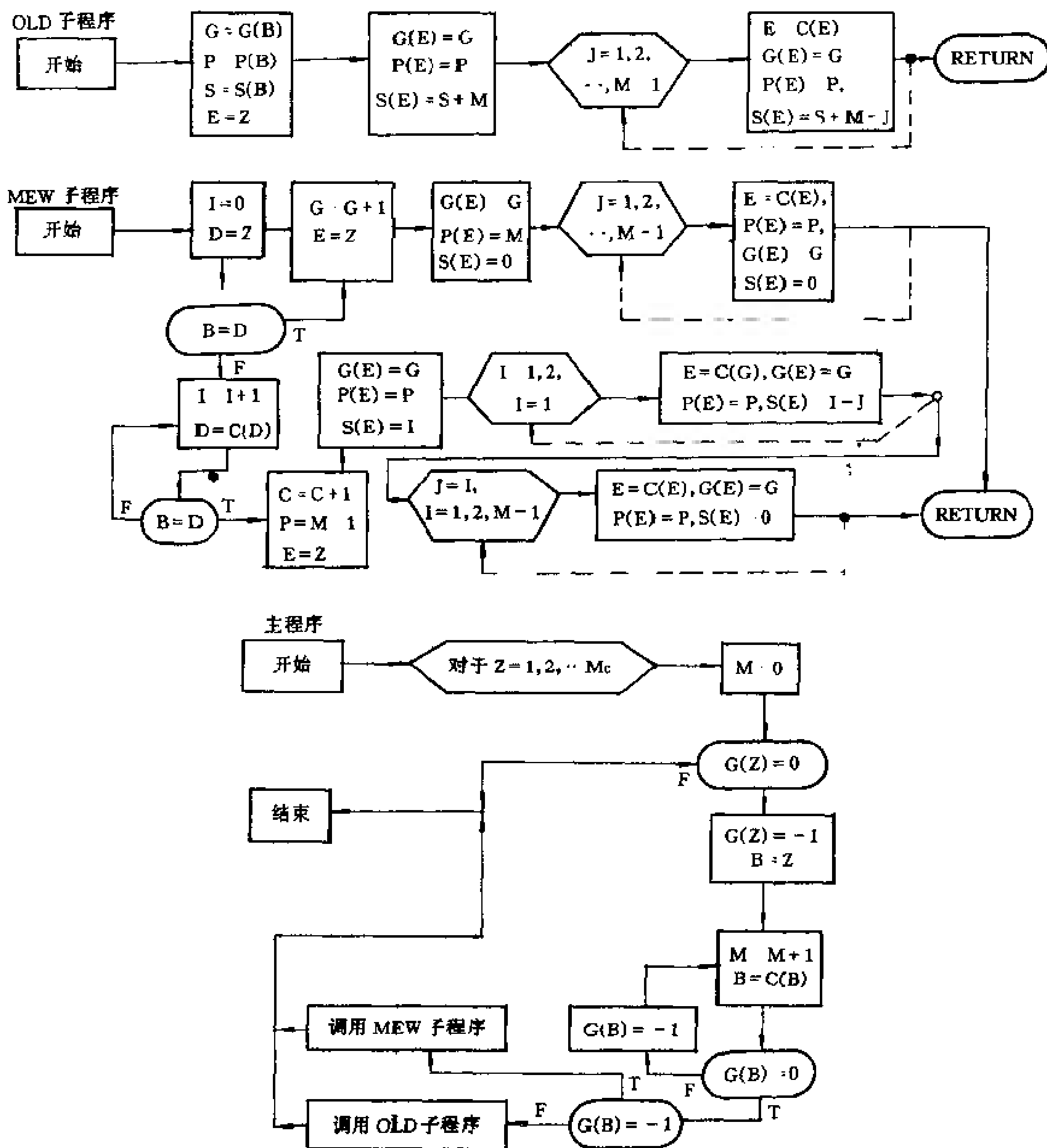


图 13-13 胞映射法程序框图

引域的精度，一般来说胞的边长越小越好。但胞的边长越小，分析域内胞的数量越多，所需要的计算机的容量越大，所占的计算机的时间越长。因此，当系统的全局性态相对简单的情况下，胞的边长大些。主要依据是系统全局性态的复杂程度和计算精度。

(3) 胞映射的数据准备工作——利用点映射法求分析域内所有胞的映射胞，求 $C(Z)$ 数组。胞映射法本身是比较简单的，程序也易懂，而数据准备工作是大量的，困难的，随着微分方程的复杂性的增加，其难度也越大。

(4) 用胞映射程序求周期运动及其吸引域。

(5) 绘制周期运动及其吸引域。

这项工作是胞映射的后处理工作。当求出一个非线性系统的周期运动及其吸引域后，当然希望知道其时间历程及吸引域的空间图形，那么就要绘制周期运动及其吸引域。

(6) 结束。

【例 13.2.1】 用胞映射法分析分段线性非线性振动机械的周期运动稳定性和全局性态。

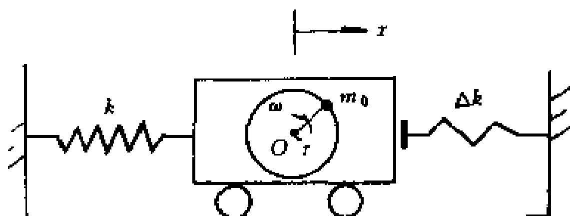


图 13-14 机构简图

图 13-14 为不对称分段线性非线性振动机械——弹簧摇机构简图，系统由偏心块 m_0 激振。振动质体 M 两侧分别装有软弹簧和带有间隙的硬弹簧，硬弹簧在振动的一个周期内时而与振动质体接触，时而离开，因而构成了分段线性非线性系统。其运动方程式为

$$M\ddot{x} + F(\dot{x}, x) + Q(x) = m_0\omega^2 r\sin\omega t \tag{13-37}$$

其中

$$F(\dot{x}, x) = \begin{cases} (f + \Delta f)\dot{x} & (x > -a) \\ f\dot{x} & (x \leqslant -a) \end{cases}$$

$$Q(x) = \begin{cases} -k(a - x) + \Delta k(x + a) & (x > -a) \\ -k(a - x) & (x \leqslant -a) \end{cases} \tag{13-38}$$

试对该系统进行动态特性分析。

方程参数：$M = 25$, $m_0 = 400$, $k = 43.7$, $\Delta k = 900$, $\omega = 34.56$, $a_0 = 1.9$, $a = 0.08798$, $r = 0.26$。

分析区间：$-1.86298 \leqslant X \leqslant 1.68702$, $-28.25 \leqslant V \leqslant 27.975$。

胞的边长：$h_1 = 0.05$, $h_2 = 0.05$。

胞的数目：$NC1 = 71$, $NC2 = 1120$。

一次胞映射时间是 0.18181s。

1. 一种参数下的全局分析：

当弹簧阻尼系数 $f = 0.05$, $\Delta f = 0.0$ 时，用胞映射法进行全局分析时，发现在分析域内有 11 种不同周期、不同振幅的周期运动，图 13-15，图 13-17，图 13-19、图 13-21 是其中的四种周期运动，图 13-16，图 13-18，图 13-20，图 13-22 是这些周期运动的相应的吸引域。

在这 11 种周期运动中 P-6 周期运动的振幅最大为 2.82cm，P-1 周期运动的振幅最小为 1.15cm。

通过对分段线性非线性振动机械全局性态的分析可知，弹簧阻尼系数为零时：

(1) 系统的全局性态呈现复杂的情况，存在十种以上周期运动。

(2) 从图 13-16，图 13-18，图 13-20，图 13-22 可以看出，周期运动的吸引域都是孤立的点，周期运动对初始条件具有极端敏感性，因而任何一种周期运动都是不稳定的。

(3) 系统存在十种周期运动，振幅从 1.13～2.82 之间波动，这是该类振动机械振幅不稳定的原因。

2. 非线性系统周期运动的分析

利用胞映射法计算了弹簧阻尼系数为 0.125，0.25，0.375，0.5 和 1.0N/(cm/s)时的系统全局性态，P-1 周期运动时间历程如图 13-23 所示；P-1 周期运动的吸引域如图 13-24 所示，由分析可知，当阻尼系数为 1.0 时，只存在一种周期运动，当阻尼系数为 0.5 时存在两种周期运动，即为 P-1 和 P-7 运动；当 $f = 0.375, 0.25, 0.125$ 时，仍然存在两种周期运动；而

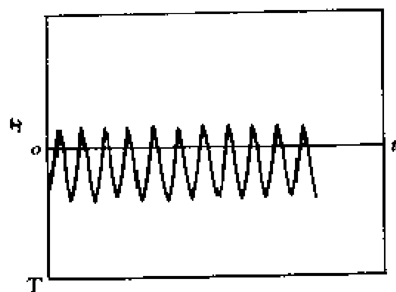


图 13-15　$P-1$ 周期运动位移－时间曲线

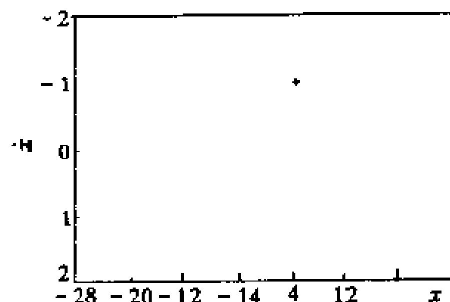


图 13-16　$P-1$ 周期运动的吸引域

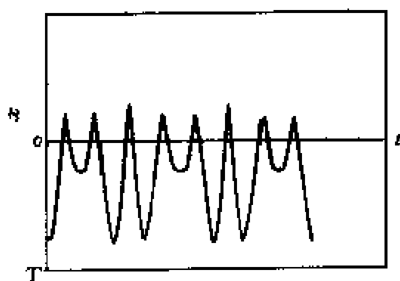


图 13-17　$P-4$ 周期运动位移-时间曲线

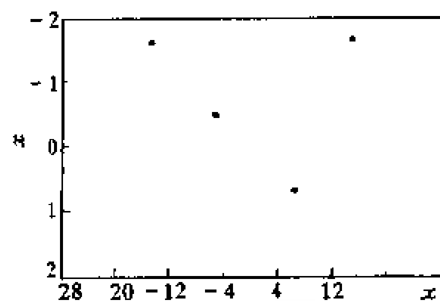


图 13-18　$P-4$ 周期运动的吸引域

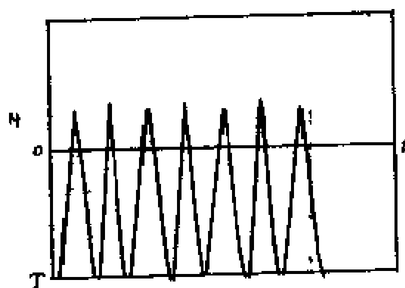


图 13-19　$P-6$ 周期运动位移-时间曲线

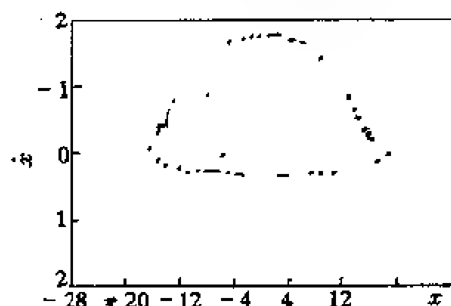


图 13-20　P-6 周期运动的吸引域

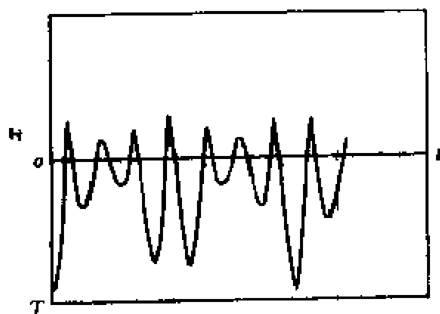


图 13-21　$P-7$ 周期运动位移-时间曲线

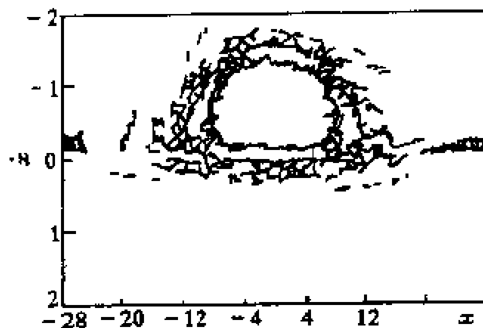


图 13-22　$P-7$ 周期运动的吸引域

当 $f=0$ 时，存在 10 种周期运动，这说明随着弹簧阻尼的减少，系统的全局性态越来越复杂，周期运动越来越不稳定。

从图 13-24 和图 13 28 中可以看出，随着弹簧阻尼的增加，P-1 运动的吸引域从孤立的点扩大到螺旋域，又从螺旋域扩大到连续的大面积。当吸引域为孤立的点时，周期运动对初始条件具有极端敏感性，这时周期运动是不稳定的；当吸引域面积为螺旋域时，说明周期运

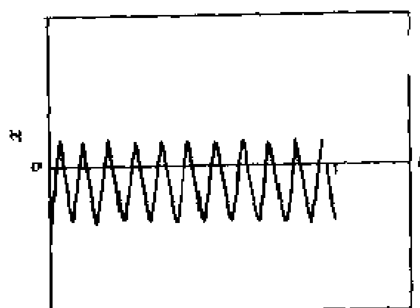


图 13-23　$P-1$ 运动时间历程

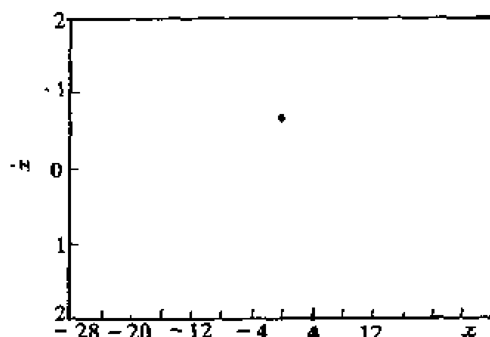


图 13-24　$f=0.125$ 时，$P-1$ 运动的吸引域

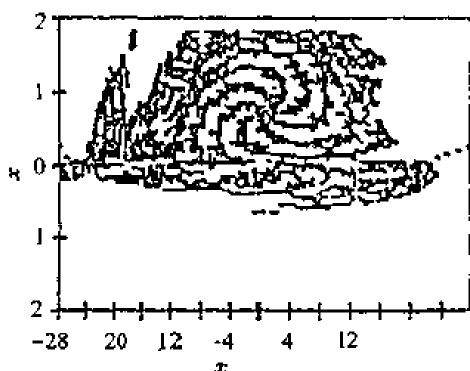


图 13-25　$f=0.25$ 时，$P-1$ 运动的吸引域

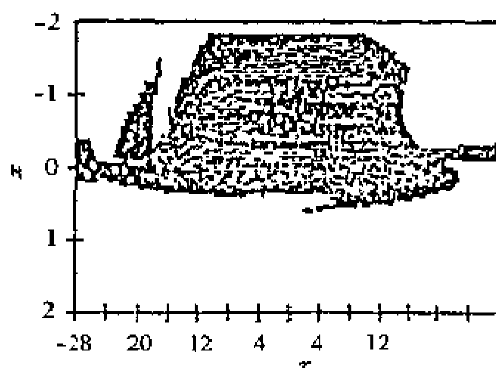


图 13-26　$f=0.0.375$ 时，$P-1$ 运动的吸引域

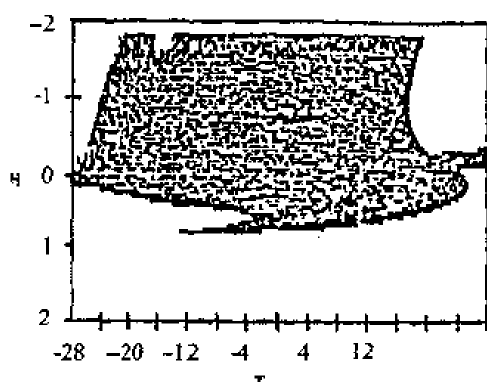


图 13-27　$f=0.5$ 时，$P-1$ 运动的吸引域

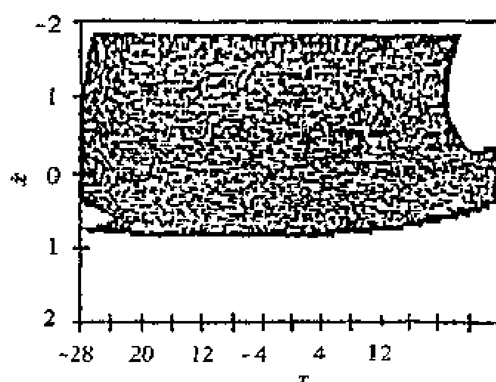


图 13-28　$f=1.0$ 时，$P-1$ 运动的吸引域

动在极小的局部区域内稳定，而在全局范围内是不稳定的；当吸引域为连续的大面积时，表明周期运动对于初始条件不具有敏感性，因而，在这种情况下，周期运动全局稳定，从图中可以看出，当 $f>0.5$ 时，系统存在稳定的周期运动；随着阻尼的减少，周期运动的稳定性越来越差，当阻尼系数等于零时，任何一种周期运动都是不稳定的。

(1) 通过对分段线性非线性振动机械全局性态的分析可知，随着弹簧阻尼系数的增加，系统 P-1 周期运动从不稳定，过渡到局部稳定，当阻尼系数 $f>0.5$ 时，系统存在稳定的 P-1 周期运动；当 $f=0$ 时，任何一种周期运动都是不稳定的。

(2) 分段线性非线性振动机械的全局性态随着阻尼系数的减少而越来越复杂，当 $f=0$ 时，系统的全局性态最复杂。

13.3 非线性振动系统的数值解法

随着计算机技术的迅速发展,数值方法在许多科学技术领域得到了十分广泛的应用。在非线性科学这一前沿科学领域,其中包括非线性振动,数值方法已成为解决和处理该领域中的理论问题与实际问题不可缺少的十分有效的强有力手段。特别是直接数值方法,由于该法使用方便,无需进行复杂的推导,可应用现有的数学工具进行直接计算。下面介绍最常用的两种方法,即龙格-库塔法和打靶法,还将介绍这两种方法的具体应用。

13.3.1 定积分的数值计算——Range-Kutta 法

我们在这里所讨论的只是一阶常微分方程的龙格-库塔法,但是由于任何高阶微分方程都可以化成一阶微分方程组,而一阶微分方程组与一阶微分方程的解法基本相似,该法是求解常微分方程的最基本方法。

1. Range-Kutta 法

一阶微分方程的一般形式为

$$\begin{cases} \dot{y} = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{13-39}$$

用数值方法求函数 y,无非是从 $y(x_0)$点出发计算当

$$x = x_0 + H, \quad x_0 + 2H, \quad \cdots, \quad x_0 + nH$$

(H 为步长)时 y 的值。

龙格-库塔法的计算公式如下:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

其中

$$\begin{aligned} K_1 &= H \cdot f(x_n, y_n) \\ K_2 &= H \cdot f\left(x_n + \frac{H}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}\right) \\ K_3 &= H \cdot f\left(x_n + \frac{H}{2}, y_n + \frac{K_2}{2}\right) \\ K_4 &= H \cdot f(x_n + H, y_n + K_3) \\ n &= 0, 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{13-40}$$

按照上面公式,读者可以从(x_0, y_0)出发计算出 $y_1, y_2, \cdots y_n$ 的具体数值。

2. 龙格-库塔法的几何意义

对于任何一阶常数分方程 $\dot{y} = f(x, y)$,当 $f(x, y)$为连续函数时,给定任何一点(x_1, y_1)就可知函数 y 在这一点的切线的斜率。这是因为 $\dot{y} = f(x, y)$。

下面用具体例子加以说明。有微分方程:

$$\begin{cases} \dot{y} = xy + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{13-41}$$

将 $x=0, y=0$ 代入式(13-41)中可知 $\dot{y}(0,0) = 1$,即曲线 y 在(0,0)处的切线斜率为1,又 $\dot{y}(1,1) = 2$,代表在点(1,1)处曲线的切线的斜率为 2。$\dot{y}(1,2) = 3$,表示在点(1,2)处曲线的切线的斜率为 3…这表示 $\dot{y} = f(x, y)$给出了一个方向场。在我们上面所给的例子中,

曲线在点(0,0),(1,1),(1,2)所取切线斜率的形式如图 13-29.

由微分方程的初始条件,可知曲线 Y 的初始点。如本题当 $x=0$ 时 $y=0$,要想计算 $x=0.01,0.02\cdots$时 y 的值,就必须通过曲线上各点的切线的斜率来计算。

当步长 H 取得很小的时候,如 $H=0.00001$ 时,由 $y(0)=0$ 来计算 $y(0.00001)$时,可以近似地认为 $y(0.00001)=y(0)+y'(0)*0.00001$。用这种计算方法,在计算的次数较多时,就会产生较大的误差,因此要对这种计算方法进行修正。修正想法是多计算几个点的曲线切线斜率,再计算下一个点的函数值,来提高计算精度。

仍以 $y'=xy+1, y(0)=0$ 为例说明之。

取 $H=0.1, x_0=0, y_0=0$

$$K_1=H\cdot f(x_0,y_0)=0.1\times(0+1)=0.1$$

在计算 K_1 时首先要计(x_0,y_0)点处的切线的斜率,如图 13-30 中的 1 点所示。

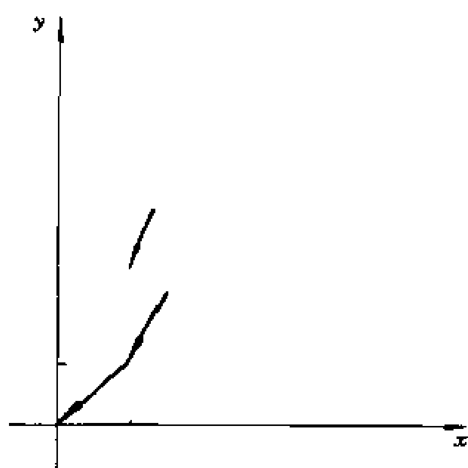


图 13-29 方向场

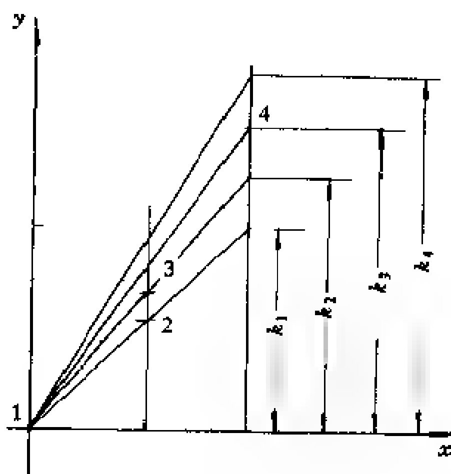


图 13-30 四点切线斜率

$$K_2=H\cdot f\left(x_0+\frac{H}{2},y_0+\frac{K_1}{2}\right)=0.1\cdot\left(\frac{0.1}{2}\times\frac{0.1}{2}+1\right)$$

即在计算 K_2 时,首先要计算$\left(x_0+\frac{H}{2},y_0+\frac{K_1}{2}\right)$处切线的斜率。同理必须计算$\left(x_0+\frac{H}{2},y_0+\frac{K_2}{2}\right)$处切线斜率及 x_0+H, y_0+K_3 处切线斜率,这四点的位置如图 13-30 所示。龙格-库塔法就是通过四点的切线斜率来计算下一点的函数值,以保证精度。

以上只是它的几何解释,龙格-库塔法的公式证明,请有兴趣的读者查阅有关书籍。

3. 龙格库塔法程序及例题

$$\begin{cases}y'=xy+1\\y(0)=0\end{cases}\tag{13-42}$$

当步长为 0.1 时求 $x=0\sim1$ 之间的数值解。

程序如下:

```
10  DEF  FNY(X,Y)=X*Y+1
20  INPUT  X0,Y0,X2,H
25  PRINT"X","Y"
30  K1=H*FNY(X0,Y0)
```

```
40  K2-H*FNY(X0+H/2,Y0+K1/2)
50  K3=H*FNY(X0+H/2,Y+K2/2)
60  K4  H*FNY(X0+H,Y0+K3)
70  Y1  Y0+(K1+2*K2+2*K3+K4)/6
80  PRINT  X0+H,Y1
90  X0  X0+H
100  IF X0>X2T  HEN130
110  Y0  Y1
120  GOTO 30
130  END
RUN
? 0,1,1,        0.00001
X               Y
 1               100334
.2              .202688
 3              .309164
.4              .422032
.5               543826
.6               677462
.7              .826367
.8              .99466
.9              1 18736
1               1.41069
```

本节讨论的四阶龙格-库塔法计算精度为步长 H 的四次同阶无穷小。

13.3.2　打靶法

下面将对线性打靶法进行讨论

打靶法是用来求解常微分方程的边值问题的方法，土木工程中梁的挠曲问题，梁的两端(边界)挠度为0，就是典型的边值问题。

二阶常微分方程 $\ddot{y}=f(x,y,\dot{y})$ 可以表示成

$$\ddot{y}=p(x)\dot{y}+q(x)y+r(x)$$

时，若方程 $\ddot{y}=f(x,y,\dot{y})$ 是线性的，则采用线性打靶法[129]。

如有以下边值问题的微分方程式：

$$\ddot{y}=p(x)\dot{y}+q(x)y+r(x) \tag{13-43}$$
$$a\leqslant x\leqslant b,\quad y(a)=\alpha,\quad y(b)=\beta$$

线性打靶法首先将一个边值问题化成两个初值问题，将上式化成

$$\ddot{y}=p(x)\dot{y}+q(x)y+r(x) \tag{13-44}$$
$$a\leqslant x\leqslant b,\quad y(a)=\alpha,\quad \dot{y}(a)=\beta$$

和

$$\ddot{y}=p(x)\dot{y}+q(x)y+r(x) \tag{13-45}$$
$$a\leqslant x\leqslant b, y(a)=0, y(a)=1$$

如果 $y_1(x)$代表方程(13-44)的解,$y_2(x)$代表方程(13-45)的解,那么,不难看出

$$y(x)=y_1(x)+\frac{\beta-y_1(b)}{y_2(b)}y_2(x) \tag{13-46}$$

为方程(13-43)的解。

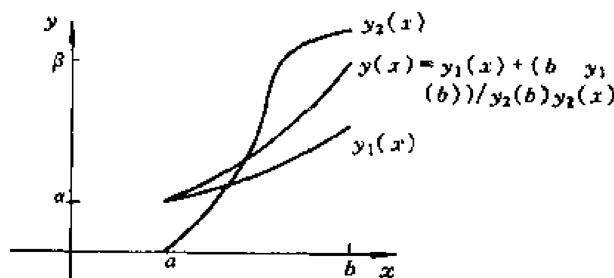


图 13-31 线性打靶过程

在利用线性打靶法对方程进行计算时,可以采用四阶龙格—库塔法分别求解方程(13-44)和(13-45),然后线性组合成原来方程(13-43)的解。下面用图来说明线性打靶过程:

问题:求边值问题的近似解

$$-\ddot{y}+p(x)y+q(x)y+r(x)=0$$
$$a\leqslant x\leqslant b, y(a)=\alpha, y(b)=\beta$$

输入两个端点 a,b,边界条件 α,β,步长数 N,输出 $y(x_i)$的近似值 $W_{1,i}$和$y'(x_i)$的近似值 $W_{2,i}$, $i=1,2,\cdots N$;

1. 置 $h=(b-a)/N$;

   $u_{1,0}=\alpha,\ u_{2,0}=0,\ v_{1,0}=0,\ v_{2,0}=1$

2. 对于 $i=0,1,\cdots N$ 执行 3 和 4

3. 置 $x=a+ih$

4. 置 $K_{i,1}=h\cdot u_{2,i}$

$$K_{12}=h\cdot[p(x)u_{2,i}+q(x)u_{1,i}+r(x)]$$

$$K_{21}=h\left[u_{2,i}+\frac{1}{2}K_{12}\right]$$

$$K_{22}=h\cdot\left[p\left(x+\frac{h}{2}\right)\left(u_{2,i}+\frac{1}{2}K_{12}\right)+q\left(x+\frac{h}{2}\right)\left(u_{1,i}+\frac{1}{2}K_{11}\right)+r\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]$$

$$K_{31}=h\cdot\left[u_{2,i}+\frac{1}{2}K_{22}\right]$$

$$K_{32}=h\cdot\left[p\left(x+\frac{h}{2}\right)\left(u_{2,i}+\frac{1}{2}K_{22}\right)+q\left(x+\frac{h}{2}\right)\left(u_{1,i}+\frac{1}{2}K_{21}\right)+r\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]$$

$$K_{41}=h\cdot\left[u_{2,i}+\frac{1}{2}K_{32}\right]$$

$$K_{42}=h\cdot\left[p\left(x+\frac{h}{2}\right)\left(u_{2,i}+\frac{1}{2}K_{32}\right)+q\left(x+\frac{h}{2}\right)\left(u_{1,i}+\frac{1}{2}K_{31}\right)+r\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]$$

$$u_{1,i+1}=u_{1,i}+\frac{1}{6}[K_{11}+2K_{21}+2K_{31}+K_{41}]$$

$$u_{2,i+1}=u_{2,i}+\frac{1}{6}[K_{12}+2K_{22}+2K_{32}+K_{42}]$$

$$K_{11}' = h\cdot v_{2,i}$$

$$K_{12}' = h\cdot[p(x)v_{2,i} + q(x)v_{1,i}]$$

$$K_{13}' = h\cdot\left[v_{2,i} + \frac{1}{2}K_{12}'\right]$$

$$K_{22}' = h\cdot\left[p\left(x+\frac{h}{2}\right)\left(v_{2,i}+\frac{1}{2}K_{12}'\right) + q\left(x+\frac{h}{2}\right)\left(v_{1,i}+\frac{1}{2}K_{11}'\right)\right]$$

$$K_{31}' = h\cdot\left[v_{2,i} + \frac{1}{2}K_{22}'\right]$$

$$K_{32}' = h\cdot\left[p\left(x+\frac{h}{2}\right)\left(v_{2,i}+\frac{1}{2}K_{22}'\right) + q\left(x+\frac{h}{2}\right)\left(v_{1,i}+\frac{1}{2}K_{21}'\right)\right]$$

$$K_{41}' = h\cdot\left[v_{2,i} + \frac{1}{2}K_{32}'\right]$$

$$K_{42}' = h\cdot\left[p\left(x+\frac{h}{2}\right)\left(v_{2i}+\frac{1}{2}K_{32}'\right) + q\left(x+\frac{h}{2}\right)\left(v_{1i}+\frac{1}{2}K_{31}'\right)\right]$$

$$v_{1,i+1} = v_{1,i} + \frac{1}{6}[K_{11} + 2K_{2i} + 2K_{31}' + K_{41}]$$

$$v_{2,i+1} = v_{2,i} + \frac{1}{6}[K_{12} + 2K_{22} + 2K_{32} + K_{42}]$$

5. 置　$W_{1,0} = \alpha$

$$W_{2,0} = \frac{\beta - u_{1,N}}{v_{1,N}}$$

输出$(a, W_{1,0}, W_{2,0})$

6. 对于　$i = 1, 2, \cdots, N$

置　$W_1 = u_{1,i} + W_{2,0}v_{1,i}$

$W_2 = u_{2,j} + W_{2,0}v_{2,i}$

$x = a + ih$

输出(x, W_1, W_2)

7. 结束

【例 13.3.1】 设有边值问题

$$\ddot{y} = -\frac{2}{x}\dot{y} + \frac{2}{x^2}y + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}$$

$$1\leqslant x\leqslant 2,\ y(1)=1,\ y(2)=2 \tag{13-47}$$

该问题的精确解为：

$$y = C_1x + \frac{C_2}{x^2} + \frac{3}{10}\sin(\ln x) - \frac{1}{10}\cos(\ln x)$$

$$C_1 = -0.03920701320$$

$$C_2 = 1.1392070132$$

利用线性打靶法，要将式(13-47)化成二个初值问题

$$\ddot{y}_1 = -\frac{2}{x}\dot{y}_1 + \frac{2}{x^2}y_1 + \frac{\sin(\ln x)}{x^2} \tag{13-48}$$

$$1\leqslant x\leqslant 2,\quad y_1(1)=1,\quad \dot{y}_1(1)=0$$

和

$$
\begin{aligned}
K_{41} &= h\cdot\left[v_{2,i} + \frac{1}{2}K_{32}\right]\\
K_{42}' &= h\cdot\left[p\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\left(v_{2,i} + \frac{1}{2}K_{32}'\right) + q\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\left(v_{1,i} + \frac{1}{2}K_{31}'\right)\right]\\
v_{1,i+1} &= v_{1,i} + \frac{1}{6}[K_{11}' + 2K_{21}' + 2K_{31}' + K_{41}]\\
v_{2,i+1} &= v_{2,i} + \frac{1}{6}[K_{12}' + 2K_{22}' + 2K_{32}' + K_{42}']
\end{aligned}
\tag{13-49}
$$

利用上面算法得到结果如下。

x_i	u_1	v_i	u_i(近似值)	$y(x_i)$
1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.1	1.00896	0.09118	1.09263	1.09263
1.2	1.03245	0.16851	1.18708	1.18708
1.3	1.06674	0.23609	1.28338	1.28338
1.4	1.10929	0.29659	1.38144	1.38144
1.5	1.15830	0.35184	1.48116	1.48116
1.6	1.21248	0.40312	1.58239	1.58239
1.7	1.27087	0.45132	1.68501	1.68501
1.8	1.33274	0.49711	1.78889	1.78889
1.9	1.39751	0.54099	1.89393	1.89393
2.0	1.46472	0.88333	2.0	2.0

13.3.3 Wilson-θ 法

Wilson θ 法是假定在$(t, t+\theta\Delta t)(\theta\geqslant 1)$时间间隔内，加速度是线性变化。

令 τ 为自 t 时刻开始的时间变量，适用于$0\leqslant\tau\leqslant\theta\Delta t$，根据线性加速度的假设可得在此范围内的加速度

$$\ddot{x}_{t+\tau} = \ddot{x}_t + \frac{\tau}{\theta\Delta t}(\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{x}_t) \tag{13-50}$$

积分后得

$$\dot{x}_{t+\tau} = \dot{x}_t + \ddot{x}_t\tau + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t}(\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{x}_t) \tag{13-51}$$

$$x_{t+\tau} = x_t + \dot{x}_t\tau + \frac{1}{2}\ddot{x}_t\tau^2 + \frac{\tau^3}{6\theta\Delta t}(\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{x}_t) \tag{13-52}$$

若 $\tau=\theta\Delta t$，由以上两式可得 $t+\theta\Delta t$ 瞬时的速度和位移

$$\dot{x}_{t+\theta\Delta t} = \dot{x}_t + \ddot{x}_t\theta\Delta t + \frac{\theta\Delta t}{2}(\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} + \ddot{x}_t) \tag{13-53}$$

$$x_{t+\theta\Delta t} = x_t + \theta\Delta t\,\dot{x}_t + \frac{\theta^2\Delta t^2}{6}(\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} - 2\ddot{x}_t) \tag{13-54}$$

根据以上两式，可得 $t+\theta\Delta t$ 时刻的加速度和速度用位移来表示

$$\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} = \frac{6}{\theta^2\Delta t^2}(x_{t+\theta\Delta t} - x_t) - \frac{6}{\theta\Delta t}\dot{x}_t - 2\ddot{x}_t \tag{13-55}$$

$$\dot{x}_{t+\theta\Delta t} = \frac{3}{\theta\Delta t}(x_{t+\theta\Delta t} - x_t) - 2\dot{x}_t - \frac{\theta\Delta t}{2}\ddot{x}_t \tag{13-56}$$

于是，在 $t+\theta\Delta t$ 时刻的动力方程为

$$M\ddot{x}_{t+\theta\Delta t}+C^T\dot{x}_{t+\theta\Delta t}+K^T x_{t+\theta\Delta t}=R_{t+\theta\Delta t} \tag{13-57}$$

式中

$$R_{t+\theta\Delta t}=R_{t+\theta\Delta t}+\theta(R_{t+\theta\Delta t}-R_t) \tag{13-58}$$

将加速度和速度的向量形式(13-55)和式(13-56)以及外力关系式(13-58)代入式(13-57)，即得关于 $x_{t+\theta\Delta t}$ 的求解方程式

$$\hat{K}x_{t+\theta\Delta t}=\hat{R}_{t+\theta\Delta t} \tag{13-59}$$

式中

$$\hat{K}=K^T+\frac{3}{\theta\Delta t}C_T+\frac{6}{\theta^2\Delta t^2}M \tag{13-60}$$

$$\begin{aligned}\hat{R}_{t+\theta\Delta t}=&R_{t+\theta\Delta t}+\theta(R_{t+\theta\Delta t}-R_t)+M\left(\frac{6}{\theta^2\Delta t^2}x_t+\frac{6}{\theta\Delta t}\dot{x}_t+2\ddot{x}_t\right)\\&+C_T\left(\frac{3}{\theta\Delta t}x_t+2\dot{x}_t+\frac{\theta\Delta t}{2}\ddot{x}_t\right)\end{aligned} \tag{13-61}$$

求解方程(13-59)，可得 $x_{t+\theta\Delta t}$，在求出瞬时 $t+\theta\Delta t$ 的位移 $x_{t+\theta\Delta t}$ 之后，代入式(13-55)就可获得 $\ddot{x}_{t+\theta\Delta t}$，而后在式(13-50)中取 $\tau=\Delta t$，并将式(13-55)代入，有

$$\ddot{x}_{t+\Delta t}=\frac{6}{\theta^2\Delta t^2}(x_{t+\theta\Delta t}-x_t)-\frac{6}{\theta^2\Delta t}\dot{x}_t+\left(1-\frac{3}{\theta}\right)\ddot{x}_t \tag{13-62}$$

同样取 $\tau=\Delta t$，将式(13-50)分别代入式(13-51)和式(13-52)，有

$$\dot{x}_{t+\Delta t}=\dot{x}_t+\frac{\Delta t}{2}(\ddot{x}_{t+\Delta t}+\ddot{x}_t) \tag{13-63}$$

$$x_{t+\Delta t}=x_t+\Delta t\dot{x}_t+\frac{\Delta t^2}{6}(\ddot{x}_{t+\Delta t}+2\ddot{x}_t) \tag{13-64}$$

这样就完成了一步的积分。

本方法的物理意义是：假定加速度在时刻 t 到 $t+\theta\Delta t$ 内为线性变化，首先计算 t，$t+\theta\Delta t$ 区间的近似解，但仅取其中前半部分(到时刻 $t+\Delta t$)作为正式的近似解而略去后半部分(时刻 $t+\Delta t$ 以后)。这种巧妙的处理并非出于物理的原因，而主要是数学上的(计算技术的)理由。

在 Wilson θ 法中，只要 θ 值取 1.37 以上，不管 Δt 取怎样的值都是稳定的(即这种算法是无条件稳定的)。当然，Δt 过大，精度要降低，但只要不发散，就可根据经验和工程常识判断，灵活掌握。可见，θ 的取值小于 1.37 的意义不大，但并不是说 θ 的取值只要在 1.37 以上，不管多大都可以。实际上，θ 最好不要太大，否则精度会下降(截断误差增加)。因此，Wilson 推荐的合理 θ 值为 1.4。

Wilson-θ 法的计算机实施格式

A. 初值计算

1. 形成质量矩阵 M，阻尼矩阵 C_T 刚度矩阵 K_T。
2. 给出初始值 x_0，$\dot{x}_0$，$\ddot{x}_0$。
3. 选择时间步长 Δt，取 $\theta=1.4$，并计算积分常数

$$a_0=\frac{6}{\theta^2\Delta t^2};\quad a_1=\frac{3}{\theta\Delta t};\quad a_2=2a_1;\quad a_3=\frac{\theta\Delta t}{2};\quad a_4=\frac{a_0}{\theta};$$

$$a_5 = \frac{a_2}{\theta}; \quad a_6 = 1 - \frac{3}{\theta}; \quad a_7 = \frac{\Delta t}{2}; \quad a_8 = \frac{\Delta t^2}{6}$$

B 关于每一时间增量的计算

1. 计算切线阻尼矩阵 C_T 和刚度矩阵 K_T。

2. 形成有效刚度矩阵 $\hat{K}$：$\hat{K} = a_0 M + a_1 C_T + K_T$。

3. 对 $\hat{K}$ 作三角分解：$\hat{K} = LDL^T$。

4. 计算 $t + \theta\Delta t$ 时刻的有效载荷

$$\hat{R}_{t+\theta\Delta t} = R_t + \theta(R_{t+\theta\Delta t} - R_t) + M(a_0 x_t + a_2 \dot{x}_t + 2\ddot{x}_t) + C_T(a_1 x_t + 2\dot{x}_t + a_3 \ddot{x}_t)$$

5. 计算 $t + \theta\Delta t$ 时刻的位移

$$LDL^T x_{t+\theta\Delta t} = \hat{R}_{t+\theta\Delta t}$$

6. 计算 $t + \theta\Delta t$ 时刻的加速度、速度和位移

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} = a_4(x_{t+\Delta t} - x_t) + a_5 \dot{x}_t + a_6 \ddot{x}_t$$

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \dot{x}_t + a_7(\ddot{x}_{t+\Delta t} + \ddot{x}_t)$$

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \Delta t \cdot \dot{x}_t + a_8(\ddot{x}_{t+\Delta t} + 2\ddot{x}_t)$$

Wilson-θ 法是一种隐式积分法，即计算每一步，必须解一个线性代数方程组。此外，这种算法是自起步的，$t + \Delta t$ 时刻的位移，速度和加速度都可以由 t 时刻的变量表示，不需要特别的起动技术。

计算与思考

1. 画出非线性系统 $\ddot{x} + x - x^3 = 0$ 的相轨线。指出分界线、平衡点及其性质。

2. 分别画出非线性系统 $\ddot{x} + x - \alpha - \frac{\lambda}{x} = 0$ 当 $\lambda < \alpha^2/4, \lambda = \alpha^2/4, \lambda > \alpha^2/4$ 时的相轨线，指出分界线、平衡点及其性质。

3. 确定系统 $\ddot{x} + 2c\dot{x} - x - x^3 = 0, c > 0$ 的平衡点及其稳定性，并画出平衡点近旁的相轨线。

4. 画出以下方程 $\frac{dy}{dx} = xy(y-2)$ 的等倾线。

5. 用等倾线作图法画出 $\ddot{x} + \dot{x} + 4x = 0$ 的相轨线。

6. 用 Leinard 作图法作出以下方程的相轨线：

$$\ddot{x} + 2c\dot{x} - x - x^3 = 0$$

7. 建立以下方程的频闪方程式，并判定该系统有无平衡点和不动点及其稳定性：

$$\ddot{x} + x + x^3 = 0$$

8. 建立以下方程的频闪方程式，并判定该系统有无平衡点和不动点及其稳定性：

$$\ddot{x} + \dot{x}(1 - x^2) = 0$$

9. 利用点映射法求 van der Pol 方程的不动点。

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = F\cos\omega t$$

其中 $F = 9.0, \omega = 3.1416, \mu = 7$。分析区间为：$-3 \leqslant x \leqslant 3.0, -5.2 \leqslant \dot{x} \leqslant 5.2$。分析区间划分为 11×11 的网格进行计算。

10. 指出以下二维胞映射系统(图 13-32)中的 $P = 1, P = 2, P = 3$ 周期胞、陷胞以及经过

-次映射进入 $P-1, P-2, P-3$ 周期胞的胞(图 13-33(a)为原胞分布图，图 13-33(b)为原胞的映射图，结果写入图 13-33(c))。

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30

(a) 原胞分布图

0	8	0	8	12	12
8	9	14	5	11	10
14	10	22	23	11	10
21	24	22	28	24	16
0	28	27	24	23	24

(b) 映射胞分布图

(c) 全局性态图

图 13-32 二维胞映射系统

11. 将下面点映射公式转化为胞映射公式：

$X_1(n+1)=G_1(X_1(n)), X_2(n)=(1-\delta)X_2(n)+(2-2\delta+\delta^2)[X_1(n)]^2$

$X_2(n+1)=G_2(X_1(n)), X_2(n)=-(1-\delta)X_1(n)$

12. 求 Duffing 方程在分析区间 $1\leqslant x\leqslant 1, -1\leqslant x\leqslant 1$ 的原胞的胞映射。设分析区域内有 10×10 的胞(图 13-33)。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	425	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

(a) 原胞分布图

(b) 胞映射分布图

图 13-33 胞映射

13. 用四阶龙格-库塔法求面下非线性微分方程的解。

$$y''=2y^2\cdot yy' \qquad y(0)=0, y'(0)=0, h=0.1$$

14. 写出高阶非线性微分方程四阶龙格-库塔法的算法。

15. 用线性打靶法解下面边值问题

$$-y''+\pi^2 y=2\pi^2\sin(\pi x), 0\leqslant x\leqslant 1, y(0)=y(1)=0$$

16. 用线性打靶法解下面边值问题并讨论精度。

$$-y+y=0, 0\leqslant x\leqslant 1, y(0)=y(1)=0 \quad h=0.1$$

计算结果的精确解是：

$$y=x+\left(\frac{e}{e^2-1}\right)(e^{-x}-e^x)$$

17. 试利用 Wilson $-\theta$ 法计算某弱非线性多自由度系统的响应。

第十四章　分岔与混沌

非线性动力学中的分岔是非线性科学研究的重要内容之一，也是非线性微分方程研究的重要组成部分。分岔问题研究起源于18世纪以来对天体力学、流体力学和非线性振动中一些失稳现象的探讨，具有深刻的工程应用背景。经过一百多年来的微分方程的发展，特别是近二三十年来分岔理论和方法开始广泛应用于力学、物理学、化学、生物学、生态学等学科和自动控制、系统工程、机械振动等工程技术部门，以及经济学和社会发展等社会科学领域。

分岔理论不仅揭示了系统的不同运动状态之间的联系和转化，而且与混沌运动密切相关，是研究混沌产生的机理和条件的重要途径。

近年来，分岔理论研究十分活跃，研究成果众多。本章第14.1～14.4介绍分岔问题的基本理论和研究方法及其在工程非线性振动领域中的若干应用，主要参考了Stephen Wiggins, J. Guckheimer & P. Holmes, Chow & Hame以及陆启韶、陈予恕等的著作，一些应用实例选自陈予恕等人及本书作者取得的一些研究成果[46,47,58,93]。

非线性动力学中的混沌运动也是目前非线性科学的研究热点之一。混沌被认为是继量子力学、相对论、基因以后，20世纪的重大发现之一，目前对它的研究已遍及各个领域。仅20多年中，在力学、物理学、化学、生物学、生态学及各工程部门观察到大量的混沌例子[72,73,74,106,107,124,192,253,264]。

混沌是指一些确定的系统对初始值十分敏感，即初值的微小扰动会使系统的长期运动发生很大变化，且貌似随机的一种运动。这是一种除了平衡态、周期运动、准周期运动以外的有界的不规则的稳态运动形式。本章第14.5～14.9将介绍有关混沌的基本知识及有关实例。

14.1　分岔概述

14.1.1　分岔的产生及分类

分岔理论研究动力系统由于参数的改变而引起解的拓扑结构和稳定性变化的过程。在科学技术领域中，许多系统往往都含有一个或多个参数。当参数连续改变时，系统解的拓扑结构或定性性质在参数取某值时发生突然变化，这时即产生分岔现象。为说明分岔现象，先考察下面的例子。

【例14.1.1】　设一非线性一维系统

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \quad x \in R \tag{14-1}$$

其中 $\mu \in R$ 为系统参数。这是一非线性自治系统。确定其平衡点的方程为

$$\mu x - x^3 = 0 \tag{14-2}$$

显然，平衡点的数目与 μ 的正负号有关。当 $\mu \leqslant 0$ 时，式(14-1)有惟一的平衡点 $x = 0$，它是渐近稳定的。当 $\mu > 0$ 时，式(14-1)有三个平衡点，其中 $x = 0$ 是不稳定的。而 $x = \pm\sqrt{\mu}$ 是渐近稳定的。图(14-1)画出了 μ 固定时系统的相图。该相图反映了平衡点数目和稳定性随 μ

变化的情况。实线代表稳定平衡点，虚线代表不稳定平衡点。从图中可见，当 $\mu<0$ 和 $\mu>0$ 时，系统有不同的拓扑结构(即式(14-1) 解的数目在该处发生变化)，也就是式(14-1)解的拓扑结构在 $\mu=0$ 处发生突然变化，此时出现平衡点分岔(叉形分岔)。

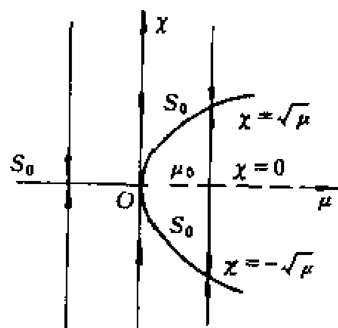


图 14-1 单参数的叉形分岔

【例 14.1.2】 设平面系统的微分方程为

$$\begin{cases}\dot{x}=-y+x[\mu-(x^2+y^2)]\\ \dot{y}=x+y[\mu-(x^2+y^2)]\end{cases}$$

$$(x,y)\in R^2,\quad \mu\in R \tag{14-3}$$

利用极坐标变换

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases} \tag{14-4}$$

式(14-3) 化为

$$\begin{cases}\dot{r}=r(\mu-r^2)\\ \dot{\theta}=1\end{cases} \tag{14-5}$$

由式(14-5) 可见，当 $\mu\leqslant 0$ 时，式(14-5) 有惟一的渐近稳定焦点(0,0)。当 $\mu>0$ 时，(0,0) 变为式(14-5) 的不稳定焦点，此时式(14-5) 还有一个稳定的极限环 $r=\sqrt{\mu}$，见图 14-2。由图可见，系统式(14-5) 解的拓扑结构在 $\mu=0$ 处发生突然变化，从平衡点产生出极限环，即产生分岔(Hopf 分岔)。

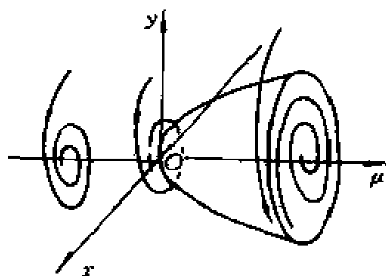


图 14-2 二维 Hopf 分岔

在讨论含参数的微分方程描述的动力系统的分岔问题之前，先介绍有关的基本概念。设含参数的动力系统为

$$\dot{x}=f(x,\mu) \tag{14-6}$$

其中 $x\in U\subseteq R^n$ 称为状态变量，$\mu\in J\subseteq R^m$ 称为系统参数。当参数 μ 连续地变动时，系统(14-6) 的拓扑结构在 $\mu_0\in J$ 处发生突然变化，称式(14-6) 在 $\mu=\mu_0$ 处出现分岔，称 μ_0 为一个分岔值。在参数 μ 的空间中由分岔值组成的集合称为分岔集。式(14-6) 的极限集(平衡点或极限环) 在 x-μ 空间中随参数 μ 变化的图形称为分岔图。

根据研究的目的、范围和对象以及方法的不同，分岔问题有不同的分类。根据系统轨线的范围可以分为局部分岔和全局分岔。局部分岔仅研究在平衡点或闭轨附近的某个邻域内向量场轨线的拓扑结构的变化，全局分岔粗略地说就是非局部分岔，如同宿异宿分岔、局部余维二分岔中出现的全局分岔等。局部分岔反映许多实际工作中的分岔问题，因此本章主要讨论局部分岔问题。

在通常的分岔研究中可将分岔分为静态分岔和动态分岔。静态分岔方程为：

$$f(x,\mu)=0\quad x\in U\subseteq R^n,\quad \mu\in J\subset R^m \tag{14-7}$$

静态分岔研究静态分岔式(14-7) 解的数目随参数 μ 的变动而发生的变化，静态分岔主要研究平衡点分岔。动态分岔研究动力系统方程式(14-6) 解(极限集) 的拓扑结构随参数 μ 的变动而发生的突然变化。动态分岔主要研究闭轨、同宿轨线、异宿轨线、不变环面等的分岔，因而动态分岔实际上包括了静态分岔问题。本章主要讨论静态分岔问题，同时也介绍动态分岔的若干问题的基本研究方法。

14.1.2 平面向量场分岔

在讨论平面向量场的分岔问题之前，先介绍若干与之有关的基本概念。

设平面非线性自治系统

$$\dot{x} = f(x) \quad x = (x_1, x_2)^T, \; f = (f_1, f_2)^T \tag{14-8}$$

在 $f(x)$ 的平衡点 $x = x_0$ 处的线性化矩阵(即导算子)为

$$L = Df = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=x_0} \tag{14-9}$$

则式(14-8)可表示为

$$\dot{x} = Lx + g(x), \quad x \in R^2, \quad g(x) = o(\| x^2 \|) \tag{14-10}$$

其中 $\dot{x} = Lx, \quad x \in R^2$

称为式(14-8)的线性近似系统。

1. 当 L 的特征值含有零实部时，称平衡点 x_0 为非双曲的。

2. 当方程(14-8)的闭轨线 Γ 的特征指数等于零，即

$$h = \frac{1}{T}\int_{\Gamma} \operatorname{div}(f_1, f_2) \mathrm{d}t = 0 \tag{14-11}$$

则称闭轨 Γ 为非双曲的，式中 T 为周期。

3. 式(14-8)的轨线，如果当 $t \to \infty$ 和 $t \to -\infty$ 时趋于同一个平衡点，则称为同宿轨线；如果当 $t \to \infty$ 和 $t \to -\infty$ 时趋于不同的平衡点，则称为异宿轨线。

在建立了上面的概念基础上，下面给出平面向量场出现分岔的必要与充分条件。

当平面向量场使下列条件之一成立时，平面向量场出现分岔：

1. 存在非双曲平衡点，即平面向量场的线性化矩阵 L 的特征值有零实部；
2. 存在非双曲闭轨，即平面向量场的闭轨线 Γ 的特征指数等于零；
3. 存在同宿轨线或异宿轨线，即平面向量场存在连接鞍点到鞍点的轨线。

平面向量场出现分岔的必要与充分条件可以直接从动力系统的结构稳定性定理得到。关于动力系统的结构稳定性定理及其证明需要微分方程定性理论的知识，已超出本书范围，感兴趣的读者可以参看其他有关著作。

根据平面向量场出现分岔的必要与充分条件，可以将平面向量场的分岔分为三类：

1. 与平衡点有关的分岔

与平衡点有关的分岔属于局部分岔。当 $\mu = \mu_0$ 时，平面向量场式(14-7)有非双曲平衡点(x_{10}, x_{20})，此时系统式(14-8)的线性化矩阵 L 的特征值有零实部。在这种情形下，还需视特征值的虚部是否为零进一步分类。如 L 有零特征值，即特征值的实部和虚部均为零，则称为高阶平衡点分岔。这种情形将在静态分岔中进行详细研究。如 L 有一对纯虚数特征值，并且当 $\mu = \mu_0$ 时，平衡点(x_{10}, x_{20})是非线性系统式(14-8)的细焦点，即平衡点(x_{10}, x_{20})是非线性系统式(14-8)的焦点，但却是其线性近似系统的中心，则当 μ 变化时就可能从平衡点产生极限环，这种情形称为Hopf分岔，见图14-3(a)。若 L 有一对纯虚数特征值，并且当 $\mu = \mu_0$ 时，平衡点(x_{10}, x_{20})不仅是非线性系统式(14-8)的中心，而且也是其线性近似系统的中心，即是式(14-8)的真中心，则在(x_{10}, x_{20})附近全是闭轨。当 μ 变化时就又可能从其

某些闭轨分岔出极限环，而平衡点也不再是中心，这种情形称为 Poincare 分岔。

2．闭轨分岔

设当 $\mu = \mu_0$ 时，式(14-8) 有非双曲闭轨 Γ。根据动力系统理论可知，此时 Γ 的特征指数为零，即 Γ 不是单重极限环而可能是多重极限环、半稳定极限环、周期环或复合环中的一条闭轨。当 μ 变化时，系统可能出现闭轨突然消失的现象。当 $\mu < \mu_0$ 时无闭轨，而当 $\mu > \mu_0$ 时有两个极限环。当 $\mu \to \mu_0 + 0$ 时，这两个极限环趋于一个环。这种分岔称为二重半极限环。闭轨分岔属于局部分岔。见图 14-3(b)。

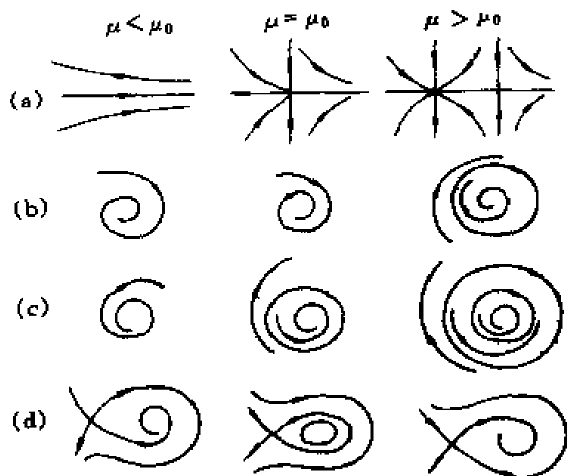


图 14-3 与平衡点有关的分岔

3．同宿或异宿轨线分岔

当 $\mu = \mu_0$ 时，式(14-8) 有同宿闭轨。当 μ 变化时，此同宿轨线可能突然消失，见图 14-3(c)，或从此同宿轨线分岔出极限环。如当 $\mu = \mu_0$ 时，式(14-8) 有异宿闭轨。当 μ 变化时，此异宿轨线可能突然消失，见图 14-3(d)，或从此几条异宿轨线相连而成的异宿分岔出极限环。这种分岔称为异宿轨线分岔。同宿或异宿轨线分岔属于全局分岔。

14.1.3 分岔问题的主要研究内容

分岔问题研究的内容广泛而丰富，既需要较深厚的数学基础，又需要较宽广的专业知识，归纳起来，大致分为如下几个方面：

1．分岔集的确定，即确定分岔的必要条件与充分条件，这是分岔研究的基本内容。

2．分岔定性性态的研究，即研究分岔出现时系统拓扑结构随参数变化的情况，这是分岔研究的重要内容。

3．分岔解的计算，即系统平衡点和极限环的计算。由于非线性系统分岔的直接求解往往较为困难，甚至不可能，这就需要采用实用而有效的近似方法。

4．各种不同分岔的相互作用，以及分岔与动力系统的其他现象(如混沌等)的联系。

对于前三项中的若干内容，将在本章前面几节中讨论。最后一项内容，如分岔与混沌的关系及分岔在混沌研究中的应用，将在本章后面有关混沌的节中进行讨论。为便于后面研究的需要，下面介绍定性性态中的开折问题和全局分岔的有关概念。

1．含参数分岔开折的若干定义

反映科学技术实际问题的数学模型往往是建立在对真实系统的抽象化基础上的。它与真实的物理系统往往有或多或少的差别。这种差别可以用对真实系统的扰动来表示。为了使抽象化模型能够反映真实系统就需要在数学模型中引入若干参数。这就构成了多参数分岔的开折问题。下面给出有关开折的一些基本定义。

定义一 设对于 C^∞ 函数 $g(x,\mu):U\times J\to R$，存在 C^∞ 函数 $G(x,\mu,\alpha):U\times J\times K\to R$ 使当 $\alpha=0$ 时有

$$G(x,\mu,\alpha) = g(x,\mu)$$

则称 G 为 g 的一个 k 参数开折，α 为开折参数。

定义二 如果 G 是 C^∞ 函数 $g(x,\mu)$ 的某个开折，并且包含了 g 的一切扰动，则称 G

是 g 的一个全开折。

定义三　如果 g 的一切全开折中，所含参数个数最少的开折称为普适开折。

定义四　在 g 的全开折中参数数目的最小值称为 g 的余维数。

普适开折在等价的意义下以最简单的形式包含了 g 的所有扰动函数，但它在一般情况下不是惟一的。

2. 全局分岔的概念

引入普适开折的目的是为了研究当分岔方程受到扰动时分岔性态可能发生的变化。因为普适开折 G 包含了 g 的一切扰动，因此研究分岔方程的分岔性态的变化就转变为研究普适开折的分岔图随开折参数 α 的变化。关于分岔和普适开折 G 的分岔图有如下基本定义：

定义一　当分岔方程受到小扰动时，如果对某些开折参数 α，普适开折 G 的分岔图在等价意义上保持不变，则称分岔为通有的(非退化的)，而称 G 的分岔图为持久的。

定义二　当分岔方程受到小扰动时，如果对于某些开折参数 α，普适开折 G 的分岔图的定性性态发生改变，则称分岔为退化的，而称 G 的分岔图为非持久的。

可以通过引入适当的开折参数将退化分岔扩展成通有分岔。G 的非持久分岔图上可能存在的点有三种。它们分别是歧点(分岔点)、滞后点和双极限点。相应的这些点的集合分别定义为：

定义一　对于开折参数 $\alpha \in R^k$ 存在 $(x,\mu) \in R \times R$，使得在 (x,μ,α) 处有 $G = G_x = G_\mu = 0$，则此开折参数 α 的集合称为歧集，记为 B。

定义二　对于开折参数 $\alpha \in R^k$ 存在 $(x,\mu) \in R \times R$，使得在 (x,μ,α) 处有 $G = G_x = G_{xx} = 0$，则此开折参数 α 的集合称为迟滞集，记为 H。

定义三　对于开折参数 $\alpha \in R^k$ 存在 $(x_1, x_2, \mu) \in R \times R \times R$，$x_1 \neq x_2$ 使得在 $(x_i, \mu, \alpha)(i = 1,2)$ 处有 $G = G_x = 0$，则此开折参数 α 的集合称为双极限点集，记为 D。

定义四　$G(x,\mu,\alpha)$ 的非持久分岔图所对应的开折参数的集合：$\Sigma = B \cup H \cup D$，称为转迁集。

当仅考虑小扰动，即使在开折参数 $\alpha \in R^k$ 的原点的某个小邻域 Ω 中时，转迁集 Σ 将 Ω 分成若干个子区域，在每个子区域中，G 的分岔图是持久的。在同一个子区域中，不同的开折参数 α 对应的分岔图是拓扑等价的，可以由这些区域作出 G 的全部持久分岔图。

14.2　静态分岔与动态分岔

14.2.1　静态分岔的必要条件

静态分岔是平衡点分岔问题中的重要研究内容。本节主要讨论局部静态分岔问题。

设静态分岔方程为(14-7)，其中向量场 $f: U \times J \subseteq R^n \times R^m \to R^n$。若 $(x_0, \mu_0) \in U \times J$ 是向量场 f 的一个静态分岔点，即 $f(x_0, \mu_0) = 0$，并且在 (x_0, μ_0) 附近 f 对 x 可微，$f(x, \mu)$ 和 $D_x f(x,\mu)$ 对 x 和 μ 连续，则 $D_x f(x,\mu)$ 是奇异(不可逆)的。如果 $D_x f(x_0, \mu_0) = 0$，则以下静态分岔条件是必要而不充分的

$$D_x f(x,\mu) = 0 \tag{14-13}$$

在研究静态分岔时，通常首先由静态分岔的必要条件式(14-13)求出向量场 $f(x,\mu)$ 的奇异点，然后再判定这奇异点是否是静态分岔点。当方程的维数较高时，向量场的静态分岔

问题研究是一项困难的工作。通常是利用 L-S 约化方法或中心流形方法将原方程在奇异点附近降为维数较低的方程。约化后的方程解的定性性态与原方程解的定性性态是等价的，因此只需考虑约化后的方程解的定性性态。下面讨论几种重要的单参数静态分岔。不失一般性，以下设向量场的平衡点(奇异点)为(0,0)，因为对于任何奇异点(x_0,μ_0)总可以通过变换 $\bar{x} = x - x_0, \bar{\mu} = \mu - \mu_0$ 使(0,0)成为奇异点。

14.2.2 单参数静态分岔

式(14-13)是必要条件而非充分条件，现就若干具有一维零空间的单参数静态分岔给出其充分条件。先介绍有关线性代数中零特征向量的概念。

设向量场 $f(x,\mu)$ 在(0,0)的线性化矩阵为 $L = D_x f(0,0)$，如果 L 有一个单重特征值等于零而其余特征值的实部都不等于零，则有

$$L\varphi = 0, \quad \psi L = 0, \|\varphi\| = \|\psi\| = 1 \tag{14-14}$$

其中 φ,ψ 分别为对应于 L 的零特征值的左单位特征向量和右单位特征向量。

1. 鞍结分岔(Saddle Node Bifurcation)

对于非线性系统式(14-6)，如果 $f(x,\mu)$ 在平衡点(0,0)除了满足式(14-7)和式(14-13)外，还满足

$$\begin{aligned} &D_\mu f(0,0) \neq 0 \\ &D_\mu^2 f(0,0) \neq 0 \end{aligned} \tag{14-15}$$

则系统式(14-6)在(0,0)的某邻域内，其向量场(14-7)随 μ 的变化通过(0,0)时，从无解到突然出现两个解，这种分岔称为鞍结分岔，见图14-4。其中(a)为 $\frac{\partial f}{\partial \mu} > 0$ 的情形，(b)为 $-\frac{\partial f}{\partial \mu} < 0$ 的情形。

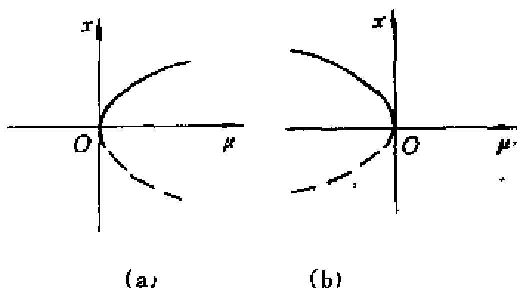


图 14-4 鞍结分岔

2. 跨临界分岔(Transcritical Bifurcation)

对于非线性系统式(14-6)，如果 $f(x,\mu)$ 在平衡点(0,0)除了满足式(14-7)和式(14-13)外，还满足

$$\begin{aligned} &\psi[D_x^2 f(0,0)(\varphi,\varphi)] \neq 0 \\ &\psi D_x D_\mu f(0,0)\varphi \neq 0 \end{aligned} \tag{14-16}$$

则在(0,0)出现跨临界分岔，见图14-5。

3. 叉形分岔(Pitchfork Bifurcation)

对于非线性系统式(14-6)，如果 $f(x,\mu)$ 在平衡点(0,0)除了满足式(14-7)和式(14-13)外，还满足

$$\begin{aligned} &\psi[D_x^2 f(0,0)(\varphi,\varphi)] = 0 \\ &\psi D_x D_\mu f(0,0)\varphi \neq 0 \\ &\psi D_x^3 f(0,0)(\varphi,\varphi,\varphi) \neq 0 \end{aligned} \tag{14-17}$$

则在(0,0)出现叉形分岔，见图14-6。

上述分岔条件的导出可参看 Wiggins 的著作。

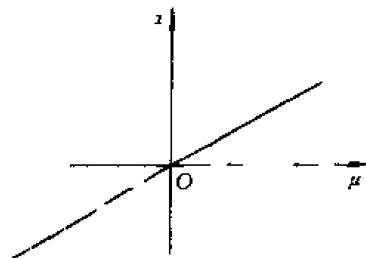


图 14-5　跨临界分岔

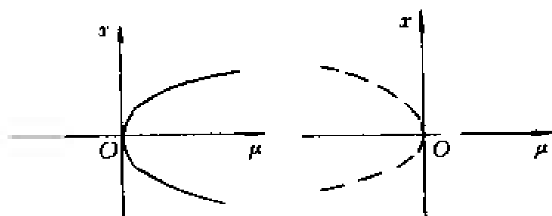


图 14-6　叉形分岔

14.2.3　动态分岔

在动态分岔问题中，Hopf 分岔具有重要的理论意义，并且因其与自激振动的产生有密切关系，因而又具有重要的实际应用价值。本节以 Hopf 分岔为例讨论动态分岔问题。

Hopf 分岔指参数变化且经过分岔值时，从平衡状态产生孤立的周期运动的现象，也即从中心型平衡点产生极限环的现象。对于二维非线性系统有如下定理：

二维 Hopf 分岔定理

设含单参数 μ 的二维平面系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x,y,\mu)\\ \dot{y} &= G(x,y,\mu)\end{aligned}\qquad x,y\in U\subset R^2\quad \mu\in J\subset R \tag{14-18}$$

并设(0,0)对所有的 μ 均为(14-18)的平衡点，即

$$F(0,0,\mu)=G(0,0,\mu)=0 \tag{H1}$$

式(14-18)在 $(x,y)=(0,0)$ 处的线性化矩阵 $L(\mu)$ 在 $\mu=0$ 附近有一对复特征值 $\alpha(\mu)+i\beta(\mu)$，$\beta(\mu)>0$ 时，有

$$\alpha(0)=0\quad \beta(0)=\omega>0 \tag{H2}$$

以及

$$h=\left.\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\mu}\right|_{\mu=0}\neq 0 \tag{H3}$$

则有如下 Hopf 定理：

如果非线性系统式(14-18)满足条件(H1)，(H2)，(H3)，则存在一个充分小的 $\varepsilon_0>0$ 和一个解析函数 $\mu=\mu(x)$，$\mu(0)=0$，使得对每个 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$，系统式(14-18)有闭轨 Γ_μ，即系统经过 $(x,0)(0<|x|<\varepsilon)$ 的点的轨线是周期轨线，并有

1．如果 $\mu(x)\equiv 0$，则系统式(14-18)在平衡点(0,0)的邻域内充满闭轨，即以(0,0)为中心。

2．如果 $\mu(x)>0$，则系统式(14-18)以(0,0)为稳定细焦点，在(0,0)邻域内，对于每一个 μ 值只有一条周期轨线，即是经过 $(x(\mu),0)$ 的那一条。此周期轨线的两个特征乘数中，一个为 1，另一个介于 0 与 1 之间，从而此周期轨线是稳定极限环。

3．如果 $\mu(x)<0(0<|x|<\varepsilon)$，则系统式(14-18)以(0,0)为不稳定细焦点，在(0,0)邻域内，对于每一个 μ 值只有一条周期轨线 Γ，此周期轨线的两个特征乘数中，一个为 1，另一个大于 1，即 Γ 为不稳定极限环。二维 Hopf 分岔见图 14-2。

说明：在应用 Hopf 定理时，可以先计算并判定式(14-18)的平衡点(0,0)是中心还是稳定细焦点或不稳定细焦点，然后根据定理中的(H1)，(H2)和(H3)得到相应的结论。

【例 14.2.1】　研究二维非线性系统

$$\dot{x} = y = f(x,y,\mu)$$
$$\dot{y} = -x + \mu y - y^3 = g(x,y,\mu)$$

的轨线及稳定性。

解　该系统的线性近似系统的系数矩阵为

$$L(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}$$

其特征值为 $\lambda = \frac{\lambda}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\mu^2 - 4}$

平衡点为(0,0)，满足分岔必要条件。当 $|\mu| < 2$ 时，有一对共轭复特征值

$$\alpha(\mu) \pm i\beta(\mu) = \frac{\mu}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{4 - \mu^2}$$

显然　$\alpha(\mu) = \frac{\mu}{2}, \beta(\mu) = \frac{1}{2}\sqrt{4 - \mu^2}, \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\mu} = \frac{1}{2} > 0, \alpha(0) = 0, \beta(0) = 1 > 0$

满足二维 Hopf 定理的三个条件，故存在一解析函数 $\mu = \mu(x)$（$|x|$ 充分小，$\mu(0) = 0$），使非线性系统经过 $(x,0)$ 有周期轨线，也就是经过 $(x,\mu) = (0,0)$ 系统从平衡点出发产生周期轨线，即 Hopf 分岔。

14.3　分岔问题的研究方法

近年来，分岔理论取得了很大进展，提出了多种研究方法。这些方法大致可分为定性方法、定量方法和数值方法三大类。定性方法主要有奇异性方法、P B 规范形方法、幂级数方法、后继函数法、Melnikov 函数法以及 C-L 方法等。C-L 方法通过结合对称性与奇异性理论，将 LS 约化方法推广到非自治系统，揭示其分岔特性。由于非线性问题的复杂性，且理论分析往往需要较深奥的数学理论，使得利用定性方法和定量方法求解均较困难，因此利用数值计算的方法在分岔研究上就具有十分重要的地位，目前在分岔的数值研究方面已经取得了卓有成效的进展。尽管如此，在研究分岔的三大类方法中，定性方法仍然是最基本和最重要的方法。本章主要介绍奇异性方法中的 L-S 约化方法和 P B 规范形方法。奇异性理论是现代数学的重要分支，它已成功地应用于非线性科学。在分岔问题中，它提供了处理静态分岔、Hopf 分岔和退化 Hopf 分岔的统一方法。P B 规范形方法是利用近似恒同的非线性变换在平衡点附近将原方程简化，从而把对原方程的研究转变为对其规范形的研究。对于高维分岔问题，通常需要将方程降维，这可以利用 L-S 方法和中心流形方法。在本书第十二章非线性系统周期解的稳定性中对利用中心流形方法判定稳定性问题已有介绍，因此本节将主要介绍 L-S 方法。

14.3.1　L-S 约化方法

L-S 约化方法是将高维或无穷维非线性方程化为低维或有限维方程的方法。其基本思想是将 R^n 维空间的状态变量 x 表示成两个子空间的直和，并将方程分别投影到这两个子空间上，得到两个低维方程。其中一个方程由隐函数存在定理知其必有惟一解，把求出的解代入另一个方程中去。于是原来的高维方程求解问题就化为另一个低维方程的求解问题。

设 $(0,0) \in R^n \times J$ 为 $f(x,\mu)$ 的一个奇点，记线性算子 $L = D_x f(0,0)$，$N(L)$ 为 L 的零空间，$R(L)$ 为 L 的值域，$M = N(L)^{\perp}$，$S = R(L)^{\perp}$ 分别为 $N(L)$ 和 $R(L)$ 的正交补

空间，L 有 $k(\geqslant 1)$ 个特征值等于零。由线性代数理论知，$\dim S = k = \dim N(L)$，$\dim M = n - k = \dim R(L)$。因此在 R^n 空间 x 有直和分解

$$
\begin{aligned}
R^n &= N(L) \oplus M \\
R^n &= S \oplus R(L)
\end{aligned}
\tag{14-19}
$$

设 P 为 $R^n \to R(L)$ 的投影算子，且使 $N(P) = S$，则其补投影算子 $I - P = Q$ 的 $R(Q) = S$，$N(Q) = R(L)$。式中 I 为恒同算子。则方程(14-7)等价于

$$
\begin{aligned}
Pf(x,\mu) &= 0 \\
Qf(x,\mu) &= 0
\end{aligned}
\tag{14-20}
$$

L-S 约化的基本思想是，从(14-20)的第一式解出的 $n - k$ 个变量代入(14-20)的第二式以后，使问题变成为求解 k 个未知量的方程。

由直和分解式(14-19)，对于任何 $x \in R^n$，有

$$
x = u + v,\ u \in N(L),\ v \in M \tag{14-21}
$$

从而式(14-20)成为

$$
\begin{aligned}
Pf(u + v,\mu) &= 0 \\
(I - P)f(u + v,\mu) &= 0
\end{aligned}
\tag{14-22}
$$

在原点把式(14-22)的第一式对 v 求导得

$$
D_v Pf(0,0) = PD_x f(0,0) = PL = L
$$

最后一个等式是由于 $N(P) = S$，所以 P 对 $R(L)$ 的作用等于恒同算子。此外，线性算子

$$
L: M \to R(L)
$$

是可逆的。

于是由隐函数定理，可以从式(14-22)中的第一式惟一确定 $v = \varphi(u,\mu)$，满足

$$
\begin{aligned}
Pf(u + \varphi(u,\mu),\mu) &= 0 \\
\varphi(0,0) &= 0
\end{aligned}
\tag{14-23}
$$

再将 $v = \varphi(u,\mu)$ 代入式(14-22)中的第二式，有

$$
\Phi(u,\mu) \equiv (I - P)f(u + \varphi(u,\mu),\mu) = 0 \tag{14-24}
$$

原系统的向量场 $f(x,\mu)$ 的零点与 $\Phi(x,\mu)$ 的零点有一一对应的关系：

$$
x = u + \varphi(u,\mu) \tag{14-25}
$$

从而原系统式(14-7)的求解问题等价于低维零空间 $N(L)$ 中式(14-24)的求解问题。式(14-24)称为原系统式(14-7)的约化方程。

在实际应用中，在零空间 $N(L)$ 和值补空间 S 中引进坐标。设 e_i 和 e_i^* $(i = 1,2,\cdots,k)$ 分别为 $N(L)$ 和 S 的正交标准基向量。对任何 $u \in N(L)$ 可以表示为

$$
u = \sum_{i=1}^{k} y_i e_i
$$

从而式(14-24)成为

$$
h(y,\mu) \equiv (I - P)f\left(\sum_{i=1}^{k} y_i e_i + \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} y_i e_i,\mu\right),\mu\right) = 0 \tag{14-26}
$$

另一方面，$Q = (I - P)$ 为 P 的映射到 S 的补投影算子，可以表示成内积的形式

$$
h(y,\mu) = \langle Q,f \rangle = \langle e^*, f\left(\sum_{i=1}^{k} y_i e_i + \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} y_i e_i,\mu\right),\mu\right) \rangle = 0 \tag{14-27}
$$

式(14-27)亦称为约化方程。

需要指出的是，虽然约化式(14-26)或式(14-27)的维数低于原系统的维数，但其求解仍然较为困难。通常采用级数展开等方法求其低阶项。此外由于 $N(L)$ 和 S 空间的基的选取不惟一，导致约化方程亦不惟一，但彼此等价。

【例 14.3.1】 研究非线性系统

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 + x_2 - x_1^2 = f_1$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 - x_1^2 = f_2$$

的静态分岔。

解　该方程的奇异点由式(14-7)决定，即

$$\mu x_1 + x_2 - x_1^2 = 0$$
$$-x_2 - x_1^2 = 0$$

考虑奇点 $(x,\mu) = (0,\mu)$，由分岔的必要条件，有

$$D_x f(0,\mu) = \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

当 $(x,\mu) = (0,0)$ 时，可能是静态分岔点，$\mu = 0$ 是可能的分岔值。在奇异点 $(0,0)$ 附近用 LS 方法建立约化方程，其线性算子

$$L = D_x f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

其零空间和值域空间分别为

$$N(L) = \{(x_1,x_2) \mid x_2 = 0\}$$
$$R(L) = \{(x_1,x_2) \mid x_1 = 0\}$$

此例中 $R(L) = N(L)^T$，故取 $M = R(L)$，$S = N(L)$。在此情况下式(14-19)的两个直和分解相同，分别取 $N(L)$ 和 $R(L)$ 的单位向量 $e_1 = (1,0)^T$ 和 $e_2 = (0,1)^T$。对任何 $x \in R^n$，有直和分解 $x = u + v$，其中 $u = x_1 e_1 \in N(L)$，$v = x_2 e_2 \in M$。从 R^2 到值域 $R(L)$ 的正交投影算子 P 为

$$Pf(x,\mu) = \langle e_2, f(x,\mu) \rangle = \sum_{i=1}^{2} e_{2i} f_i = (0,1)\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = f_2 = -x_2 - x_1^2 = 0$$

得　$x_2 = -x_1^2$　从而　$v = \varphi(u,\mu) = x_2 e_2 = -x_1^2 e_2$　将此式代入分岔方程(14-27)，并注意到 $S = N(L)$，在 S 中取 $e^* = e_1$，于是得

$$h(x_1,\mu) = Qf(u+v,\mu) = \langle Q, f \rangle = \langle e_1, f(x_1 e_1 + x_2 e_2, \mu) \rangle$$
$$= (1,0)\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = f_1 = \mu x_1 - x_1^2 - x_1^2 = \mu x_1 - 2x_1^2 = 0$$

从此一维约化方程得到两个解 $x_1 = 0$，$x_1 = \mu/2$。由这两个解知 $\mu = 0$ 确是静态分岔值，分岔图见图 14-5，这是跨临界分岔。此外，由此解可得原系统分岔方程的两个解

$$x^{(1)}(\mu) = (0,0)^T,\ x^{(2)}(\mu) = \left(\frac{\mu}{2}, -\frac{\mu^2}{4}\right)^T$$

即原系统也在 $\mu = 0$ 处出现跨临界分岔，这再次表明原方程的分岔性态完全可用其约化方程描述。

14.3.2 Poincare-Birkhoff 规范型方法

奇异性理论方法为研究动力系统分岔问题中的平衡态多重解和周期振动 Hopf 分岔提供了一种有力的工具，奇异性理论能够用统一而明确的方式处理不同的静态分岔问题。应用奇异性理论研究微分方程往往需要借助变换将方程变为较为简单的形式，如利用 Poincare-Birkhoff 规范形方法（以下简称 PB 规范形）在平衡点附近通过一系列近于恒同的坐标变换，可以把微分方程化为较为简单的形式，因此它是研究微分方程定性理论和含参数的分岔问题的基本方法之一。

1. PB 规范形的概念

设常微分方程

$$\dot{x}=f(x)\quad x\in R^n \tag{14-28}$$

这里省略分岔参数，又设 $f(x)$ 足够光滑，且 $f(0)=0$。PB 规范形的目的是通过坐标的多项式变换使得 $f(x)$ 的 Taylor 展开式中直到 r 阶（$r\geqslant 2$）项均有比较简单的形式。化简过程从低次项到高次项逐阶进行的步骤都是类似的。在此仅讨论其中的任意一步。

记 $H_n^k(2\leqslant k\leqslant r)$ 为从 R^n 到 R^n 的所有 k 次齐次多项式组成的向量空间。令 $L=Df(0)$，把微分方程(14-10) 写成

$$\dot{x}=Lx+f_2(x)+\cdots+f_n(x)+O(\|x\|)^{r+1} \tag{14-29}$$

设方程(14-10) 右边的展开式中有直到($k-1$) 次的项已经化简，并写为

$$f(x)=Lx+g_2(x)+\cdots+g_{k-1}(x)+h_k(x)+o(\|x\|^k) \tag{14-30}$$

其中 $g_i\in H_n^i(i=2,\cdots,k-1)$ 为已经化简的项，$h_k\in H_n^k$ 为待化简项。现在需要寻找到一个坐标变换去化简 $h_k(x)$，且保持次数低于 k 的项不变。为此作变换

$$x=y+P_k(y) \tag{14-31}$$

其中 $P_k\in H_n^k$ 为待定函数。将式(14-31) 代入式(14-28)，有

$$\dot{y}+DP_k(y)\cdot\dot{y}=f(y+P_k(y)) \tag{14-32}$$

即

$$\dot{y}=(I+DP_k(y))^{-1}f(y+P_k(y)) \tag{14-33}$$

由代数大除法

$$(I+DP_k(y))^{-1}=I-DP_k(y)+o(\|y\|^k) \tag{14-34}$$

并考虑式(14-30) 有

$$\begin{aligned}\dot{y}&=(I-DP_k(y))[L(y+P_k(y))+g_2(y)+\cdots+g_{k-1}(y)+h_k(y)]+o\|y\|^k\\&=Ly+g_2(y)+\cdots+g_{k-1}(y)+h_k(y)-DP_k(y)Ly+LP_k(y)+o\|y\|^k\end{aligned} \tag{14-35}$$

令

$$ad_LF(y)\triangleq[DF(y)]\cdot Ly-LF(y) \tag{14-36}$$

式(14-35) 成为

$$\dot{y}=Ly+g_2(y)+\cdots+g_{k-1}(y)+h_k(y)-ad_LP_k(y)+o\|y\|^k \tag{14-37}$$

由式(14-36)，显然 $ad_LF(y)$ 为线性算子。则其值域 $ad_L(H_n^k)\subset H_n^k$，记 $R_n^k=ad_L(H_n^k)$，并取 R_n^k，在 H_n^k 中的补空间 S_n^k，使 $H_n^k=R_n^k\oplus S_n^k$。从而可得 $h_k\in H_n^k$ 表示成 $h_k=f_k(y)+g_k(y)$，$f_k(y)\in R_n^k$，$g_k\in S_n^k$，因 $f_k\in R_n^k=ad_L(H_n^k)$，故总可以找出多项式 $P_k(y)\in H_n^k$，使 $ad_LP_k(y)=f_k(y)$ 与式(14-31) 中末项（$k+1$ 阶高阶无穷小项外）抵消，即把 $h_k(y)$ 项化简。从而式(14-37) 化为

$$\dot{y}=Ly+g_2(y)+\cdots+g_{k-1}(y)+g_k(y)+o\|y\|^k \tag{14-38}$$

其中 $g_k \in S_n^k$。上述分析对于 $2 \leqslant k \leqslant r$ 均成立，从而，可以通过一系列的坐标变换，使 $g_i \in S_n^i (i = 1, 2, \cdots, r)$，从而得到 Poincare-Birkhoff 规范形定理：

设 $f(x)$ 是 $C^r (r \geqslant 2)$ 向量场，$f(0) = 0, L = Df(0)$，则在原点附近存在一个坐标的 r 次多项式变换，使得在新坐标系中，式(14-28) 化为如下的规范形：

$$\dot{y} = Ly + g_2(y) + \cdots + g_r(y) + o(\|y\|^r) \tag{14-39}$$

其中 $g_i \in S_n^i (i = 1, 2, \cdots, r)$。在实际应用中，通常略去高于 r 阶项，得到

$$\dot{y} = Ly + g_2(y) + \cdots + g_r(y) \tag{14-40}$$

称之为式(14-28) 的一个 r 阶截断 PB 规范形。

需要指出的是，在平衡点附近，截断 PB 规范形式(14-39) 与原来系统式(14-28) 的拓扑结构联系密切，但并一定相同。存在着两个问题，其一，对于给定的 r 阶规范形研究与原系统的定性性态相近到何程度仍未解决，其二，当 $r \to \infty$ 时，规范形也不一定总收敛，尽管如此，在阶数不太高时，规范形在平衡点附近能提供定性性态方面的重要的信息，而这时研究原系统的拓扑结构有很大意义。

2. PB 规范形的计算

规范形计算需要搞清补空间的结构。而补空间是不惟一的，不同的补空间导致不同的 PB 形规范形。下面介绍两种规范形的计算方法。在讨论中，设给定线性算子 L，但非线性部分任意。并且假设 L 已化为 Jordan 标准形，因为这总可以通过非奇异线性变换实现。

(1) 矩阵法

H_n^k 是一有限维向量空间，ad_L 是线性算子，因此可以通过线性代数的矩阵理论求出补空间 S_n^k 进而求得规范形，由线性代数理论，有如下关于补空间的定理：

设 $\{e_1, \cdots, e_l\}$ 为 H_n^k 的一基，L 为 ad_L 在此基下的矩阵，则 L 的复共轭转置矩阵 L^* 的零空间 $N(L^*)$ 是 H_n^k 的值域，$R_n^k = ad_L(H_n^k)$，在 H_n^k 中的一个补空间，即有如下直和分解

$$H_n^k = R_n^k \oplus N(L^*) \tag{14-41}$$

【例 14.3.2】　已知微分方程 $\dot{x} = Lx + f(x), x \in R^2$，求其二阶 PB 规范形，其中

$$f(x) = o(\|x\|),\quad L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

解　令 $y = (y_1, y_2)^T \in R^2$　取 2 维向量空间二次齐次多项式的基为

$$\{e_1, \cdots, e_6\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 y_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

对于每个函数 $F(y) = (F_1(y), F_2(y))^T \in H_2^2$，有

$$ad_L F(y) = [DF(y)]Ly - LF(y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

分别令 $F(y) = e_i(y) (i = 1, 2, \cdots, 6)$，即 $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1^2 \end{pmatrix}$

$$ad_L e_1(y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2y_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_1^2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2y_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 2y_1 y_2 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} y_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_2 - e_4$$

对于 $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix}$ 有

$$ad_L e_2(y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_2 & y_1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = e_3 - e_5$$

对于 $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2^2 \end{pmatrix}$ 有

$$ad_L e_3(y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2y_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ y_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_6$$

同理求出 $ad_L e_4(y)$,$ad_L e_5(y)$ 和 $ad_L e_6(y)$。

从而得 ad_L 在此基下的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

解线性方程 $A^* Z = 0 \quad Z \in R^6$

求出其一组基础解系 $(0,1,0,2,0,0)^T$ 及 $(1,0,0,0,0,0)^T$

得 $S_2^2 = N(A^*)$ 的一个基

$$(e_1^*, e_2^*) = (e_2 + 2e_4, e_1) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} y_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1^2 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 2y_1^2 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1^2 \end{pmatrix}\right\}$$

故有

$$g_2(y) = a e_1^*(y) + b e_2^*(y) = \begin{pmatrix} 2ay_1^2 \\ ay_1 y_2 + by_1^2 \end{pmatrix}$$

其中 a,b 为常数,从而原方程的一个二阶规范形为

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2ay_1^2 \\ ay_1 y_2 + by_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2ay_1^2 \\ ay_1 y_2 + by_1^2 \end{pmatrix}$$

于是原系统在平衡点的定性性态可由此二阶规范形表示。

需要说明的是,矩阵法的构造比较简单,但 H_n^k 的维数随 n 和 k 的增大而迅速增大 $\left(\dim H_n^k = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \dfrac{n\cdots(n+k-1)}{k!}\right)$。计算量将变得非常大,增加了计算的复杂性。

(2) 共轭算子法

由线性代数有如下定理:设 L^* 为线性代矩阵 $L = Df(0)$ 的复共轭转置矩阵,则在 H_n^k 中,线性算子 ad_L^* 的零空间 $N(ad_L^*)$ 是 R_n^k 的一个补空间,即 $H_n^k = R_n^k \oplus N(ad_L^*)$

于是确立 $N(ad_L^*)$ 即为解线性偏微分方程

$$DF(y) \cdot L^* y - L^* F(y) = 0 \quad F \in H_n^k \tag{14-42}$$

在 H_n^k 中的多项式解。

【例 14.3.3】 用共轭算子法求前面的例题

解 本例 $L^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $y = (y_1, y_2)^T$, $F(y) = (F_1(y), F_2(y))^T$,则

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\ y_1\end{pmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}F_1\\F_2\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases} y_1\dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}=0\\ y_1\dfrac{\partial F_2}{\partial y_2}=F_1\end{cases}$$

由第一个方程知 $F_1=F_1(y_1)$，不含 y_2，又由第二个方程知 F_2 只能是 y_2 的一次方，此外，又因为 $F\in H_2^2$ 维，可知

$$F(y)=\begin{pmatrix} ay_1^2\\ ay_1y_2+by_1^2\end{pmatrix}$$

构成 S_2^2，其中 a,b 为任意常数。故取 $g_2(y)=F(y)$ 从而得二阶规范形

$$\begin{pmatrix}\dot y_1\\ \dot y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}ay_1\\ ay_1y_2+by_1^2\end{pmatrix}$$

可见，因补空间选取不同导致规范形不惟一。

14.4 应用举例(分岔部分)

【例 14.4.1】 研究例 12.4 所述非线性振动磨定常解的分岔。

解 由例 12.4，经化简后振动磨的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-ny+\frac{n}{\pi}y\left(\frac{2e}{y}-\frac{e^3}{3y^3}\right)-f\sin\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega-\Omega-\frac{p^2}{4\omega}-\frac{p^2}{2\pi\omega}\left(\frac{2e}{y}-\frac{e^3}{3y^3}\right)-\frac{f}{y}\cos\theta$$

由分岔的必要条件，令

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=0$$

并消去 θ 后，得分岔方程

$$\left[-n+\frac{n}{\pi}\left(\frac{2e}{y}-\frac{e^3}{3y^3}\right)\right]^2+\left[\delta-\frac{p^2}{4\omega}-\frac{p^2}{2\pi\omega}\left(\frac{2e}{y}-\frac{e^3}{3y^3}\right)\right]-\frac{f^2}{y^2}=0$$

其中 $\delta=\omega-\Omega$。令

$$x=\frac{e}{y}\quad \mu=\frac{-\delta+\dfrac{p^2}{4\omega}}{2\dfrac{p^2}{\pi\omega}}$$

$$\lambda_1=\frac{\sqrt{n}}{2\dfrac{p^2}{\pi\omega}}$$

$$\lambda_2=\frac{n\omega}{\pi p^2}-\frac{f^2\pi\omega}{4e^2p^2}$$

并略去高阶项，分岔方程化为

$$G(x,\mu,\lambda_1,\lambda_2) - \left[\mu + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right)\right] + \mu_1^2 + \mu\lambda_1^2 x + \mu_2 x^2 = 0$$

其 P-B 规范形为 $G(x,\mu) \quad \left[\mu + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right)\right]$

由规范形理论可以证明，$G(x,\mu,\lambda_1,\lambda_2)$ 是 $G(x,\mu)$ 的一个二开折，开折参数 λ_1 反映阻尼的大小，λ_2 反映外激励的大小。相应地该分岔方程的歧集 B 有三个：

$$B_1:\lambda_1 = 0$$

$$B_2:\lambda_2 = \frac{\mu^2\lambda_1^2}{4}$$

$$B_2:\lambda_2 = \frac{1}{8}[-1 \quad 4\mu\lambda_1^2 + \sqrt{1-16\lambda_1^2-8\mu\lambda_2^2}]$$

迟滞集 H 为

$$\lambda_1 = \pm \frac{16\lambda_2 + [4\lambda_2 + (2-x^2)^2]^2}{16(1+\mu x)x^2}$$

$$\lambda_2 - \frac{c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - 4c_1c_3}}{2c_1}$$

$$c_1 - -\frac{\mu}{x^2}$$

其中
$$c_2 = \frac{(1+\mu x)(2 \quad x^2)}{x} - \mu x^2 \cdot \frac{\mu(2-x^2)^2}{2x^2} + 2x(1+\mu x)$$

$$c_3 = -\frac{2(1+\mu x)}{x}\left(\quad 1 + \frac{1}{2}x^2\right)^3 - \frac{\mu}{x^2}\left(-1 + \frac{1}{2}x^2\right)^4$$

双极限集：Φ(空集)。

【例 14.4.2】 分析如下具有滞后非线性的单自由度非自治系统的分岔行为

$$\ddot{x} - b\dot{x} + p^2 x + F(x) = f\cos\omega t$$

其中 b,p,f,ω 为常数，而 F 为具有滞后特性的非线性项

$$F(x) = \mp \frac{\eta}{n}[(x_0 \pm x)^n - 2^{n-1}x_0^n]$$

解　仅考虑主共振情况，即 $p \approx \omega$。设 $p^2 = \omega^2 + \sigma$，这里 σ 为解谐参数。引入小参数 ε，得

$$\ddot{x} + p^2 x \quad \varepsilon[\quad \sigma x + b\dot{x} \quad F(x) + f\cos\omega t]$$

设解为　$x = a\cos\varphi \quad \dot{x} - \quad a\omega\sin\varphi \quad \varphi = \omega t + \theta$

根据平均法，得一次近似解

$$\frac{da}{d\tau} \quad -\frac{1}{a}\left[-\frac{ba\omega}{2} - A(a) + \frac{f}{2}\sin\theta\right]$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{\omega t}\left[-\frac{1}{2}\sigma a - B(a) + \frac{f}{2}\cos\theta\right]$$

其中
$$\tau \quad \varepsilon t$$

$$A(a) = \alpha a^n \quad \alpha = \frac{2^n(n-1)\eta}{n(n+1)\pi}$$

$$B(a) = \beta a^n \quad \beta = \frac{2^{3n}\eta}{(n+1)\pi}\frac{\left[\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(2n+1)}$$

其中 $\Gamma(n)$ 为 $16\sigma^2 + 4\mu^2 > f^2$ 函数。令

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}=0$$

并令

$$\lambda_1=\frac{E^2}{4(\alpha^2+\beta^2)}$$

$$a_1=\frac{(b\omega)^2+\sigma^2}{4(\alpha^2+\beta^2)}\quad a_2=\frac{b\alpha\omega+\beta\sigma}{\alpha^2+\beta^2}$$

得分岔方程

$$a^{2n}-\lambda_1+a_1a^2+a_2a^{n+1}=0$$

作变换 $a=x-\frac{a_2}{4}$,则分岔方程化为

$$x^4-\lambda+\varepsilon_1x+\varepsilon_2x^2=0$$

$$\lambda=\lambda_1+\frac{a_2^2}{16}\left(a_1-\frac{a_2^2}{8}\right)$$

其中

$$\varepsilon_1=\frac{1}{8}(a_2^2-4a_1)a_2$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{8}(8a_1-3a_2^2)$$

这是分岔方程 $x^4-\lambda=0$ 的余维二普适开折。其转迁集为:

歧集: $B=\Phi$

滞后集: $H=\left\{\left(\frac{\varepsilon_1}{8}\right)^2=-\left(\frac{\varepsilon_2}{6}\right)^3\right\}$

双极限集: $D=\{\varepsilon_1=0,\varepsilon_2\leqslant 0\}$

所以转迁集: $\Sigma=B\cup H\cup D$。

【例 14.4.3】 分析参数激励作用下广义 van der Pol 振子

$$\ddot{x}-\varepsilon(\mu-\alpha x^2+\beta\dot{x}^2)\dot{x}+(\omega^2+\varepsilon f\cos 2t)x=0$$

的分岔行为。

解　研究主参数共振时的分岔。由多尺度法得到一次近似情形下极坐标形式的平均方程为

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}T}=\frac{1}{2}\mu a-\frac{1}{8}(\alpha-3\beta)a^3+\frac{1}{4}fa\sin 2\varphi$$

$$a\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}T}=\sigma a+\frac{1}{4}fa\cos 2\varphi$$

令 $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}T}=0,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}T}=0$,并消去 φ,得到分岔响应方程为

$$\left[\frac{1}{2}\mu a-\frac{1}{8}(\alpha-3\beta)a^3\right]^2+\sigma^2a^2=\frac{1}{16}f^2a^2$$

进一步化为

$$(\alpha-3\beta)^2a^4-8(\alpha-3\beta)\mu a^2+4(16\sigma^2+4\mu^2-f^2)=0$$

首先我们注意到当 $f^2-16\sigma^2<0$,即 $|\sigma|>\frac{f}{4}$ 时方程只有零解,$f^2-16\sigma^2>0$,即 $|\sigma|<\frac{f}{4}$ 时,方程在某些区域有一个或两个非零解。假定 $\alpha-3\beta>0$,我们可以得到以下几种不同解。

1. 当 $16\sigma^2 - 4\mu^2 > f^2$ 时，有

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 = \left[\frac{4\mu + 2(f^2 - 16\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha - 3\beta}\right]^{\frac{1}{2}}$$

2. 当 $16\sigma^2 - 4\mu^2 > f^2, \mu > 0, \sigma < \dfrac{f}{4}$ 时，有

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 = \left[\frac{4\mu + 2(f^2 - 16\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha - 3\beta}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha_2 = \left[\frac{4\mu^2 - 2(f^2 - 16\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha - 3\beta}\right]^{\frac{1}{2}}$$

3 在其他区域只有 $\alpha_1 = 0$。

下面利用奇异性理论分析振幅 — 参数激励幅值分岔响应曲线。令

$$\alpha = \frac{4(16\sigma^2 + 4\mu^2)}{(\alpha - 3\beta)^2},\quad 2\beta = -\frac{8\mu}{\alpha - 3\beta},\quad \eta^2 = \frac{4f^2}{(\alpha - 3\beta)^2}$$

因此方程可以写成

$$a^5 - \eta^2 a + \alpha a + 2\hat{\beta} a^3 = 0$$

令

$$H(a, \eta, \hat{\alpha}, \beta) = a^5 - \eta^2 a + \alpha + 2\beta a^3 = 0$$

根据文献[46, 70]中关于分岔集、滞后集和双极限点集的定义，有

$$\begin{cases} \text{(a) 分岔集 } B_0: \alpha = 0 \\ \text{(b) 分岔集 } B_1: \alpha = \beta^2, \beta < 0 \\ \text{(c) 滞后集 } H_0: \beta = 0 \\ \text{(d) 滞后集 } H_1 \text{ 和双极限点集 } D \text{ 是空集} \\ \text{(e) 转迁集 } \Sigma = B_0 \cup B_1 \cup H_0 \end{cases}$$

14.5　混沌概述

14.5.1　定常运动的分类和混沌运动的定义

对于非线性振动，或者较一般地，对于运动这个重要概念，其数学描述可分成为两类。一种是 Newton 创造的确定性描述，另一种是随机性描述。

混沌要研究的是确定性运动。一切运动在本质上都是非线性的，这一点在 Newton 力学创始伊始就已经认识到了。但是由于数学处理的困难，早年人们对运动的确定型描述只限于线性模型和一些特殊的可积分非线性模型。后来，人们越来越把注意力转移到较为精确，较为困难的非线性模型。数字电子计算机的出现，为求解非线性系统提供有力的技术手段，而使非线性模型得到广泛的应用。

在数值计算过程中，美国气象学家 Lorenz(1963) 对大气中对流的一个简化模型的研究和日本物理学家 Ueda(1973) 对 Duffing 方程的一种变形的研究中，发现了确定性非线性系统的一些奇怪性态 —— 混沌性态。即在一定条件下，这些系统的解，并不显现所预期的那种极限状态。除此以外，这类运动具有对初值的极端敏感性，即初始条件的微小改变导致较长

时间以后的轨迹面目全非。不仅如此,如果观察运动的相轨迹的某一断面,例如当取的时间间隔为 T 的诸相点构成的时间序列,就会发现这一序列在外貌上与随机运动的时间序相似,从而又可以采用相似的方法,主要是用谱分析方法加以研究。这样一来,随机性与确定性之间建立了某种联系,然而对于混沌的研究还十分年轻,有关一些概念还不十分清楚。

混沌的定义是研究问题的基础,然而在许多时候却是不容易给出的。下面给出混沌运动的两个描述定义。

定义一　不稳定的过渡状态导致的始终有限的定常运动称为混沌运动。

定义二　除开平衡,周期,拟周期以外的始终有限的定常运动称为混沌运动。

混沌是一个相当难于给以精确定义的数学概念,可以把它看作是确定性系统的随机行为。确定性是指它由内在原因而不是由外来的噪声或干扰所产生;而随机性指的是不规则的和不可预测的行为。

非线性动力系统中的混沌运动具有以下一些特性:具有连续的功率谱,奇怪吸引子的维数是分数的,具有正的 Lyapunov 指数,正测度熵等几何特性,此外,混沌运动具有局部不稳定而整体稳定等特征。

14.5.2　混沌研究简史

最早认识到确定性系统中存在这种奇怪的运动并对它进行讨论的是 Poincare,他在1892年发表的"天体力学新方法"中,引入了许多重要概念,如同宿(homoclinic)异宿(heteroclinic)和双重渐近轨道等,分岔的概念和术语也是他提出来的。Poincare 的思想是超越时代的,但在很长时间内未受到人们的重视,直到 20 世纪六七十年代才重新被提起。

对混沌的近代研究,可以说开始于前已提到的 Lorenz(1963)的论文。Lorenz 研究了大气中对流现象的一个简化模型,发现这个模型的定常解有着奇怪的性态:在一定的初始条件下,解曲线往返于两个奇点附点的区域之间,永不终止。并对初始条件极敏感。这就提出了一个严重问题。长期天气预报是否可能?

1971 年 Ruelle 和 Takens 在一篇论文中提出了"奇怪吸引子"这个新名词。

1975 年 Li 和 York 首先使用了混沌(chaos)这个名词。

1976 年 May 综述了呈现复杂性态的一个简单数学模型 —— 一维平方映射,起了承上启下的作用,大大地推动了有关的研究工作。

1978 年 Feigenbaum 发现了两个普适常数,使得对于混沌的研究进入了一个新的纪元,以后文献数量爆炸性的增长,有关的研究工作在各个领域展开,不仅涉及物理学和数学,也涉及化学、生物学、社会学和经济学等等,可以说现在对于非线性系统的研究相当大一部分是对于混沌的研究。

研究混沌是极其重要的,在一切非线性系统中,包括用点映射,差分方程、微分方程和积分方程等描写的非线性系统中,都已出现大量呈现混沌性态的例子,甚至可以说,出现混沌是必然现象,那么为什么很长时间没有注意到混沌现象呢?观察时间不够长,要求精度不够高是重要原因,另一个原因是,当我们有意识地寻找一种现象时,那种现象是不难找到的,反之,要找一种我们没有意识到的一种有可能存在的现象,很可能当面错过,最后一个是研究混沌的实际意义。由于对混沌的本质,数学处理方法等所知甚少,与实际应用有较大距离。但已经看出了一些应用价值,例如 Lorenz 方程,它指出了长期天气预报的困难,这一点可以用"蝴蝶效应"加以形象地说明:即使方程完全正确,其他条件也十分确定,但只要蝴蝶拍动翅

膀改变了当地的气压,就会使长期预报发生困难。我国学者近年的一些研究成果值得注意,一个例子是来自生物物理,实验表明,当人们大脑处于积极状况时,脑电图的波形是混沌的,而当人睡眠或不思考问题时,脑电图显示周期性波形,在进一步研究中,构造了神经元动作的模型,在其中找到了混沌解。

虽然对混沌的研究工作取得了一定的进展,但距彻底了解还有很大的一段距离。

14.5.3 混沌运动产生的机理——一个简单的例子

为了说明什么是混沌性态,考虑一个分段线性非线性的不连续简单映射

$$x_{n+1} = f(x_n) = 2x_n(\mathrm{mod}1) = \begin{cases} 2x_n & \left(0 \leqslant x_n \leqslant \dfrac{1}{2}\right) \\ 2x_{n-1} - 1 & \left(\dfrac{1}{2} \leqslant x_{n-1} \leqslant 1\right) \end{cases} \quad n = 0,1,\cdots \tag{14-43}$$

mod 1 为除以 1 得到的余数。

图 14-7 是由 $0 \leqslant x_n < 1$ 出发的映射过程形象化的表示,由此得到了一个序列$\{x_1, x_2, \cdots\}$,由于每次迭代相当于先把 x_n 放大 2 倍,然后所得的结果大于 1 时,减去 1,因此若 x_0 为一个有理数,则它的分母是 2 的次幂的因子必定被逐次约去,最终使分母成为一个奇数,而后就不再变化,但分子又不能超过分母(因为 mod 1),这样数列中就反复出现一组数。其特例为 x_0 的分母是 2 的 K 次幂:2^K,则经过 K 迭代后只出现零值。若 x_0 是一个无理数,则以上情况并不出现,得到的是一个无限不循环序列,我们这时说出现了混沌。

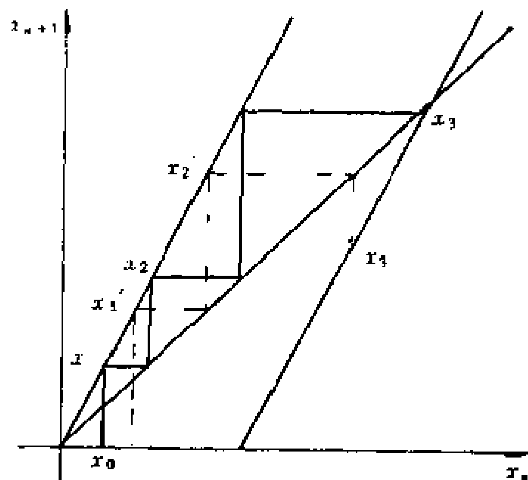


图 14-7 产生混沌性态的迭代

举例如下:

零　解:$\dfrac{11}{32} \to \dfrac{11}{16} \to \dfrac{3}{8} \to \dfrac{1}{4} \to \dfrac{1}{2} \to 0$

周期解:$\dfrac{13}{28} \to \dfrac{13}{14} \to \dfrac{6}{7} \to \dfrac{5}{7} \to \dfrac{3}{7} \to \dfrac{6}{7} \to \dfrac{5}{7} \to \dfrac{3}{7}\cdots$

混沌解:$\dfrac{\sqrt{2}}{2} \to \sqrt{2} - 1 \to 2\sqrt{2} - 2 \to 4\sqrt{2} - 5 \to 8\sqrt{2} - 11\cdots$

应该指出,在以上的分析中,我们假定了运算是能够完全精确的,也就是说计算中得到的完全是分数,不存在把分数化成小数问题,这在计算机中是很难实现的。计算机中的数字是以二进制表示的,从而只能精确到以 2^K 为分母的分数,并且这里的 K 不能超过存储器存放有效数字部分的位数。这就是说,我们虽能由计算机的输出观察到零解,却不能观察到周期解,其原因是所有的周期解都是不稳定的,没有吸引域,从而稍受干扰就变化为混沌解。

由此可以看出解对初始条件的极端敏感性。由于有理数和无理数在数轴上都是稠密分布的。因此,在找到导致零解和周期解的任何初点附近,都可以找到一个无论多么靠近的另一个点,由这点出发得到的是一个混沌解。又由于数轴上的无理点非常之多,有理点也无限

多,但比起无理点来要少得多,因此,即使是精确计算,对随机选取一个初始点,出现混沌的概率为 1,出现周期解的概率为 0,由图 14-7 中可以看出两个原来很靠近的点,经几次迭代以后,就相差很远。

14.5.4　混沌与随机

如前所述,混沌运动解序列与随机解序列在外貌上有许多相似之处,并也可以用统计方法对混沌运动进行一些研究。但是,混沌运动与随机运动有着本质上的区别。

首先,混沌运动是确定型系统中出现的完全确定的运动。而随机运动只能确定到它的统计特性。诚然,对混沌运动进行研究时也采用一些统计方法,从而得到它的一些统计特性,这是由于混沌运动的规律性过于复杂,以及它对初始条件十分敏感,因此这些统计特性,具有一定的意义。应该指出的是两者共用的统计方法主要只是谱分析方法,对随机运动所用的矩分析,相关分析等对混沌并不适用(表 14-1)。

表 14-1　混沌与随机运动的比较

某些性质	混沌	随机
确定性	有	无
对初始条件	敏感	不敏感
不可预测性	长期	短期

混沌运动与随机运动不但在定性上有明显的差别,而且还有着定量地区分二者的多种算法。就运动的具体过程而言,随机运动是根本不可预测的,而混沌运动在短期内是可以预测的,长期看来则是不可预测的,这是对初始条件极端敏感和运动轨线的强烈不稳定性所造成的,两个本来很接近的点,经过稍长一段时间就相互分离很远,这就对运动的长期预报失去了意义。

14.6　耗散系统及奇怪吸引子

14.6.1　耗散系统的一般性质

1. 耗散系统的常微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x), \quad x \in R^n, \quad x(0) = x_0 \tag{14-44}$$

2. 考察流的情况,可以证明系统相空间容积变化率为

$$\alpha = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \tag{14-45}$$

是一个局部量。对应于 $x(t)$,当系统为 Hamilton 系统时 $\alpha = 0$,系统为耗散系统时 $\alpha < 0$,如果 $\alpha > 0$,则系统的相空间容积是扩张的。

14.6.2　奇怪吸引子

1. 平凡吸引子

由于耗散系统的相空间容积是收缩的,n 维耗散系统的稳态运动将位于一个小于 n 维的"超曲面上",粗略地说,这个曲面就是吸引子。遗憾的是至今对吸引子还没有令人满意的

定义,按照 Lonford(1981) 等人的提法吸引子定义如下:

定义一　设连续的动力系统用流 $x = \Phi(x_0, t)$　$\Phi_t(x_t)$ 来表示;离散的动力系统用 $x_{j+1} = G(x_j)$ 或 $X_j = \Phi_t(x_0)$ 来表示,相空间为 R^n,对于每一个初值 $x_0 \in U$,且当 $t \to \infty$ 或 $j \to \infty$ 时 $\Phi_t \in X$ 或 $\Phi_t \in X$,则称 X 为动力系统 Φ 的吸引子。

吸引子分平凡吸引子和奇怪吸引子,不是平凡吸引子的为奇怪吸引子。

定义二　如果 $V \subset R^n$,对任一 $x \in V$,当 $t \to$ 或 $j \to \infty$ 时有 $\Phi t(x) \in x$ 或 $\Phi(x) \in x$,贝 V 称为吸引子的吸引域。

平凡吸引子可以有以下几种:连续系统情况为:不动点,周期轨道(极限环),准周期运动不变环面,它们的维数分别为 0,1,$n(n \geqslant 2)$,离散系统情况为:不动点,周期不动点,不变闭曲面,不变环面。如:一维连续系统 $\dot{x} = f(x)$,只能有不动点类型的吸引子;二维线性系统 $\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0$,有惟一吸引子:稳定焦点;van der Pol 方程 $\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$,具有一稳定的极限环,当 μ 较小时,十分接近半径为 2 的圆周

图 14-8 表示二维流的吸引子和吸引域情况,图中 X_1 为不动点,X_2 是极限环,带鞍点 P 的分界线形成两个区域 V_1 和 V_2 分别是 X_1 和 X_2 吸引子的吸引域。

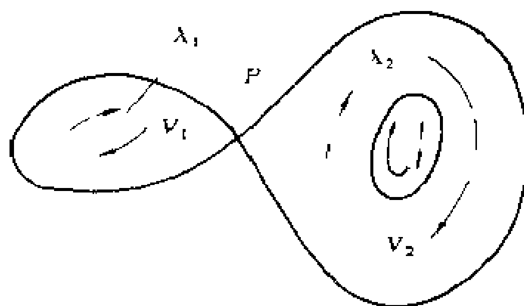


图 14-8　二维流的吸引子和吸引域

2. 奇怪吸引子

定义三　如果有一吸引子 X,还具有以下性质,则称这个吸引子为奇怪吸引子。

(1) 当 $X_0 \in U$ 时,动力系统 Φ 对初值 x_0 敏感。

(2) 对于任何 $Y \in U$,有 Φ_t 或 $\Phi_j(t) > 0$ 使 $|Y - \Phi_t| \to 0$ 或 $|Y - \Phi_j| \to 0$。

奇怪吸引子是轨道不稳定和耗散系统容积收缩两种系统内在性质同时发生现象,轨道不稳定使轨道局部分离,而耗散性使相空间收缩到低维的"曲面"上,表现为结构"紊乱"的吸引子。奇怪吸引子的特性主要有:

(1) 运动对初值的敏感性,表现为相邻轨道指数分离和局部轨道不稳定性。

(2) 奇怪吸引子局限于有限的区域里,大范围而言,表现为稳定的吸引子,有自己的吸引域。以吸引域内任意一点为初值,可以得到的几乎完全相同的奇怪吸引子,表现了它的稳定性。

(3) 空间结构十分复杂,这来自轨道的无穷伸展,压缩,折叠。

(4) 具有无穷层次的自相似结构。如下面将要叙述的 Henon 映射。

(5) 一般具有一切混沌通有的性质。

(6) 统计特性,如分维数,正的 Liypunov 指数,正的测度熵和功率谱是连续的等等。

14.6.3　奇怪吸引子实例

Henon 映射是二维点映射:

$$
\begin{aligned}
x_{j+1} &= 1 + y_j + a x_j^2 \\
y_j &= b x_j
\end{aligned}
\tag{14-46}
$$

其 Jacobi 行列式值为 $-b$,$b > 0$,系统是耗散的,映射的吸引子称 Henon 吸引子。对于 $a = 1$.

4，$b=0.3$的情况研究较多，此时存在一个奇怪吸引子，其性质如下：

(1) 取不同初值，映射稳态部分均形成大范围几何相同的奇怪吸引子；

(2) 有两个不稳定不动点 $A(0.631,0.1)$，$B(-1.131,-1.1.31)$，A 是鞍点，奇怪吸引子可看做鞍点分界线稳定流形和不稳定流形相交出现无限多同宿点而产生混沌。

(3)Henon 奇怪吸引子具有无穷层次自相似结构，如图 14-9 所示。

(4) 使 $b=0.3$ 不变，改变参数 a，当 a 增大时，出现周期解，并有周期倍化分岔，在 $a=0.3675$ 时，周期1分岔为周期2，$a=1.0$时，周期2分岔为周期4，…，到 $a=1.058$时，进入混沌，1.153时，两片混沌连成一片，到 $a=1.427$时，不变集合不再是吸引的，混沌区中两个明显的窗口是周期 T 窗口。

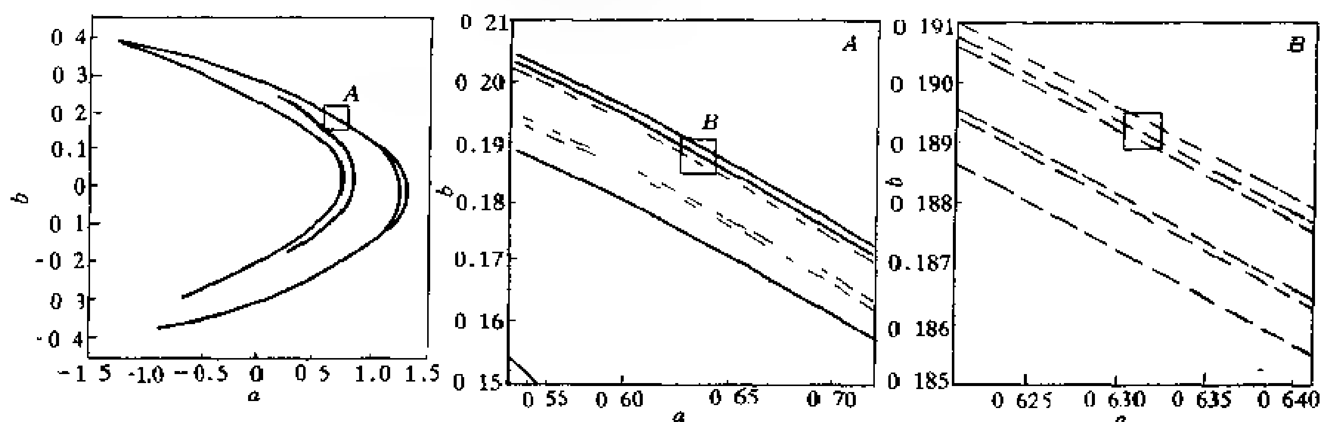


图 14-9　Henon 奇怪吸引子

2. Lorenz 吸引子

作为最早发现的混沌模型，Lorenz 模型由三维常微分方程描述

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(x-y), \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz, \\ \dot{z} &= -\beta z + xy, \end{aligned} \tag{14-47}$$

Lorenz 模型在 $\sigma=10$，$\rho=28$，$\beta=8/3$ 参数下出现混沌，表现为奇怪吸引子如图 14-10 所示。

3. Duffing 方程

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + kx + x^3 = B\cos\omega t \tag{14-48}$$

方程(14-48) 有着十分复杂的动力学性质，在许多参数域中会出现混沌，下面一具体实例——曲屈的梁，图 14-11 是屈曲梁混沌振动的 Poincare 映射。

14.6.4　通向混沌的道路

1　倍周期分岔

分岔与混沌有着密切的联系，系统周期解在一定条件下，会产生倍周期分岔。随着系统参数的变化，这种分岔可以无限继续下去，直至周期演化为无限的，出现混沌。

2. 阵发性分岔(Explosive 分岔，或间歇性 Intermittent 分岔，或爆发性 Bursting 分岔)

阵发性分岔是指在分岔图上，系统的周期解随着参数的逐渐变化，在达到某一值时，不经过一系列的分岔，而是突然变为非周期的而成为混沌，因而也称为 Explosive 分岔。Explosive 分岔的一个特点是，分岔过程具有明显的跳变现象。

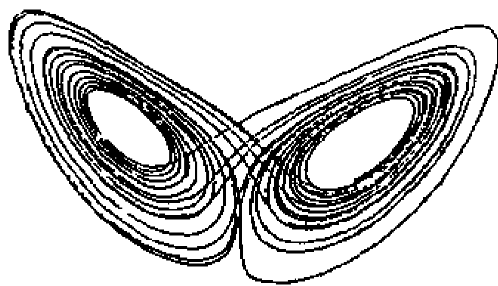


图 14-10　Lorenz 吸引子

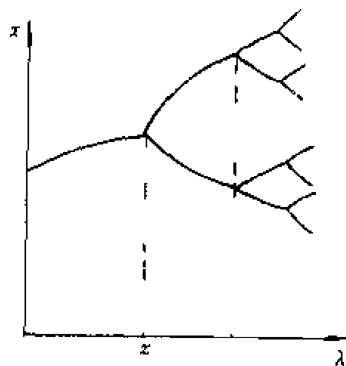


图 14-11　屈曲梁混沌振动 Poincare 映射

3　由拟周期(准周期、概周期)通向混沌的道路

Landau-Hopf 认为系统经过无穷多次准周期分岔进入混沌。R-Takens 经过研究发现，只要经过有限次，一般几次即可进入混沌，亦称为 Ruelle-Takens 道路。这条道路是指直接通过若干次 Hopf 分岔进入混沌。

4．KAM 环面破裂

近可积 Halmiton 系统的轨线分布在 KAM 环面上，一个套在另一个外面，两个环面之间充满混沌区。它在法向平面上的截线称为 KAM 曲线。可积 Halmiton 系统的相平面被鞍点连续分割，相空间中各部分的运动互不相混。在不可积小摄动下，双曲鞍点附近发生变化，鞍点连线破裂并在鞍点附近产生剧烈震荡，引起混沌运动。

14.7　分析混沌的方法

前面已指出了混沌运动与随机运动的区别，并指出混沌运动序列虽具有长期不可预测性，但却有一些重要的统计特性，这些数学特征对于了解混沌的规律性是十分重要的。与其他常规运动相比，混沌运动有其独特的数学特征，这些特征可作为一个定常运动是否为混沌的判别标准。通常是对一个映射点序列(或由微分方程组的解转化而来的离散点列)进行分析得到的。本节叙述其中最重要的几种，即频谱，Lyapunov 指数和分数维数。

14.7.1　相平面图和 Poincare 映射

在纵坐标为速度及横坐标为位移的相平面图上，可作出随时间 t 而变化轨线，如果在相平面图上出现如图所示的闭轨线，则系统存在周期解；当经过无数个循环，无法获得封闭的轨线，这时系统可能产生混沌运动。

系统经过连续的映射可以在 Poincare 截面上观察到不同形式的相点或相轨线，依据其拓扑性质可以判别系统出现周期 1 运动、周期 k 的运动、拟周期运动或混沌运动。在 Poincare 截面上所出现的孤立点或有限个(k 个)孤立点，闭曲线和分布在一定区域上的不可数集，可以分别表示系统的周期 1 或周期 k 运动，拟周期运动和混沌运动。

若有一振动系统，其质量为 m 的物体，在运输带上做往复运动，皮带的速度是 v，振动系统具有刚度为 k_1 线性弹簧和一刚度为 k_2 的立方恢复力的弹簧，具有负的阻尼系数为 c_1 线性阻尼和系数为 c_2 的立方阻尼，质量和皮带之间存在干摩擦，干摩擦系数为 μ。其简谐激力为 $P_0\cos\omega t$。运动方程式为

$$m\ddot{x} + c_2(\dot{x} - v)^3 - c_1(\dot{x} - v) + k_1 x + k_2 x^3 + mg\mu \cdot \mathrm{sgn}(\dot{x} - v) = P_0\cos\omega t$$

式中　g —— 重力常数。

将方程表示成

$$\dot{x}_1 = x_2$$

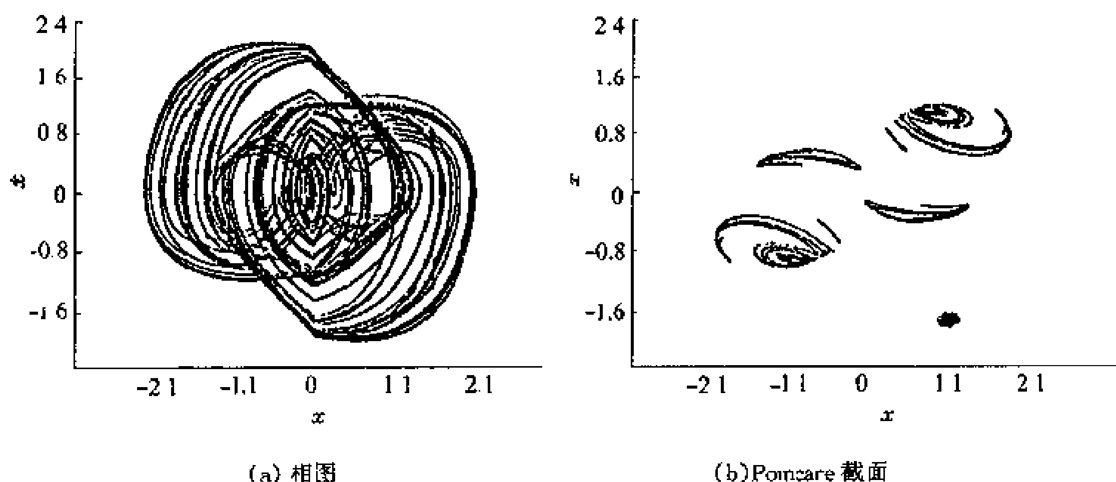
$$\dot{x}_2 = -g[\mu \cdot \mathrm{sgn}(x_2 - v) - \alpha(x_2 - v) - \beta(x_2 - v)^3] - \gamma_1 x_1 - \gamma_2 x_1^3 + F_0\cos\omega t$$

式中　$\alpha = c_1/mg, \beta = c_2/mg, \gamma_1 = k_1/m, \gamma_2 = k_2/m, F_0 = P_0/m, x = x_1$

利用四阶 Runge-Kutta 法，在给定以下系统参数的条件下进行了计算：

$\alpha = 0.05\mathrm{s/m}, \beta = 0.02\mathrm{s/m^3}, \gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1000(\mathrm{sm})^2, \mu = 0.6, v = 1\mathrm{m/s}, \omega = 2 \sim 32$，时间步长 $\Delta t = T/200$，其中 $T = 2\pi/\omega$。

图 14-12 所示的图形是当 $\omega = 2, x_{10} = 0.001, x_{20} = 0.0$，积分 1000 个周期所得到的结果。



(a) 相图　　(b) Poincare 截面

图 14-12　相平面图与 Poincare 截面图

相平面图所绘制的是最后 20 个周期，Poincare 点映射所绘制的是 800 个点。此时相平面上出现复杂的形式，Poincare 映射显示出奇怪吸引子的行为。改变初始条件，可得到类似的结果。

14.7.2　频谱分析

频谱分析应当与 Poincare 点集的观察结合起来进行。频谱分析的对象是点映射产生的一个离散点列，或微分方程的解在不同时刻的值构成的一个离散点列(不一定是 Poincare 点集)。采用的方法是 Fourier 分析(快速 Fourier 变换一个 FFT)，相应的周期，拟周期、混沌的特征见表 14-2。然而，这种区分是有条件的，因为存在以下几个问题：

1. 周期运动的周期可能很长，因此，Poincare 点集很可能由相当多点组成，从而难以与一无限点集区分。

表 14-2　　混沌的有关特征

	周期运动	拟周期运动	混沌运动
Poincare 点集	有限点	无限点，稠密地分布在一条闭曲线上	无限点，分布在一定区域上
频　谱	离散	离散	连续

2. 拟周期运动中包含的互不通约的频率可能有相当多个，于是频率谱可能由相当密集的离散谱构成，难以与混沌运动的连续谱线相区分。

特别值得指出，当我们对拟周期和混沌运动进行 Fourier 分析时，事实上只能取有限个点，或者说一个有限长的样本过程。于是，我们的说法蕴含着一个假设：认为这个样本过程能够代表全过程的数字特征，亦即认为全过程是所谓各态历经的。由于对混沌运动的了解还很少，这种假设的可靠性还是有疑问的。实用中尽可能的取较长的样本过程，以减少误差。样本过程的 Fourier 展开式可写成：

$$x_T(t) = R_e\Big[\sum_{m=0}^{N} C_m e^{\frac{2\pi}{T}mt}\Big] \tag{14-49}$$

其中诸系数可用离散 Fourier 变换求得为：

$$C_m = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_T\Big(\frac{2\pi K}{N}\Big)\cdot e^{-i\frac{2\pi KM}{N}} \tag{14-50}$$

我们来分析一个样本过程的延续时间 T 和总点数 N 对分析结果的影响。首先，上面已经讲过样本过程的延长时间 T 越长，它反映真实物理过程的正确性就越好，亦即 C_m 越正确。其次，诸频谱之间的间隔是 $2\pi/T$，因此时间 T 越大，间隔就越小，亦即谱线加密。最后，频谱的复盖，范围是 $2\pi N/T$，它正比于点数而反比于时间 T。例如取强迫振子的 Poincare 点集，当外力频率为 ω_0 即周期为 T_0 时，我们恒有 $T = NT_0$。从而覆盖范围为 $\omega_0 = 2\pi/T_0$，这当然不能满足要求，因为无法观测到次谐波的影响，实际范围更小一点，一般最多只是 $\pi N/T_0$。

14.7.3 里雅普诺夫(Lyapunov)指数

Lyapunov 指数是描述相空间相邻轨道发散程度的量。

1. 定义

对于一阶自治系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x),\quad x \in R^n$$

在 n 维空间中，以 x_0 为初始点的轨线及其近旁 $x_0 + \Delta x$ 为初始点的轨线，在时刻 t，二轨道相差一个切向量 $\Delta x(x_0,t)$，为了方便，令 $W(x_0,t) = d(x_0,t)$，其欧氏模为 $\|\Delta x(x_0,t)\|$，则 W 满足的方程是

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = M(x(t))W,\quad M = \frac{\partial f}{\partial x} \tag{14-51}$$

M 是在 x_0 上计算的 f 的 Jacobi 矩阵，引入初始接近的两根轨线的平均指数发散率：

$$\sigma(x_0, W) = \lim_{t\to\infty}\Big(\frac{1}{t}\Big)\ln\frac{\|\Delta x(x_0,t)\|}{\|\Delta x(x_0,t_0)\|}\qquad \|\Delta x(x_0,0)\| \to 0 \tag{14-52}$$

可以证明 σ 存在且有限，此外，W 可选一个 n 维的基向量 e_i，使得对任何 W，沿基向量 e_i，有 n 个量 $\sigma(x_0,e_i) = \sigma_i$，称为 Lyapunov 指数。其中有可能是重复的，通常把它们排列成

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n$$

Lyapunov 指数与空间尺度选择无关。对于周期系统，有

$$W_{n+1} = AW_n$$

从而对 A 的 n 个特征值

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n|$$

及相应的特征向量 e_i

$$W_n = \lambda_i^n e_i$$

从而

$$\sigma(e_i) = \frac{1}{\tau}\ln|\lambda_i| = \sigma_i$$

因 $W_0 = c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_ne_n$，若 $c_1 \neq 0, \sigma(W_0) = \sigma_1$；若 $c_1 = 0, c_2 \neq 0$，则 $\sigma(W_0) = \sigma_2$ 等等。对于非周期轨道无法定义特征值与特值向量。

2. P 阶 Lyapunov 指数

P 阶 Lyapunov 指数 $Q^{(p)}$ 是描述切空间中的 $p(\leqslant n)$ 维体积的平均指数增长率。记 V_p 为各边为 $W_1, W_2, \cdots, W_p$ 的平行多面体的体积，则

$$\sigma^{(p)}(x_0, V_p) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{\|V_p(x_0,t)\|}{\|V_p(x_0,0)\|}$$

可以证明 $\sigma^{(p)}$ 是 p 个一阶 Lyapunov 指数之和，于是与一阶指数类似，有：

$$\sigma^{(p)} = \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_p$$

对几乎任何初始 W 向量成立。当 $P = n$ 时，得到相空间的体积增长率，对 Hamilton 系统显有

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(x_0) = 0$$

对于耗散系统，这个和式小于零。

3. 映射的 Lyapunov 指数

映射的 Lyapunov 指数可类似地定义，对于

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

记
$$A_n = [M(x_n) * M(x_{n-1}) * \cdots * M(x_1)]$$

其中 $M = \dfrac{\partial f}{\partial x}$，又记 A_n 的特征值为 $\lambda_1(n)$，则映射的 Lyapunov 指数定义为

$$\sigma^p = \lim_{n\to\infty}|\lambda_i(n)|^{\frac{1}{n}}$$

为映射的映射的 Lyapunov 指数。

4. Lyapunov 指数的计算

在混沌研究中，Lyapunov 指数起着重要作用。轨道如果是混沌的，那么它一定是发散的，因此至少 $\sigma_1 > 0$。为此有必要研究它的计算方法。

对于微分方程，几乎所有的切向量 W，有 $\sigma(x, W) = \sigma_1(x)$。选择一个初始 W_0，并沿着轨道 $x(t)$ 积分关于 W 的方程(14-51)，于是

$$d(t) = \|W(t)\|$$

为方便起见，常数 d_0 取单位值。把每隔 τ 秒的 W 取为单位向量，并进行迭代计算。

$$d_k = \|W_{k-1}(\tau)\|$$

$$W_k(0) = \frac{W_{k-1}(\tau)}{d_k}$$

其中沿轨线由 $W_k(0)$ 出发，自 $x(k\tau)$ 至 $x((k-1)\tau)$ 对方程(14-51)积分得到 $W_k(\tau)$。定义：

$$\sigma(n) = \frac{1}{n\tau}\sum_{i=1}^{n}\ln d_i$$

对于较小的 τ，可证明

$$\sigma_\infty = \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \sigma_1$$

存在并与 τ 无关。

对于其他Lyapunov指数，可以沿其他特征方向 e_i 积分求得。首先根据式(14-52)逐次求出高阶指数 $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \cdots, \sigma^{(p)}$，进而求出 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$。

5. 混沌判别方法与最大 Lyapunov 指数 σ_1

对于 3 维自治系统(或 2 维非自治系统)，其运动性质与 Lyapunov 指数值的关系是：

混沌运动：　$\sigma_1 > 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0$；

准周期运动：　$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0$；

周期运动：　$\sigma_1 = 0, \sigma_2 < 0, \sigma_3 < 0$；

平衡点：　$\sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0, \sigma_3 < 0$。

对于 4 维自治系统，其运动性质与 Lyapunov 指数值的关系是：

混沌运动：　$\sigma_1 > 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0, \sigma_4 < 0$；

准周期运动：　$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0, \sigma_4 < 0$；

周期运动：　$\sigma_1 = 0, \sigma_2 < 0, \sigma_3 < 0, \sigma_4 < 0$；

平衡点：　$\sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0, \sigma_3 < 0, \sigma_4 < 0$。

因为 σ_1 为最大 Lyapunov 指数，所以只要依据 σ_1 的大小，即可判定运动的形式；当 σ_1 为正时，则为混沌运动；$\sigma_1 = 0$ 时，则为周期运动(σ_2 为负)或准周期运动(σ_2 为 0)；当 σ_1 为负时，则为平衡点。

14.7.4　非整数维

线段是一维的，面积是二维的，容积是三维的。略为推广一些，点被认为是零维的，也可以引入更高维的空间，但是通常维数总是整数。在混沌理论和奇怪吸引子理论中经常要用到非整数维，这类维数是物理学家因需要而引入研究工作中，并加以推广的。

1. 维数的计算

如图 14-13 中的一维的线段(为简单起见设为单位长)，现用直径为 ε 的球去覆盖它，设 $\varepsilon = 1/10$，则至少要 $N = 10$ 个球，设 $\varepsilon = 1/100$，则至少需要 $N = 100$ 个，我们注意到 $N = (1/\varepsilon)^l$，这个 l 就是维数。

再如图 14-13 中用 N 个 ε 圆可覆盖一个方块，如将圆直径改成原来的 1/10，则整个圆的数目将增大到原来的 100 倍，即 $N \sim (1/\varepsilon)^2$。现用这种覆盖的方法定义一般点集的维数。为简单起见，限于平面点集例子。如 N 是能覆盖住一个点集的 ε 球的最小个数，当 ε 减少时 N 增大，N 为 ε 的函数，写成 $N(\varepsilon)$，点集容量维是：

$$d(\text{容量维}) = \lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{\log N(\varepsilon)}{\log\dfrac{1}{\varepsilon}} \tag{14-53}$$

例如图 14-13 方块的维数是 2。

2. 分数维举例

所谓Cantor三分之一集合，是由一条线段去掉其中三分之一，再去掉其余各段中各自中间的 1/3 等等，而最后余下集合的极限情况。如图 14-14，设原长度为 1，则用 ε 圆去覆盖这集合时所需圆的个数 N 与 ε 的关系为 $\varepsilon = 1/3, N = 2, \varepsilon = 1/9, N = 4, \cdots$，即 $\varepsilon = (1/3)^n$。而 $N = 2^n$，于是由定义(14-54)式，可得其容量维为

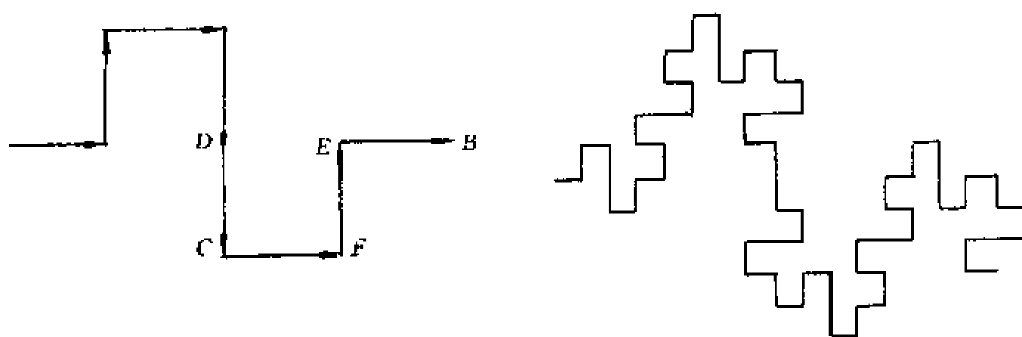


图 14-13 分数维举例

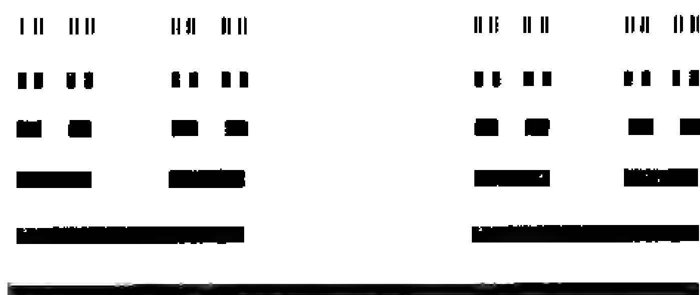


图 14-14 三分之一集合的维数

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{\log N(\varepsilon)}{\log\frac{1}{\varepsilon}}=0.6309\cdots \tag{14-54}$$

这是一个典型的分数维的例子。

14.7.5 分岔图

对分岔问题进行全局分析，需要求出稳定的周期解和吸引域，还要求出不稳定的不动点的位置。因此，常常利用前面介绍的点映射和胞映射方法加以分析。

首先将系统离散成 Poincare 点映射系统：

$$y_{i+1}=g(y_i)$$

式中，$y_i=(x,\dot{x})^T$ 是系统在 $t=i2\pi/\omega$ 时的状态。因此系统周期为 n 的解称为 $P-n$ 周期运动。相应的 $P-n$ 周期运动的一系列不动点应满足下面的离散格式：

$$y_{m+1}=y_m(y_1),\ m=1,2,\cdots,n-1$$

且

$$\bar{y}_i=G^n(\bar{y}_i),\ i=1,2,\cdots,n$$

一般说来，这种非线性的点映射只能用数值方法加以解决。

然后利用胞映射法求系统的 $P-n$ 周期运动的吸引域，从而判别出各种周期运动的稳定性，得到系统关于参数分岔图。

分岔图是以状态变量和分岔参数构成图形空间，表示状态变量随参数的变化。当系统运动为周期运动时，分岔图上表现为 1 条或 k 条随参数变化的曲线，当系统作混沌运动时，分岔图上表现为对应一个参数出现许多点。但往往对于阵发性混沌和拟周期运动不易区分。

图14-15 给出了系统分岔图的一部分情况，分岔参数变化范围是 $8.0\leqslant 9.4$。在这一参

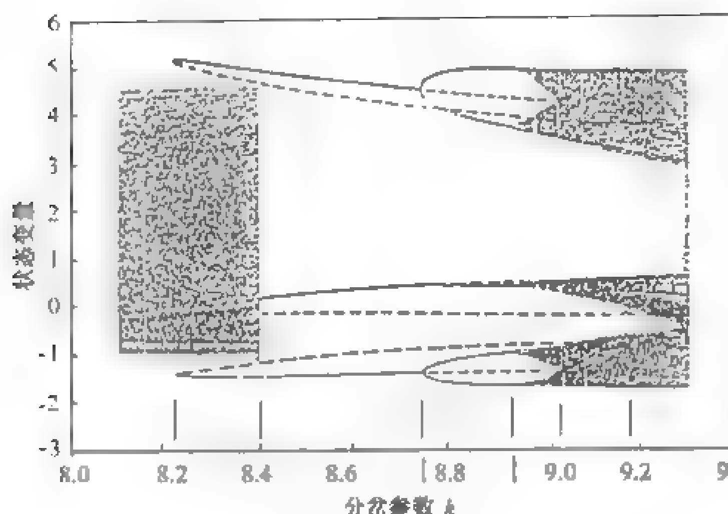


图 14-15　系统关于弹簧刚度的分岔图

区间，系统存在稳定的周期3解，如图中3条实线所示，稳定的与不稳定的周期3解汇交于 k 8.22 处的二个鞍点。当稳定的周期3解在 $d \approx 8.74$ 处失稳后，分岔为周期6解，而周期3解仍然存在，只是稳定的周期解变成不稳定的周期解。混沌发生在 $8.1 \leqslant k \leqslant 8.4$ 处和 $k \geqslant 9.02$ 处。

混沌吸引子在 k - 8.4 处突然消失，这引起运动状态突然改变。$k = 8.22$ 处的鞍点分岔生成了稳定的和不稳定的 P - 3 周期解，它的稳定流形是混沌吸引子吸引域的边界。

从图 14-15 给出的不同 d 值的混沌吸引子和 P　3 运动的吸引域可以看出：

1. 混沌吸引子靠近 P　3 鞍点；
2. 周期解的吸引域以针状向奇怪吸引子方向扩展。

当稳定流形与不稳定流形接触时产生了危险的边界，使混沌解的吸引域消失，同时混沌吸引子也在瞬间消失，只有 P　3 周期运动存在，称 k　8.4 为系统的危险的边界参数值。也称混沌运动的边界参数。

14.8　应用举例(混沌部分)

14.8.1　列车通过钢桥时桥侧向振动的分岔与混沌

列车通过钢桥时，钢桥会产生侧向振动。为了简化计算，将钢桥简化为单质量的系统。图 14-16 所示为一简化力学模型。

该系统的运动方程式可写为

$$x + 2\zeta p x + g(x) = \frac{f}{M}\cos\omega t$$

$$g(x) \begin{cases} p^2(x-e) & x > e \\ 0 & e > x > -e \\ p^2(x+e) & -e > x \end{cases}$$

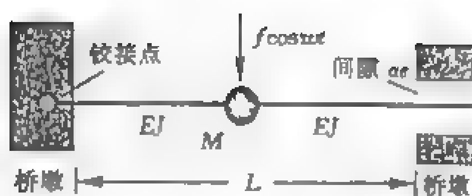
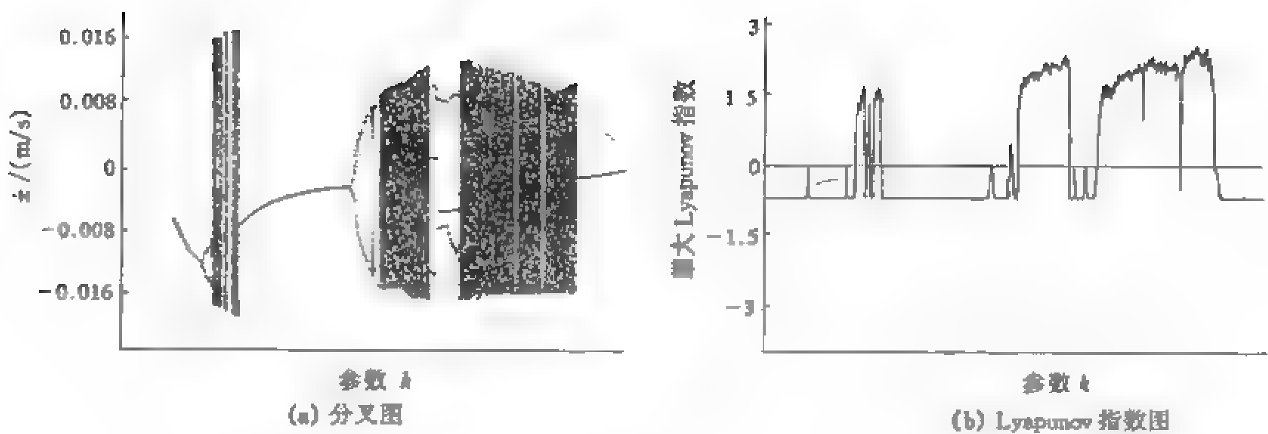


图 14-16　钢桥侧向振动有简化力学模型图

式中的钢桥与车体的折算质量 M = 45000kg；列车通过钢桥时的侧向扰动力幅值为 f　15000N；车速取 80km/h；激振频率 ω = 15.7Hz；阻尼比 ζ = 0.0162；间隙 e = 0.02mm；

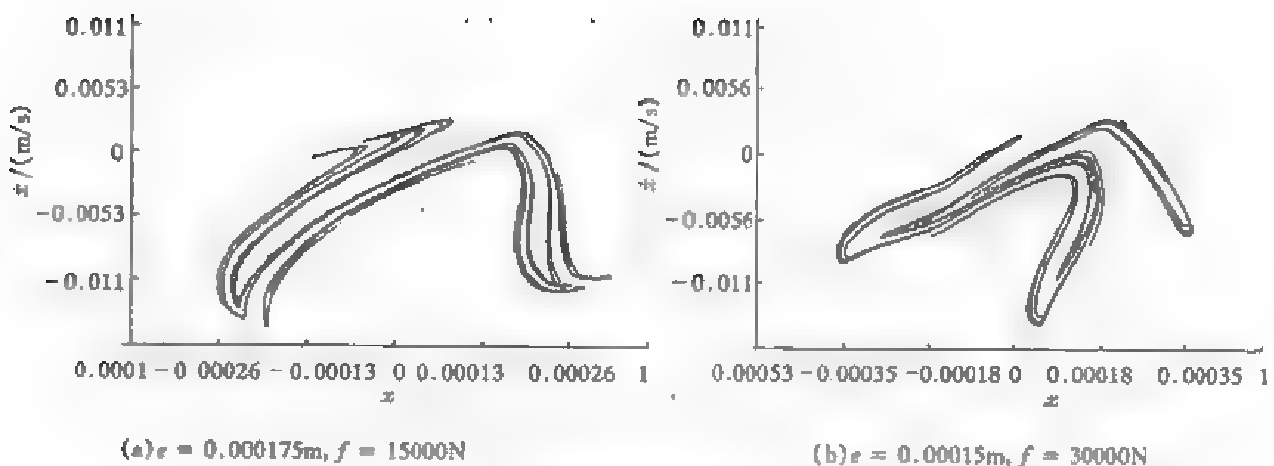
钢桥的侧向刚度 $k \in (4.0\times10^7, 1.3\times10^8)$N/m。通过计算，在改变参数：刚度 k 的条件下，得到钢桥侧向振动的分岔图和最大 Lyapunov 指数图，如图 14-17(a) 和(b) 所示。从图可见，系统在刚度为 4.0×10^7 到 5.5×10^7N/m之间时做周期 1 的运动，当 $k=5.5\times10^7$N/m 时，系统变为周期 2 运动，此后系统进入了第一个比较窄的混沌区域。经历了比较短暂的混沌运动，系统的运动形式在 $k=6.1\times10^7$N/m 时突变为周期 1，然后在 $k=8.1\times10^7$N/m 时，系统变为周期 2 运动，接着系统进入了第二个比较宽的混沌区域。在这两个混沌区域里，系统都有几个周期窗口，且在刚度 $k=9.63\times10^7$N/m 后，系统的运动状态出现周期 3。最后系统离开混沌区域进入周期运动状态。系统在刚度变化的情况下，系统的动力学行为相当丰富，其中包括周期运动和混沌运动等。从该系统的最大 Lyapunov 指数图可以看出，该系统存在两个比较明显的混沌区域，且在第二个混沌区域含有数个周期窗口，其中有一个较宽的周期 3 窗口，这和分岔图相符。



(a) 分叉图　(b) Lyapunov 指数图

图 14-17　钢桥侧向振动的分岔图和最大 Lyapunov 指数图

图 14-18(a) 表示了当 $e=0.175$mm，$f=15$kN 时该系统的 Poincare 截面图，显示出了混沌吸引子的形状，图 14-18(b) 展示了当 $e=0.15$mm，$f=30$kN 时系统的混沌吸引子的形状。

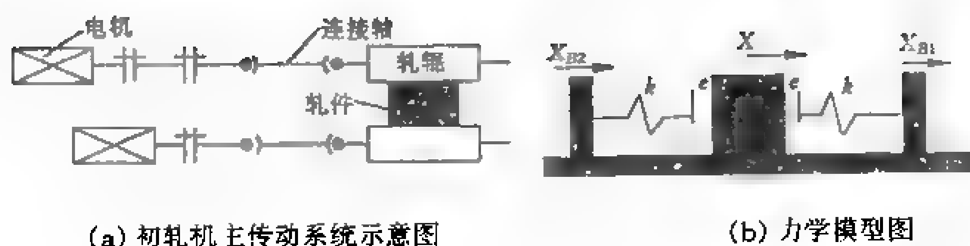


(a) $e=0.000175$m, $f=15000$N　(b) $e=0.00015$m, $f=30000$N

图 14-18　钢桥侧向振动的 Poincare 截面图

14.8.2　初轧机在含有振动边界和间隙的情况下的混沌行为

初轧机主传动系统示意图和在含有振动边界与间隙的情况下的力学模型如图 14-19 所示。



(a) 初轧机主传动系统示意图　　(b) 力学模型图

图 14-19　初轧机主传动系统示意图

该系统的运动方程式为

$$y'' + h(t,y) - ay' + by'^3 = 0$$

$$h(t,y) = \begin{cases} (y - 1 - \gamma\sin\bar{\omega}\tau) & y > 1 + \gamma\sin\bar{\omega}\tau \\ 0 & \gamma\sin\bar{\omega}\tau - 1 \leqslant y \leqslant 1 + \gamma\sin\bar{\omega}\tau \\ (y - 1 - 1\gamma\sin\bar{\omega}\tau) & y < \gamma\sin\bar{\omega}\tau - 1 \end{cases}$$

$$f(\dot{X}) = -\alpha X + \beta\dot{X}^3$$

$$\omega t = \tau, \frac{X}{e} = y, a = \frac{\alpha}{\omega}, b = \beta\omega e^2, \bar{\omega} = \frac{\omega_B}{\omega}, \gamma = \frac{\delta}{e}, \omega^2 = \frac{k}{m}$$

式中　X 和 $\dot{X}$——振动的位移和速度；

$f(X)$——摩擦力；

α 和 β——磨擦系数；

e——间隙；

ω——无间隙时的固有频率；

ω_B——振动边界的振动频率；

m——振动质量；

k——刚度；

δ——振动边界的振幅。

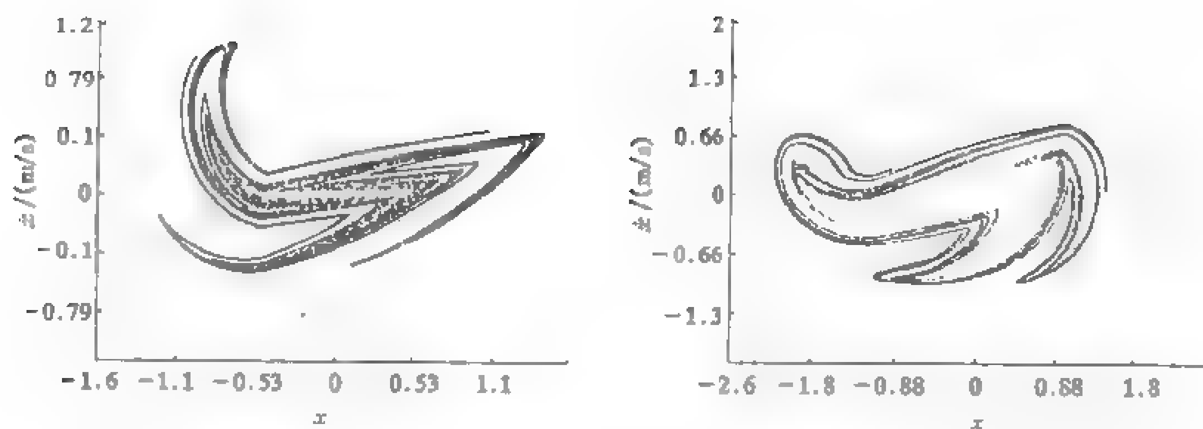
对于该振动系统，参数 a 和 b 受系统中的动摩擦系数的制约，动摩擦系数的变化直接影响到这两个参数的大小。由于动摩擦系数对系统振动特性有重要影响，为此对该系统在不同参数 a 和 b 条件下进行了非线性动力学特性分析。

图 14-20 给出了自激振动系统在 $\omega = 1.1, \gamma = 0.5$ 时的 Poincare 截面图，按照混沌运动的理论，可以看出，在上述条件下图 14-20 的运动形态是混沌的。

图 14-21 表示在参数 $b = 0.3, \bar{\omega} = 1.1$ 和 $\gamma = 0.5$ 时，参数 a 在 0.01 到 0.6 之间变化时该系统的分岔图，而图 14-21 是上述条件下的 Lyapunov 指数图。由此二图可见，该系统开始时的运动形式是混沌的，然后突变成周期 2 的运动，出现了 Flip 分岔，此后出现倍周期分岔，然后进入混沌运动状态。在参数 a 大于 0.36 时，系统又突变为周期5的运动状态；在参数 a 大于 0.42 时系统概周期的运动状态。由图可见，由于受参数 a 的影响，运动形式从周期运动逐渐过渡到混沌状态，之后又出现概周期运动等多种振动形式，还可以由图看出，在混沌区域存在着周期窗口。

14.8.3　转子系统局部碰摩故障的混沌行为

大型旋转机械在制造和安装过程中，当发生转子质量不平衡、转子与定子不对中、热膨



(a)$a=0.01, b=0.3$　　(b)$a=0.017, b=0.283$

图 14-20　初轧机自激振动的 Poincare 截面图

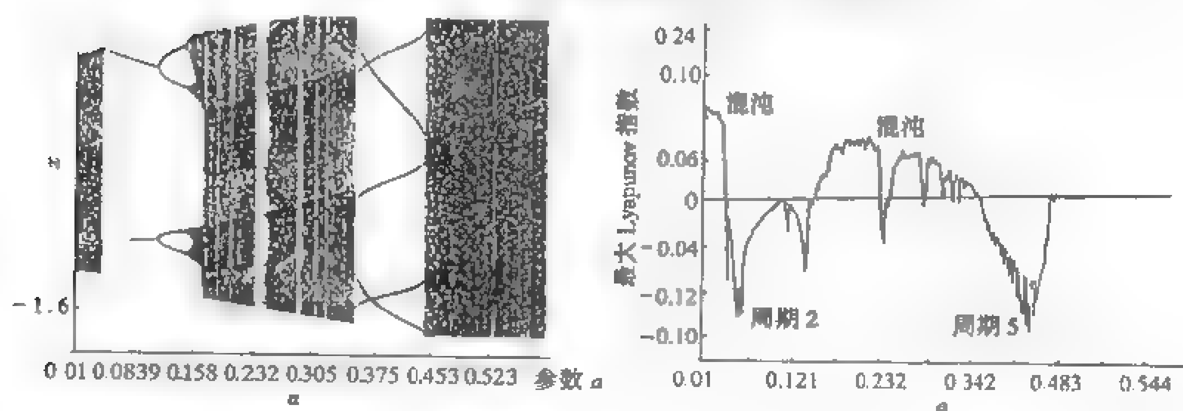


图 14-21　初轧机自激振动的分岔图和最大 Lyapunov 指数图

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_n \\ F_\tau \end{Bmatrix} \tag{14-55}$$

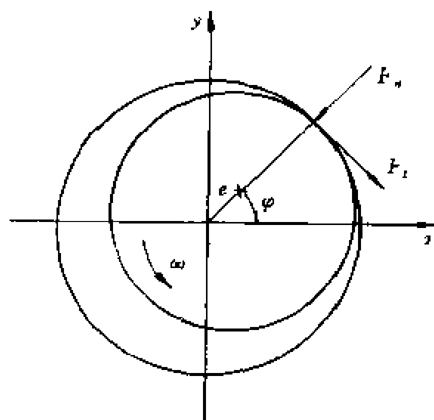


图 14-22 碰摩力示意图

考虑上式后，碰摩力化为

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad e < \delta$$

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = -\frac{(e-\delta)k_r}{e} \begin{bmatrix} 1 & -f \\ f & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \qquad e \geqslant \delta$$

因而转子局部碰摩时的碰摩力具有分段线性特征。对于 Jeffcott 转子，动力学模型如图 14-23 所示。设转轴刚度为 k，质量为 m，轴承阻尼因子为 c，定子径向刚度为 k_r，忽略重力影响响，因而转子局部碰摩时的碰摩力具有分段线性特征。对于 Jeffcott 转子，动力学模型如图 14-23 所示。设转轴刚度为 k，质量为 m，轴承阻尼因子为 c，定子径向刚度为 k_r，忽略重力影响响，并设 u 为转子偏心距，ω 为转子角频率，则 Jeffcott 转子系统局部碰摩运动微分方程为

$$\begin{bmatrix} m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & \\ & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & \\ & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} + mu\omega^2 \begin{Bmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{Bmatrix} \tag{14-56}$$

引入无量纲变换

$$x = \frac{x}{u}, \quad y = \frac{y}{u}, \quad \omega_0^2 = \frac{k+k_r}{m}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \beta = \frac{k_r}{k}, \quad \frac{c}{m} = 2\zeta\omega_0, \quad \tau = \omega_0 t \tag{14-57}$$

得到碰摩发生时无量纲的 Jeffcott 转子系统运动微分方程

$$\begin{cases} x'' + 2\zeta x' + x - \dfrac{f\beta}{1+\beta}y - \dfrac{\beta\delta}{(1+\beta)e}(x - fy) = \bar{\omega}^2\cos\bar{\omega}\tau \\ y'' + 2\zeta y' + y + \dfrac{f\beta}{1+\beta}x - \dfrac{\beta\delta}{(1+\beta)e}(fx + y) = \omega^2\sin\omega\tau \end{cases} \tag{14-58}$$

为分析转子系统的分岔与混沌行为，以某发电机转子为算例，对方程(14-58)进行了数值模拟。分别得到了转子系统的分岔图、Poincare 图、轴心轨迹图、相图和频域谱图。为保证解的收敛性和稳定性，选取适当小的积分步长和足够长的计算周期。对于 Poincare 图，如果系统响应为周期解，相应的 Poincare 图为孤立的点。当系统作严格的周期 1 运动时，Poincare 截面上的所有点均重合为一个点。当系统作周期 k 运动时，Poincare 图上为若干(k)个孤立的点，周期数与孤立点数一致。如果系统作概周期运动时，Poincare 图呈现为封闭曲线。

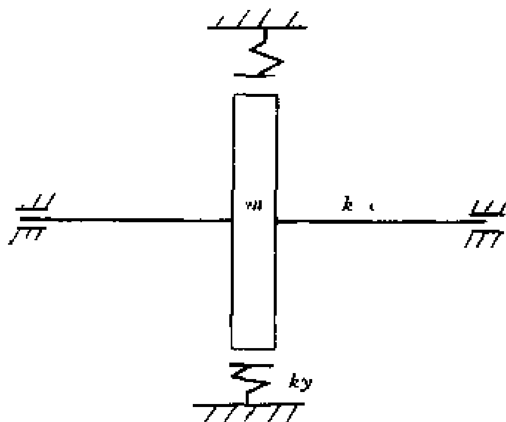


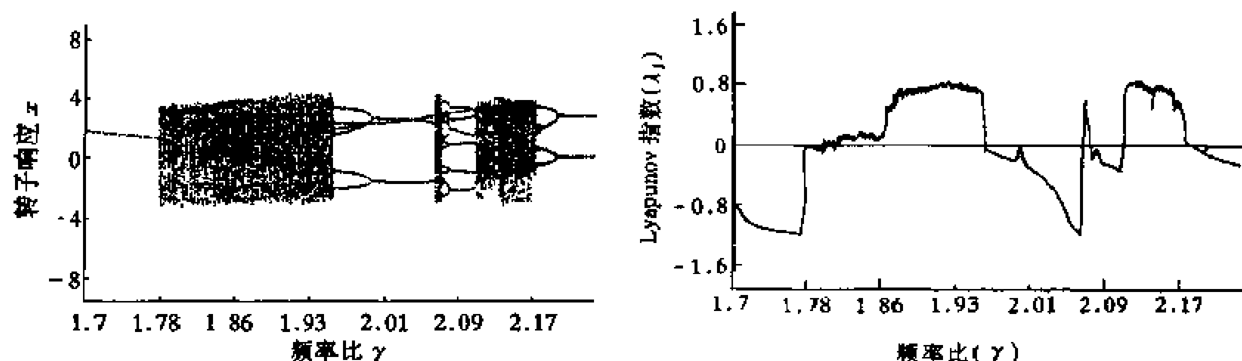
图 14-23 Jeffcott 转子碰摩力学模型

如果系统响应为混沌运动，Poincare 图可能呈现为分散性堆积的散点图，也可能呈现类似云图状的复杂图形。对于分岔图，周期解的变化可以从分岔图上清楚地表示出来，但概周期运

动和混沌运动在Poincare图上不易区分。一般有三条通向混沌的道路，即倍周期分岔、阵发性和概周期分岔。从轴心轨迹图和频域谱图上可以清楚地观察到系统周期和概周期响应以及混沌响应。通过对上述几种仿真图形的分析与相互比较，可以较为全面地揭示系统的分岔与混沌行为。下面是数值模拟及结果分析。

2. 以频率比为分岔参数的转子碰摩混沌运动分析

转子转动角频率与横向弯曲振动固有频率之比，是转子动力学研究中最重要的参数之一，本小节以频率比为参变量，分析转子发生碰摩时的运动状态。首先分析转子响应随频率比 γ 变化所作的运动，得到其分岔图和最大Lyapunov指数曲线图。然后具体分析不同频率比下的转子运动，得到相应的其他特征图。计算选定的主要参数为：间隙 $\delta = 0.16\text{mm}$，刚比度 $\beta = 3$，无量纲的偏心量 $E = 0.04$，阻尼比 $\zeta = 0.12$，摩擦系数 $f = 0.12$ 固有频率 $f_0 = 25\text{Hz}$。图14-24是频率比 $\gamma = 1.7 \sim 2.2$ 时的分岔图和最大Lyapunov指数曲线图。从分岔图中可以清楚地发现，随着频率比的增加，转子响应由周期1经由阵发性进入混沌运动。在经历混沌运动后，在频率比 $\gamma = 1.96$ 附近发生倍周期倒分岔离开混沌，由周期6演变为周期3。在频率比 $\gamma = 2.06$ 附近，响应经历短暂的混沌运动后又经由倍周期倒分岔离开混沌，进入周期7运动。在频率比 $\gamma = 2.13$ 附近，转子响应再一次发生阵发性混沌。随后，在频率比 $\gamma = 2.17$ 附近又一次经由倍周期倒分岔离开混沌进入周期2运动。从最大Lyapunov指数曲线图中可以清楚地看到周期运动与混沌运动的交替变化，其变化规律与图14-24(a)的分岔图所揭示的变化规律完全相符。当系统响应发生分岔时，Lyapunov指数曲线出现以指数零线为顶点的脉冲尖峰。



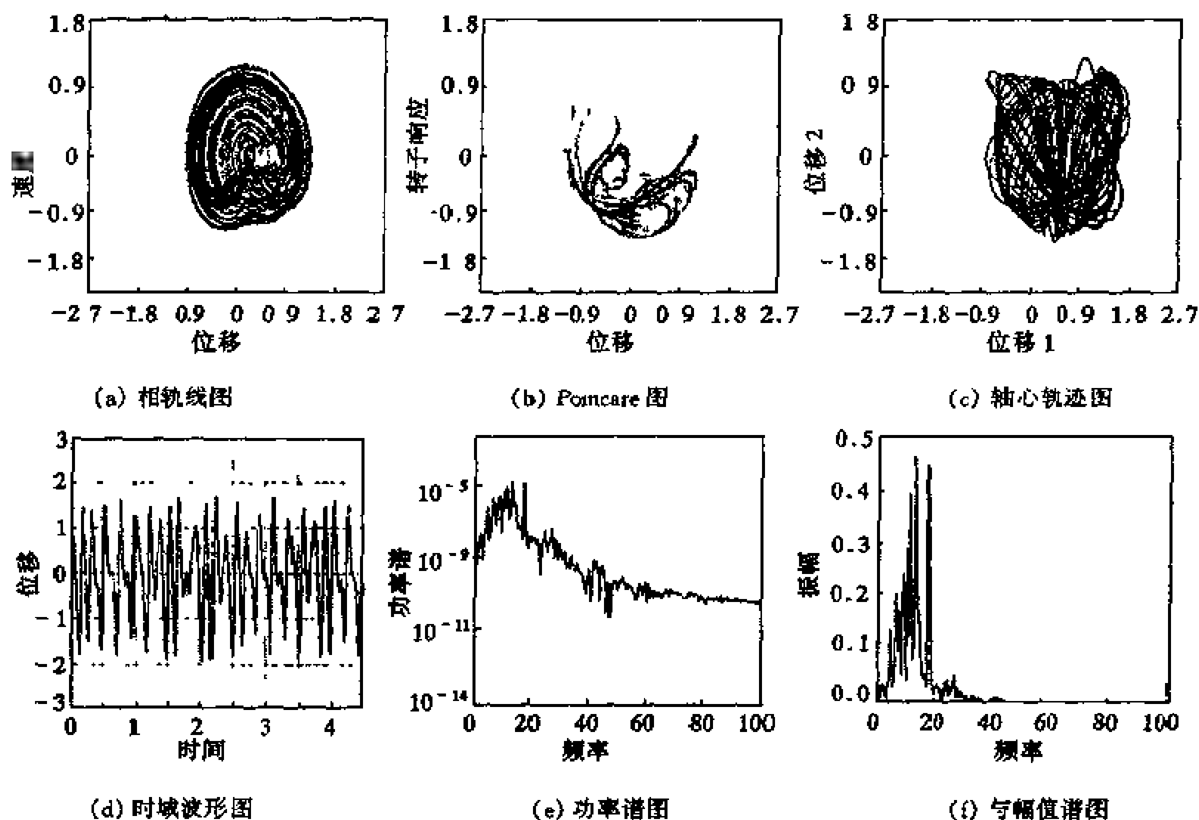
(a) 分岔图 (b) 最大Lyapunov指数曲线图

图14-24 $\gamma = 1.7 \sim 2.2$ 的分岔图及最大Lyapunov指数曲线图

图14-25分别是频率比 $\gamma = 1.86$ 时转子响应的Poincare截面映射图、相轨线图、轴心轨迹图、时域波形图、功率谱图和幅值谱图。从Poincare截面映射图上可以发现典型的云状混沌图形，此时的分维数 $D_p = 1.46$。相轨线图和轴心轨迹图显示了混乱的轨线。时域波形图呈现类随机的振动波形，而功率谱图和幅值谱图则出现类似随机的连续谱线。此时转子响应处于混沌运动。

3. 以偏心量为分岔参数的转子碰摩混沌运动分析

旋转机械在实际工作中，受到各种因素的影响，不可避免产生偏心量。在研究转子的混沌运动中必须考虑偏心量的影响。本小节将偏心量作为参变量来分析转子碰摩时的混沌运动。其他参数为，频率比 $\gamma = 2.1$，间隙 $\delta = 0.16$，刚度比 $\beta = 3$，阻尼比 $\zeta = 0.12$，摩擦系数 $f = 0.12$，图14-26(a)是偏心量 $E = 0.05 \sim 0.55$ 时的转子响应分岔图，图14-26(b)是相

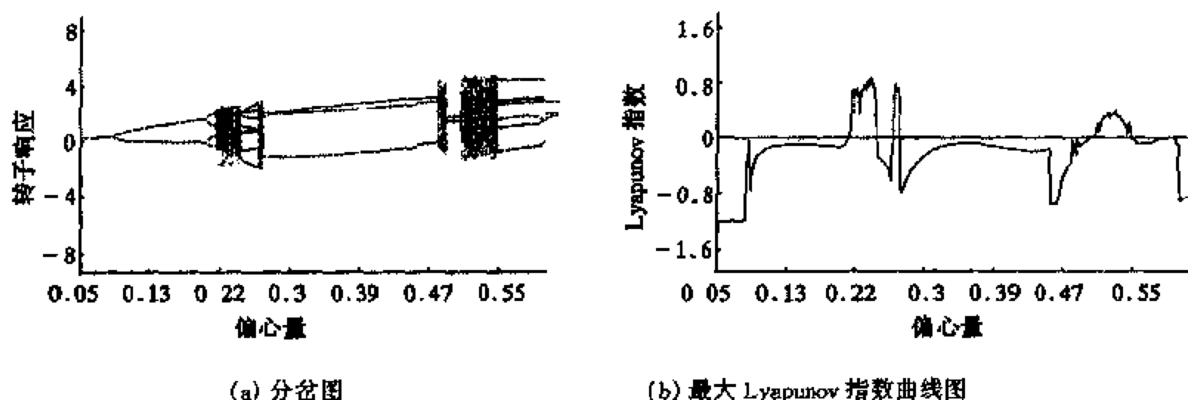


(a) 相轨线图　(b) Poincare 图　(c) 轴心轨迹图

(d) 时域波形图　(e) 功率谱图　(f) 亏幅值谱图

图 14-25　碰摩转子混沌运动

应的最大Lyapunov指数曲线图。从转子响应分岔图上可以发现，在偏心量$E = 0.05 \sim 0.55$范围内，转子相应以周期k的分频运动为主，仅在较窄的区域内发生混沌运动。实际上当继续增大偏心量后，转子响应呈现周期运动而不发生混沌运动。通过倍周期分岔和阵发性进入混沌，而仅通过阵发性离开混沌。在相应的最大Lyapunov指数曲线图上也可以发现，仅在较窄的区域黑的最大Lyapunov指数大于零。图14-27是偏心量$E = 0.23$时的Poincare截面映射图、时域波形图、轴心轨迹图、相轨线图、幅值谱图和功率谱图。从图中可以确定此时转子响应作混沌运动。图14-27是偏心量$E = 0.25$时的Poincare图、轨心轨迹图和时域波形图。此时转子作周期7的分频振动。

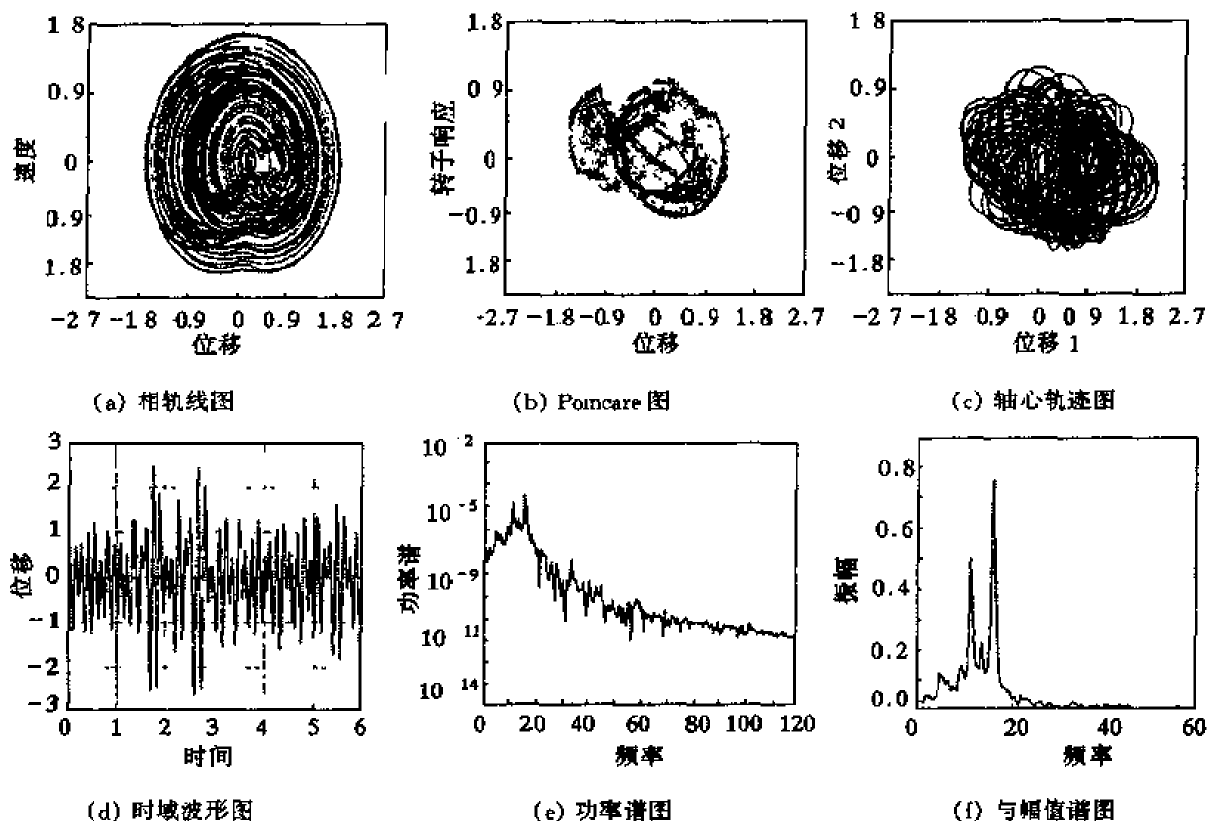


(a) 分岔图　(b) 最大 Lyapunov 指数曲线图

图 14-26　偏心量$E = 0.05 \sim 0.55$转子响应分岔图与最大 Lyapunov 指数曲线图

在本节讨论的参数范围内，随着偏心量的变化，转子响应仅在较窄的范围内出现混沌运动，增大偏心量将导致转子的稳态运动。

当Jeffcott转子发生局部碰摩时，除了转子定子间隙以外，转子转速与其临界转速比即频率比γ和转子偏心量E也是影响转子稳定性的重要因素。在连续变化的频率比下转子系



(a) 相轨线图　(b) Poincare 图　(c) 轴心轨迹图

(d) 时域波形图　(e) 功率谱图　(f) 与幅值谱图

图 14-27　E = 0.23 时转子响应的特征曲线图

统可以发生多次分岔和混沌交替出现的现象，转子响应随着频率比的变化，交替经历周期 k 的分频振动和混沌运动。在每次周期运动和混沌运动的循环过程中，碰摩响应以阵发形式进入混沌区，以倍周期倒分岔形式离开混沌区并进入周期 k 运动。转子的周期运动一旦出现了周期数递增的周期 k 分频振动，必然引起混沌运动。

对于转子响应随刚度比的变化，在从周期运动到混沌的道路上先发生倍周期分岔而后发生阵发性分岔。而从混沌运动到周期运动则以阵发形式为主。随着刚度比的增大，转子的周期运动每经历一次混沌，就发生一次分频，即随着周期运动与混沌运动的交替出现，转子的分频振动的周期数越来越高，进入混沌运动的刚度比范围越来越宽。增大转轴刚度比 β，系统稳定区域将增大。

转子响应随偏心量变化而呈现的分岔与混沌行为，以周期 k 的分频振动为主，仅在相对较窄的偏心量范围内出现混沌。当偏心量很高时，转子以同频周期运动为主。进入混沌的路径可以是阵发形式，也可以是倍周期分岔的形式。

计算与思考

1. 试述分岔的含义及分岔种类？
2. 试利用 L-S 约化方法研究某一非线性振动系统的分岔问题，并指出分岔的类型。
3. 试说明 PB 规范型的概念及规范型方法的基本内容。
4. 试研究在作简谐振动的平面上物料跳动的分岔行为，设跳动时恢复系数为 0。
5. 试分析振动夯实机在改变振动频率情况下的分岔行为。
6. 混沌运动有哪些特点，它与随机振动有哪些区别。
7. 何谓奇怪吸引子，它有哪些特征？

8. 混沌运动在相平面图上有哪些特点及其 Poincare 映射有哪些特点?

9. 混沌运动的功率谱图和 Lyapunov 指数有哪些特点?

10. 试计算和绘制 vanderPol 方程的混沌运动的相平面图、Poincare 截面、Lyapunov 指数、功率谱、维数及改变参数条件下的分岔与混沌图。

11. 试计算分段线性非系统的混沌运动的相平面图、Poincare 截面、Lyapunov 指数、功率谱、分维及改变参数条件下的分岔与混沌图。

12. 任意选择一种非线性振动系统,试计算并绘制在某一参数变化的条件下的分岔与混沌图。

第十五章 非线性振动的控制

15.1 概述

振动控制是指抑制系统工作时产生的振动，以保证系统正常和可靠地运行。振动控制可分为振动的被动控制和主动控制。

振动的被动控制又称无源控制，是振动控制中的经典方法，它不需外界施加能量，只需改变系统的惯性、弹性与阻尼来实现，目前它已在各种减振、防振问题中得到了广泛的应用。但是由于传统的振动被动控制技术抑制超低频振动和宽带随机振动效果较差，往往不能完全满足工程技术对控制振动提出的要求，因而促使科技工作者寻求其他更有效的控制振动的方法，近 30 年来，主动控制技术得到了迅速的发展，国内外科技工作者对此进行了大量的研究工作[64,66,101,109,114]。

美国在 20 世纪 70 年代初制定的太空能源计划及 80 年代实施的太空防御计划中，为解决大型、复杂的大柔性空间结构中的复杂振动控制和非线性振动问题，提出了一种新的振动控制方法 —— 主动控制。振动的主动控制或称为振动的有源控制，是振动理论与现代控制理论相结合而形成的振动工程领域中一个新分支。它是利用控制技术抑制振动，这种控制方法须有外界提供能源(控制力)，其基本结构如图 15-1 所示。受控结构在工作中出现振动后，安装在它上面的传感器感受到振动信号，此信号经测量系统传至控制系统，控制系统按预先设计好的或在识别过程中拟定的控制律，输出指令使执行机构工作，从而控制受控结构的振动。由于主动控制系统常常利用结构或系统的振动信息作为反馈信号，这样振动的主动控制就能较灵活地适应外界的干扰和系统的不确定性。因此，它与被动控制系统相比，有较大的灵活性，对振动环境具有较强的适应性，并具有抑制超低频振动和宽带随机振动的能力。

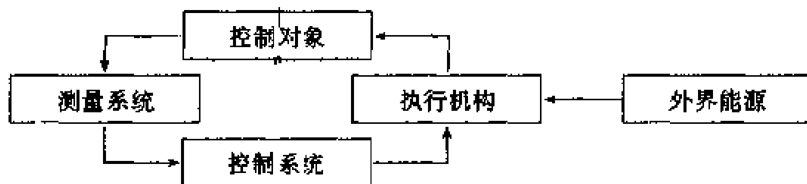


图 15-1 主动控制的基本结构

现代控制理论和计算机及电子技术的飞跃发展，为振动主动控制技术的产生和发展创造了必要的条件。在短短的 30 年中，振动主动控制技术取得了迅速的发展，并提出了多种控制方法，非线性振动主动控制技术也取得了实质性的进展。振动系统的主动控制理论从古典的 PID 控制方法和采用原始的伺服系统开始，经过 30 年时间，出现了极点配置、最优控制、次优控制、模态控制、状态反馈控制、H_∞ 控制、自适应控制和神经网络智能控制等诸多现代控制方法。振动主动控制技术的应用日趋广泛，从最早应用的航空航天等高技术领域到一般工业部门。在土木工程领域内，由于高层建筑与大跨度桥梁的出现，为保证结构的安全性，都要对由随机载荷(如风、地震等)引起的响应进行控制。在机械工程领域，采用主动控制技术消除机器人臂在终端位置处的振动。抑制柔性转轴通过临界转速的非线性振动主动控制研

究，是当前转子动力学的研究热点之一，磁轴承及可控油膜轴承的出现，为这类控制的实现创造了有利条件。在交通运输工程中，为改善乘坐舒适性，出现了汽车悬架系统的主动控制与半主动控制。在结构控制方面，一个主要发展趋势是将主动控制和被动控制相结合，使各自的优点进行互补，以收到更好的效果。主动控制与被动控制的一体化，使振动控制的理论研究向前推进了一步。阻尼材料、传感器和作动器合成一体的智能结构使得振动控制系统和结构可以有机地结合。

另外，混沌系统和混沌现象的控制是一个全新的科学前沿问题，引起了许多研究者的重视。

15.2 非线性振动控制的基本原理与方法

15.2.1 非线性隔振及非线性减振器

隔振是消减振动危害的重要途径之一。隔振就是借助于控制振动能量的传递来减小振动。现代工业的发展向人们提出了新的振动控制课题，对减振器的工作频带、体积、抗温差和抗腐蚀能力等的要求越来越高，常规的线性减振器往往不能兼顾多项技术指标的要求，因此推动了非线性隔振技术的发展。70年代后期研制成功的干摩擦减振器为宇航、航空和船舶工业的发动机、仪表提供了理想器材，使干摩擦这种非线性阻尼再次受到人们的重视。80年代，应用干摩擦进行振动控制，成为非线性抑振乃至振动控制中的重要研究方向之一，其技术成果已广泛应用于许多工业领域。

下面介绍几种常见的非线性减振器。

1. 钢丝网阻尼减振器

其主要元件是一个金属弹簧与一个塞在弹簧内的细金属丝网状座垫。前者承受主要载荷，后者起阻尼作用。也可进行相反的设计，使后者承受主要载荷，前者起辅助作用，如图15-2所示。金属丝网是由细的冷拔铬镍丝或蒙内尔合金丝纺织而成，并在压模内压制到所需要的形状和尺寸，座垫的刚度和阻尼特性由钢丝直径(0.1mm左右)、网络间距以及座垫尺寸而定。这种减振器的主要特点是：环境适应性很强；弹性元件是非线性的，可获得等频特征，不但具有很高的隔振能力，而且对瞬时性的冲击载荷有良好的吸收能力；承载能力很大；振动时的能量吸收系数可高达0.9，相应的阻尼比 ζ 高达 $0.15 \sim 20$(一般钢制弹簧为0.06，天然橡胶为 $0.22 \sim 0.47$)，因此它也具有良好的隔声性能。通常固有频率可设计在20Hz以下。

2. 钢丝绳减振器

这是一种新型的减振器，它既能吸收冲击能量又能隔离高低频振动，也能够衰减掉隔离体本身的驻波效应。

钢丝绳减振器沿 x、y 方向的刚度为 z 方向刚度的 $1/2 \sim 1/3$，所以是一种三向减振器，而且所占空间较小，容易安装，可用于压缩、拉伸、剪切、扭转振动等的隔离。钢丝绳减振器的外形如图15-3所示。

钢丝绳减振器的阻尼特性与变形有关。当振幅足够大时，钢丝绳各股之间发生干摩擦而消耗振动能量，可有效抑制共振；但在小振幅时各股靠摩擦力扭在一起而不发生滑移，所以不产生摩擦阻尼，故减振效果好，同时弹簧本身的驻波效应也是靠摩擦予以衰减的。在设计

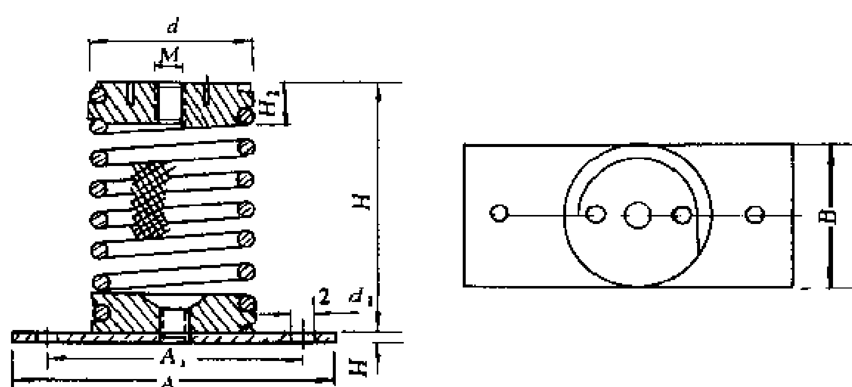


图 15-2　圆柱形钢丝网减振器

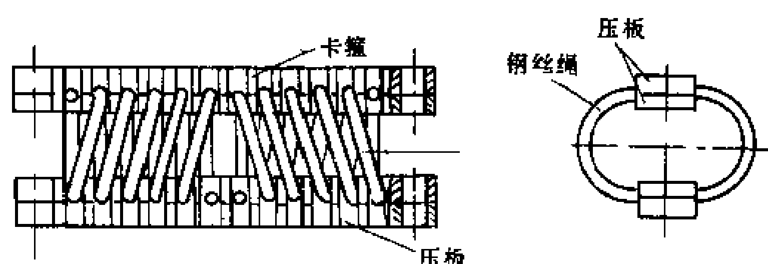


图 15-3　钢丝绳减振器

载荷范围内，钢丝绳减振器的载荷位移曲线如图 15 4 所示。由图可知，随着振幅的加大，交接面相对滑移，其摩擦力总是与交接面的相对速度反向。干摩擦阻尼与刚度都是非线性的，振幅越大，其刚度越软，而软化刚度能够吸收大量冲击能量，并缓和冲击力。这种减振器用于复杂结构上，可以阻止共振发生，因为共振发生时，由于迟滞回线耗能，其等价损耗因子可达 0.2 以上。表征钢丝绳减振器非线性性能的迟滞回线可用双线性迟滞回线模型来近似。图 15-5(a) 为标准钢丝绳迟滞回线，图(b) 为具有中心弹性绕组的钢丝绳的迟滞回线。由图可见这是一种非线性阻尼。在给定频率和振幅下，其等效粘性阻尼高达 0.15 ~ 0.17。由于刚度软化，共振频率将随着输入振动水平的增大而减低，如图 15-6。所以这就使激振频率偏离设备固有频率更远，从而可进一步改善减振效果。

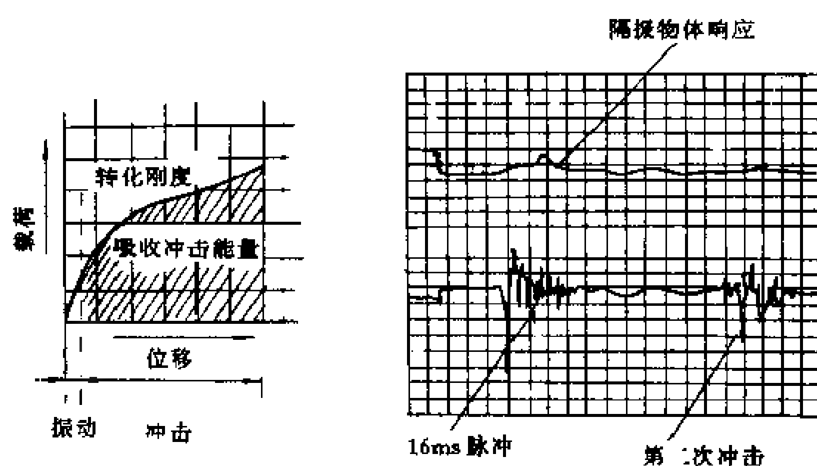
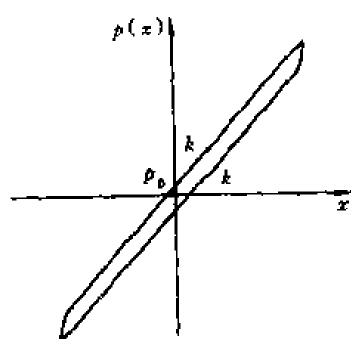
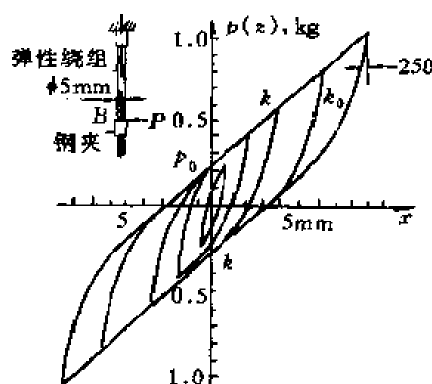


图 15-4　钢丝绳减振器的抗震能力



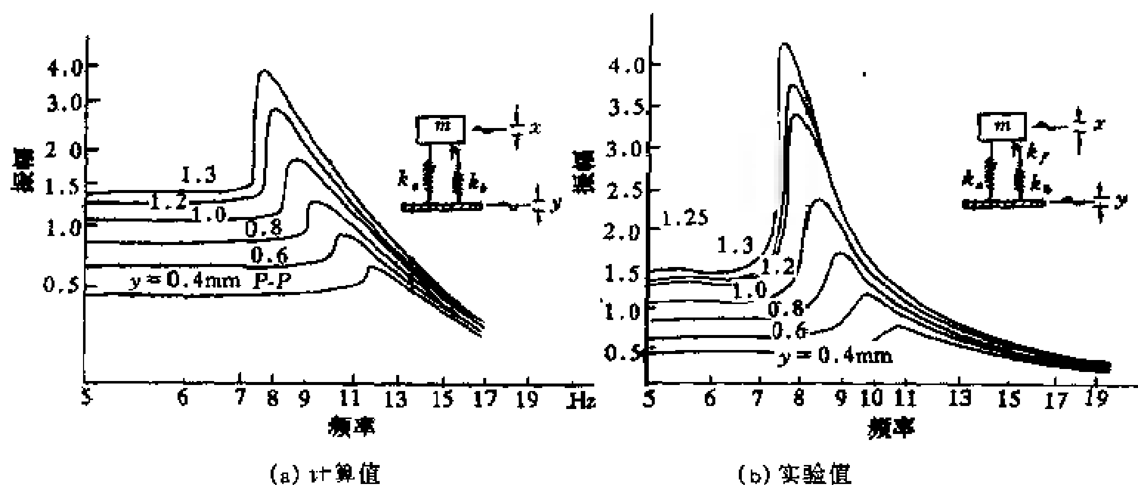
(a) 钢丝绳标准迟滞回线



(b) 具有中心弹性绕组的钢丝绳的迟滞回线

图 15-5 钢丝绳减振器的迟滞回线图

钢丝绳干摩擦减振器是非线性的，其共振频率是随激振频率的提高而降低的。这是因为钢丝绳中的摩擦力滞后于钢丝之间的滑移，形成滞后回线，而回线面积为摩擦力在一周运动中所消耗的能量，是非线性阻尼。回线本身也表示了刚度的非线性，这是一种软化刚度。钢丝绳减振器、螺接悬臂梁等必须用双线性迟滞回线来近似实际上所得的迟滞回线。由于非线性动力系统的复杂性和理论分析的不完善性，钢丝网减振器的动力学设计问题还没有固定的设计模式可循。



(a) 计算值　　(b) 实验值

图 15-6　干摩擦隔振系统的响应

15.2.2 非线性阻尼控制

在振动过程中，阻尼消耗和扩散振动的能量，使瞬态振动迅速衰减，降低受迫振动的振幅，避免自激振动的产生，减少结构传递振动的能力，因此阻尼是控制振动的重要手段。在系统中增加阻尼，可通过多种方法来实现。例如，使用高内阻的材料制造零件；选用阻尼好的结构形式；在机器设备中附加阻尼；增加运动件的相对摩擦；在振动系统中安装阻振器，等等。

非线性阻尼主要是利用控制执行机构产生非线性阻尼力，吸收系统的振动能量，以达到减小振动的目的。在控制力中常常包含有非线性恢复力或非线性阻尼力成分，如果设计得当，可提高减振效果。振动主动阻尼控制是振动主动控制中一个重要分支。根据振动控制的基本理论，提高系统的阻尼，对降低系统的共振响应及缩短自由振动衰减的时间历程有显著效果。采用传统被动控制方法所能实现的阻尼量比较小，如果采用主动控制方法，理论上可

把结构的阻尼提高 1 ～ 3 个数量级，大幅度提高振动控制效果。

1．材料阻尼

从图 15-7 所示的应力 - 应变滞后回线看出，在一个应力循环中，加载期间外界对材料所作的功大于卸载期间材料放出的能量，材料把一部分能量转换为热能而消耗能量。这种在交变力作用下，材料内部分子或金属晶粒间，在运动中相互摩擦，而消耗振动能量的阻尼，称为材料阻尼。根据回线所包围的面积，可比较各种材料阻尼的阻尼特性，面积越大，阻尼越大。

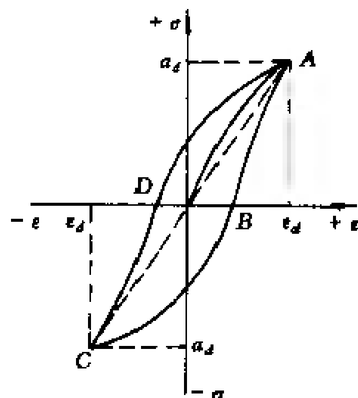


图 15-7　材料应力与应变的滞后回线

2．相对运动阻尼

振动体在相对运动中的库仑摩擦或粘性流体摩擦，使振动的机械能转换为热能而产生的阻尼，称为相对运动阻尼。相对运动消耗的能量，占总阻尼消耗量的 90% 左右，是阻振的主要手段。减小相对运动件的间隙、施加预载荷、降低接触面的光洁度等是常见的提高运动阻尼的方法。

碰撞是另一种相对运动阻尼的形式。例如把松散的金属球体放入振动的机体。松散的颗粒放入镗杆、在非工作的封闭空间中保留砂心或充填物料，这些都将利用它们之间的碰撞而消耗振动的能量，起到非线性阻尼的作用。

充分利用焊、铆、螺纹联接的边界摩擦消耗振动能量是另一途径。调整联接点的数量和预紧力，以及联接面的粗糙度，使其在小振幅时，联接面紧贴在一起，相对运动阻尼为零，在大振幅时，联接面发生滑移而消耗能量。

3．结构阻尼

除材料阻尼和相对运动阻尼外，由振动体扩散、辐射、消耗振动的能量而产生的阻尼，称为结构阻尼。固体结构的零件之间，以及各结构之间、以机械波的方式把振动能量传输出去，是结构阻尼的一部分，属于扩散性阻尼。例如，悬臂梁端部的振动输出到其支承上；齿轮的振动通过轴、轴承输出到齿轮箱体上。当激励是瞬态，而且支承的体积又比振动体大时，振动的能量将扩散出去，因而振动被消减。当滚动轴承从几米的高度落到钢板或石板上，90% 以上的能量将从冲击点扩散出去。

在机械振动中，在结构结合面之间，不产生引起干摩擦的相对运动，由于结合面的有限接触点产生塑性变形，作用在结合面的交变位移具有非线性性质，形成与图 15-7 相似的封闭回线。即在一个振动周期中，输出能量大于输入能量，从而消耗振动能量，这也是结构阻尼的一种形式，又称为结合面阻尼。调整结合面上的预紧力、油膜及表面粗糙度等，这改变结合面的接触状态，可改变结合面阻尼的大小。

4．附加阻尼

附加阻尼是在振动体上附加一层具有高内阻的粘弹性材料，振动时使阻尼材料产生很大变形，消耗振动的能量而不损坏；自由阻尼层也称非约束阻尼层，是在振动体上直接喷涂一层粘弹性材料；多层约束阻尼层是在振动体上附加一薄层或多层刚性材料，当振动体变形时，约束材料中的刚性材料不变形，从而增加阻尼材料的剪切变形，提高其阻尼性能。

15.2.3　吸　振

吸振就是借助于转移振动系统的能量来实现对振动的控制，如动力减振器、摆式吸振器

等。被动吸振在外激励频率变化较大时不再适用，当吸振器质量较小时，其振幅过大。主动式动力吸振器是按一定的规律主动地改变动力吸振器中弹性元件或惯性元件的特性，或者主动地驱动吸振器质量块的一种动力吸振器，因此可克服被动吸振器的缺点。根据工作原理和设计准则的不同，可分为频率可调式动力吸振器和非频率可调式动力吸振器。

1．频率可调式动力吸振器

频率可调式动力吸振器的工作原理是：识别外激励频率与动力吸振器固有频率之差，在线调节动力吸振器的弹性元件上的刚度或惯性元件的质量，使动力吸振器的固有频率始终与外激励的频率一致，即动力吸振器始终处于调谐状态。

2．非频率可调式动力吸振器

在土木工程中研究较多的主动式调谐质量阻尼器(TMD)(图 15-8)的工作原理是：根据传感器测出的受控对象的振动，按照一定的准则设计控制器，将作动器的控制力、作用于质量块的弹性力和阻尼力反作用于受控对象，达到控制受控对象振动的目的。

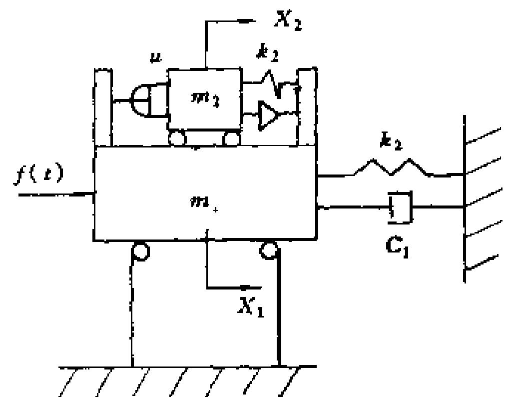


图 15-8　主动式有阻尼力吸振器

15.2.4　非线性消振

消振就是通过减小振源产生的激励能量，来消除系统的过度振动。主动消振是采用主动控制的方法去抵消由振源引起的受控对象的响应，实现受控对象的振动控制。典型的主动控制有直升机振动控制中的高阶谐波控制和高层建筑结构的脉冲控制等。

1．高次谐波振动的控制

直升机的振源主要来自作用于旋翼浆叶上的交变气动载荷。高次谐波振动的控制就是通过适当操纵旋翼系统，使得旋翼浆叶传递给机身的交变载荷尽量小，从而达到减小机身振动的目的。对一个有 N 片浆叶的旋翼系统，激励的主要分量是传递至浆毂的交变力及力矩的 N 次谐波分量。当在直升机的自动倾斜器不动环上施加一个每周 N 次的高阶变距输入，在旋转坐标系中浆叶将获得每周 $N-1$，N 和 $N+1$ 次高阶变距运动。适当地控制浆叶高次谐波输入的幅值及相位，就可以减低浆叶上所产生的 $N-1$，N 和 $N+1$ 次交变载荷谐波分量。

高次谐波振动的控制主要是基于频域控制原理，实现的形式有两种：控制自动倾斜器方式和单片浆叶控制方式。图 15-9 是控制自动倾斜器方式下的控制方框图。其中谐波分析仪用于从测量信号中提取 $N\Omega$ 的谐波分量(Ω 为转速)，可用快速傅立叶变换分析。观测器用于从测量信号中估计某些未测或难测的信号。卡尔曼滤波器用于实时识别，为控制律设计提供必要的信息。限制器用于限制控制器的输出，使驱动器的位移、速度限制在一定范围内。

2．脉冲控制

脉冲控制是一种开关控制。它需检测受控对象所要求减振部位的振动量，当检测值超过某一确定的门限值时，产生的非线性脉冲控制抵消外扰响应，使测试点的响应保持在一定的门限值之内，其特点是不需要对受控对象的所有状态进行估计和检测，且节约能量。

实现上述目标的最简单的控制方案是在选定的位置上安装脉冲发生器，当这些位置的受控对象的速度达到最大时，发出一个与该速度方向相反的非线性脉冲力 p，即

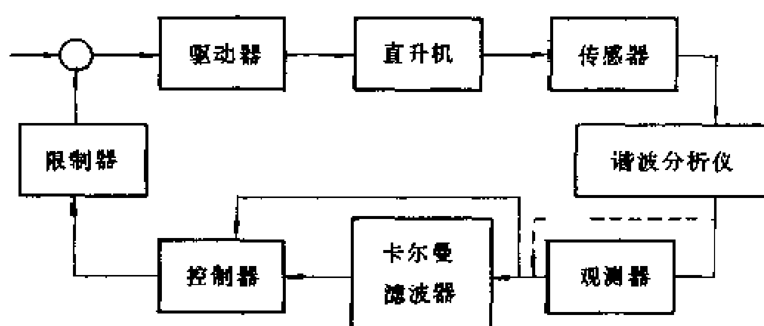


图 15-9　高次谐波振动的控制框图

$$p_i = \begin{cases} -C_i \operatorname{sgn}(v_i)\,|v_i|^{n_i}, & t_i < t \leqslant (t_i + T_{di}) \\ 0, & (t_i + T_{di}) < t < t_{i+1} \end{cases} \tag{15-1}$$

式中　C_i 为比例系数；v_i 为受控对象检测点的速度；n_i 为与速度规律有关的系数；T_{di} 为脉冲持续时间。

15.2.5　非线性冲击隔离

在冲击作用下，机械将以很高的速度产生应力和应变，可能使其工作失效甚至被破坏。为此，采取冲击隔离的措施，以减轻其影响。

1. 冲击隔离原理

冲击隔离的实质是通过冲击隔离器的变形，把急剧输入的能量储存起来，然后，在冲击过后系统的自由振动能量平缓的释放出来，使尖锐的冲击波以缓和的形式作用在设备和设施上，有时还通过隔离器中的阻尼吸收部分能量，以达到保护设备或基础的目的。

冲击隔离分为主动隔离和非主动隔离。主动隔离用来减轻机器本身产生的冲击力对支承、基础及基础周围的设备与建筑的影响，以减小支承或基础的应力或应变，减小通过基础传到周围的冲击波。例如，冲床下面的弹性垫基、火炮中的油缸、就起主动隔离的作用。被动隔离用来减轻外部冲击所引起的基础运动对设备的影响，以减少机器设备中的应力和应变。例如，飞机着陆架中的防冲装置，仪器包装中的弹性材料，就起被动隔离作用。

当被隔离的设备可视为整个刚体时，冲击隔离系统，可简化为单自由度系统，如图 15-10 所示。主动隔离系统的运动方程为

$$m\ddot{\delta} + F(\delta, \dot{\delta}) = F \tag{15-2}$$

被动隔离系统的运动方程为

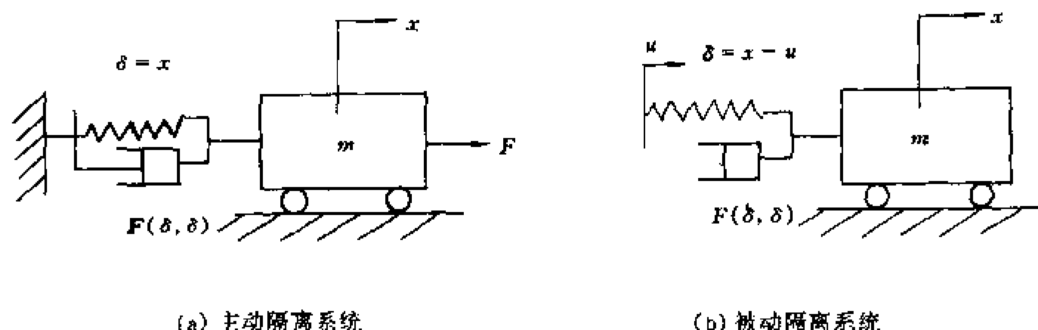
$$m\ddot{\delta} + F(\delta, \dot{\delta}) = -m\ddot{u} \tag{15-3}$$

式中　m 为设备的质量；δ 为隔离器的变形；$F(\delta, \dot{\delta})$ 为隔离器作用在 m 上的力；F 为作用在设备上的冲击力；u 为隔离器左端受到冲击作用产生的绝对位移。由式(15-2) 与(15-3) 看出，两类隔离虽有不同的目的，但具有相同的数学表达式。

无阻尼单自由度系统受速度阶跃激励时，若弹性元件的力学特性为 $F = F_s(\delta)$，δ 为质量 m 与基点之间的相对变形，则当弹性元件达到最大变形 δ_m 时，它所贮存的变形能为

$$W = \int_0^{\delta_m} F_s(\delta)\mathrm{d}\delta = \frac{1}{2} m \dot{u}_m^2 \tag{15-4}$$

当被隔离的设备中具有弹性不可忽略的非线性元件时，冲击隔离系统应简化为二自由度



(a) 主动隔离系统　　　(b) 被动隔离系统

图 15-10　单自由度冲击隔离系统

或多自由度系统。图 15-11 为适用于两类隔离系统的二自由度系统，对主动隔离系统，$u=0$，F 为设备 m_2 产生的冲击力，$F_2(\delta_2,\dot\delta_2)$ 为隔离器的特性，m_1 为支承的质量，$F_1(\delta_1,\dot\delta_1)$ 为非线性弹性支承的特性。对被动隔离系统，$F=0$，u 为外部冲击引起的基点振动位移，$F_1(\delta_1,\dot\delta_1)$ 为隔离器的特性，m_1 为设备的质量，m_2 为设备中弹性元件的质量，$F_2(\delta_2,\dot\delta_2)$ 为非线性弹性元件的特性。

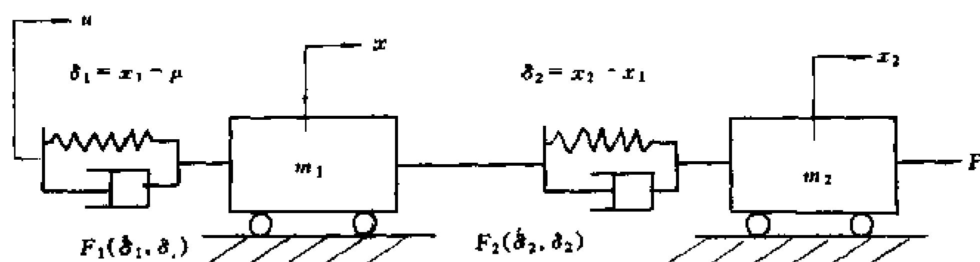


图 15-11　二自由度冲击隔离系统

2．非线性硬弹簧隔离器的特性

硬特性弹簧变形的恢复力可表示为

$$F_s(\delta) = \frac{2kd}{\pi}\tan\frac{\pi\delta}{2d} \tag{15-5}$$

式中　k 是变形曲线(图 15-12(a))起始点的斜率；$\delta=d$ 的垂线是曲线的渐近线。由 $\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$ 和 $m\ddot{x}_m=F_s(\delta_m)$，从上式可得最大加速度和最大位移的关系为

$$\frac{\ddot{x}_m}{\omega_n^2 d} = \frac{2}{\pi}\tan\frac{\pi\delta_m}{2d} \tag{15-6}$$

式中　ω_n 是线性系统的固有频率，对于小振幅(小的 δ_m)的非线性系统具有相同的意义。对于大振幅的非线性系统，ω_n 随 δ_m 变化而变化。把式(15-5)代入式(15-4)，得速度增量与最大位移的关系为

$$\frac{u_m^2}{\omega_n^2 d^2} = \frac{8}{\pi}\ln\left(\sec\frac{\pi\delta_m}{2d}\right) \tag{15-7}$$

式(15-6)与上式相比，得

$$\frac{\ddot{x}_m}{u_m^2} = \frac{\frac{\pi\delta_m}{d}\tan\left(\frac{\pi\delta_m}{d}\right)}{4\ln\left(\sec\frac{\pi\delta_m}{2d}\right)} \tag{15-8}$$

根据上面两式画出图15-12(b)和图15-12(c)。表示了 $\dot{u}_m$, $\ddot{x}_m$ 和 δ_m 三个主要变量与系统参数 ω_n, d 之间的关系。

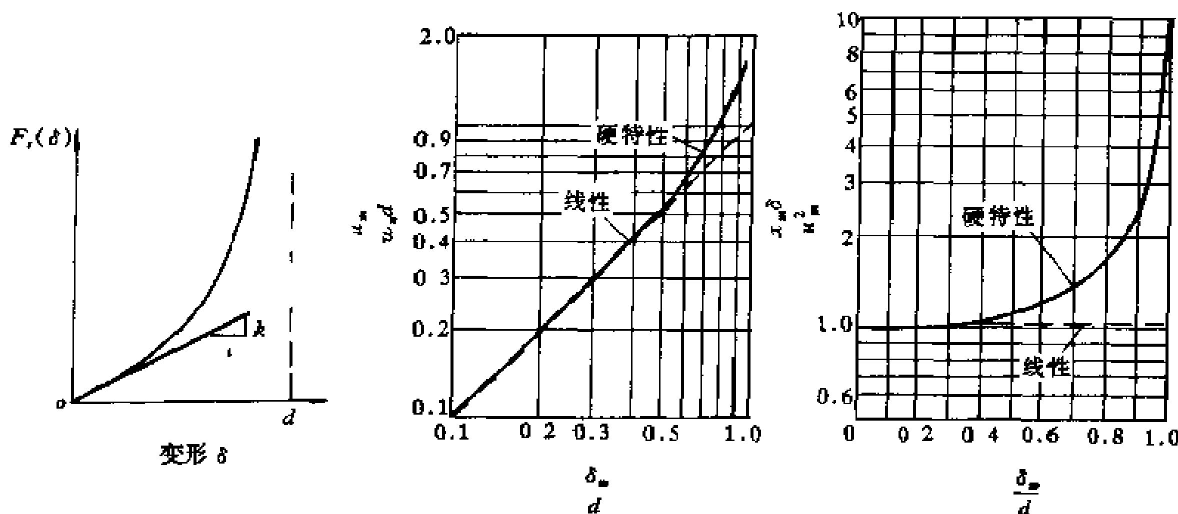


图15-12　硬特性弹簧隔离系统

3. 非线性软弹簧隔离器的特性

软特性弹簧变形的恢复力为

$$F_s(\delta) = kd_1\tanh\frac{\delta}{d_1} \tag{15-9}$$

式中　k 是图15-13(a)曲线起始点的斜率，从图中可以看出 d_1 的意义。令 $F_s(\delta) = m\ddot{x}_m$，$\delta = \delta_m$，$k = m\omega_n^2$，则上式变为

$$\frac{\ddot{x}_m}{\omega_n^2 d_1} = \tanh\frac{\delta_m}{d_1} \tag{15-10}$$

式中　δ_m 和 $\ddot{x}_m$ 分别是最大变形的最大加速度值。ω_n 和 δ_m 为小值的系统固有频率，把(15-9)式代入(15-4)，得 $\dot{u}_m$ 和 δ_m 的关系为

$$\frac{\dot{u}_m^2}{\omega_n^2 d_1^2} = \ln\left(\cosh^2\frac{\delta_m}{d_1}\right) \tag{15-11}$$

式(15-10)与上式相比，得

$$\frac{\ddot{x}_m\delta_m}{\dot{u}_m^2} = \frac{\frac{\delta_m}{d_1}\tanh\frac{\delta_m}{d_1}}{\ln\left(\cosh^2\frac{\delta_m}{d_1}\right)} \tag{15-12}$$

根据式(15-10)和式(15-11)画出图(15-13(b))和图(15-13(c))。

15.2.6　变支承刚度控制

变支承刚度主动控制实际上是一种非线性主动控制方法，它是通过主动控制力给系统引入附加的刚度，即根据振动信息来改变系统的刚度，从而达到增大系统的稳定区域，降低系统的不平衡响应之目的。变刚度方法种类很多，且具有控制规律简单，对被控系统状态监测要求低，测量少，测试简单等优点，因此广泛应用于转子系统振动的主动控制

1. 挤压油膜变刚度支承

在各类轴承中，流体静压轴承有着独特性质，如油膜刚度高，承载能力提高，且不依赖于

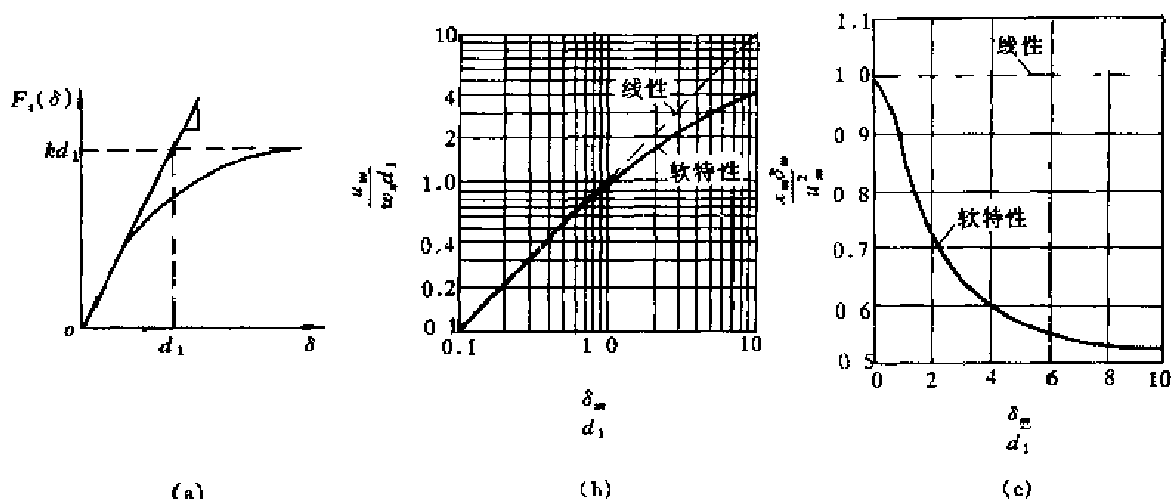


图 15-13　软特性弹簧隔离系统

滑动速度，具有很低的滑动摩擦系数。国外研究了可调油压的静压油膜阻尼器，通过调节油压来控制或抑制转子——轴承系统的振动，这种阻尼器结构上分为两种形式，一种是弧形凹槽，另一种是矩形凹槽。在这种阻尼器中，每个凹槽平台在垂直(法线)方向提供总刚度和阻尼系数的分量，轴承刚度矩阵和阻尼矩阵像应力和质量惯性矩一样是二阶张量，利用这一性质，求得刚度矩阵和阻尼矩阵，通过坐标变换，获得共同坐标下的总矩阵。

研究表明，各个平台刚度系数 k_p 和阻尼系数 C_p 是以下几个因素的函数，如平台几何尺寸、供油管道调整系数、平台静载荷、供油压力和润滑粘度。因此，通过调整供油压和，可以达到调节支承刚度和阻尼的目的。

2. 形状记忆合金变刚度支承

国外研究了利用 NiTi 合金在马氏体温度转变点的记忆能力，以及其弹性模量在 A_f 转变点前后变化达 25 倍的性能，通过加热和冷却，使此种记忆金属记忆其初始形状，产生所需的较大的恢复力，从而改变其所支承的转子系统的临界转速，对挠性转子通过临界转速时的振动进行主动控制。实验表明，在变刚度支承的主动控制下，转子能以较低的振幅通过临界转速，而不产生共振。

3. 其他几种变刚度支承。

除上述两种变刚度支承外，有人还研究了利用气体压缩时的弹性模量变化的性能，设计变刚度支承，进行转子系统过临界转速的振动主动控制；还研究了利用电磁力，设计电磁支承，进行转子——轴承系统振动主动控制。

15.3　非线性振动主动控制的控制策略

一般的非线性控制系统由三部分组成：被控对象、测量装置与执行机构。如图 15-14 所示。设 ξ, η 和 ζ 分别为对象、测量装置与执行机构的 n_1, n_2 和 n_3 维状态向量；u 是 m 维控制向量。这样，系统的这三部分的动力学方程可表示为

$$\dot{\xi} = f_1(\xi, \zeta, t) \tag{15-13}$$

$$\dot{\eta} = f_2(\eta, \xi, \zeta, t) \tag{15-14}$$

$$\dot{\zeta} = f_3(\zeta, \xi, \eta, u, t) \tag{15-15}$$

其中 f_1、f_2 和 f_3 分别为 n_1、n_2 与 n_3 维向量函数；如无内反馈，则 f_3 中不出现 ξ 与 η。

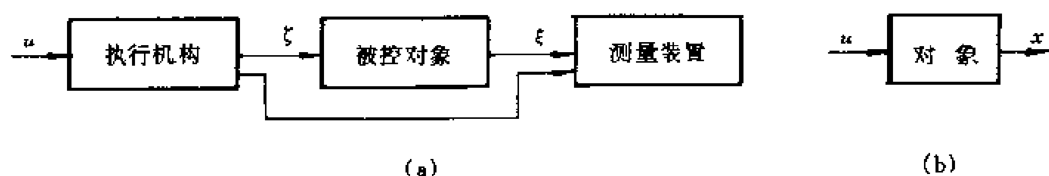


图 15-14 非线性系统控制框图

将以上三式合并，并引入 $n = n_1 + n_2 + n_3$ 维向量 x，便可求得开路系统的非线性动力学方程：

$$x = f(x, u, t) \tag{15-16}$$

式中 $x = [\eta^T, \xi^T, \zeta^T]^T$；$f = [f_1^T, f_2^T, f_3^T]^T$。这时系统的框图由 15-14(b) 所示。

一般在研究控制系统时，从所研究的问题的性质及要求出发，有时我们所关心的不是整个状态变量，而是它的部分状态或状态的某种向量函数 $g(x, t)$。这些由状态变量构成的向量称为系统的输出向量 y，如果是一 l 维向量，那末系统的方程可表示为

$$x = f(x, u, t),\ y = g(x, t) \tag{15-17}$$

系统的框图如图 15-15 所示。系统的动力学方程中既包含了被控对象的动力学，也包含了测量装置和执行机构的动力学。

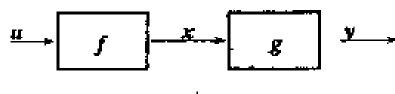


图 15-15 系统框图

对定常情况有

$$\begin{aligned} x &= f(x, u) \\ y &= g(x) \end{aligned} \tag{15-18}$$

若选择状态变量使得当控制 $u = 0$，$x = 0$ 是系统的平衡状态，则得到关系式

$$f(0, 0) = 0$$

将系统(15-18)在其平衡状态 $x = 0$ 的附近展成泰勒级数，记

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\u=0}},\ B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=0\\u=0}},\ C = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x=0},$$

即

$$A = (a_{ij}),\ a_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{\substack{x=0\\u=0}} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

$$B = (b_{ij}),\ b_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right|_{\substack{x=0\\u=0}} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)(j = 1, 2, \cdots, m),$$

$$C = (c_{ij}),\ c_{ij} = \left.\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right|_{x=0} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)(j = 1, 2, \cdots, l)$$

便得到非线性系统的线性化方程

$$\begin{aligned} x &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{15-19}$$

这正是现代控制理论中广泛使用的卡尔曼线性模型。

最常见的非线性系统的基本模型,即为只有一个非线性控制的系统,其动力学方程可表示为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bf(u) \\ \dot{y} &= Cx \end{aligned} \tag{15-20}$$

式中 $f(u)$ 是标量非线性函数,它表示控制中的非线性特性。此系统也称为"鲁里叶系统"。

系统中含有多个非线性系统时

$$\begin{aligned} x &= Ax + Bf(u) \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{15-21}$$

式中 B 是 $n \times m$ 阵,$f(u)$ 是 m 维的,系统有 m 个非线性控制。

15.3.1 非线性系统的反馈控制

研究非线性控制系统(15-21),设给定的指令函数为 l 维向量函数 $Y(t)$,我们希望寻求控制 u,使偏差向量

$$e(t) = y(t) - Y(t)$$

满足要求:

(1) 当 $t \to \infty$ 时,$e(t) \to 0$,即系统具有稳定性;

(2)$e(t) \to 0$,系统的动态过程具有优良品质。

这一控制要求,通常采用反馈控制策略来实现。反馈控制是将反馈信号经控制器"改造"后又返回到系统的输入端,形成一个闭环系统。在反馈控制中,u 是输出的线性函数

$$u = Ky$$

其中 K 为 $m \times l$ 维反馈阵,或非线性函数

$$u = h(y)$$

其中 $h(y) = [h_1(y), \cdots, h_m(y)]^T$ 是 m 维非线性向量函数。

按控制量的不同,通常又将反馈控制分为输出反馈控制(部分状态反馈控制)和状态反馈控制。

1) 输出反馈控制(部分状态反馈控制)

部分状态反馈控制是利用输出量作反馈信号,控制 u 是输出 y 的函数(线性或非线性的):

$$u = Ky, u = h(y)$$

通常输出量是能全部得到的,这时它等于测量值。

2) 状态反馈控制

状态反馈控制是用状态变量作为反馈信号,控制 u 是输出 y 的函数(线性的或非线性的):

$$u = Kx, u = h(x)$$

显然,状态反馈是输出反馈的特殊情况,当 $C = I$(单位阵)时,输出向量即状态向量 $y = Cx = Ix = x$。这类反馈控制要求全部状态变量信息,但在实际中对高阶系统难以满足。

考虑最简单的非线性系统(含单非线性系统)

$$\dot{x} = Ax + bf(u)$$
$$y = Cx \tag{15-22}$$
$$u = -k^T y$$

其框图如图 15-16 所示。

除了上述输出反馈系统外，若系统的阶次不高，状态是可以测量的，应用状态反馈 $u = -k^T x$ 作为控制规律，就可以得到下列(15-23)所表示的非线性状态反馈系统，如图 15-17。对于式(15-22)，这时 $C=I$。

$$\dot{x} = Ax + Bf(u)$$
$$u = -k^T x \tag{15-23}$$

反馈控制具有无比的优越性，是几乎所有控制系统采用的基本控制原理。反馈控制的特点是：对外界各种干扰和输入都具有一定程度的较宽的自适应性；对系统中的参数波动也有一定程度的自适应性，保证闭环特性对参数变化的敏感性降低。另外，对系统出现的

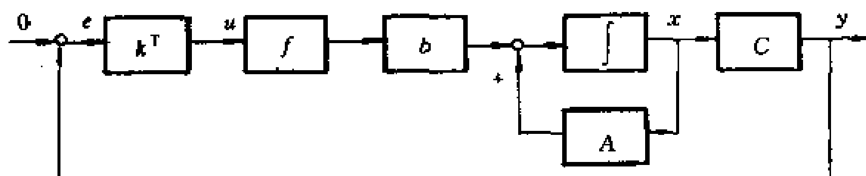


图 15-16 非线性输出反馈控制结构图

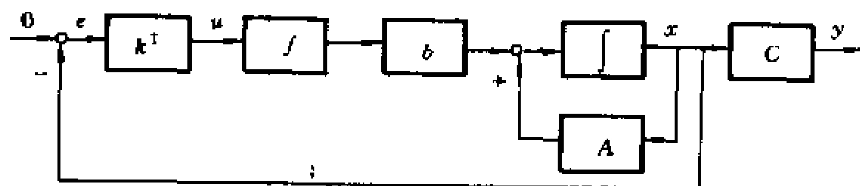


图 15-17 非线性状态反馈控制结构图

非线性偏离也存在一定的限制。

15.3.2 极点配置控制

振动的主动控制可以通过控制结构参数来达到控制的目的，改变结构的质量、刚度和阻尼等参数，其实质是改变振动系统的特征值。由于极点(也即系统特征方程根)反映系统的固有频率与阻尼特性，因此，极点配置控制的基本思想是通过选择合适的反馈矩阵，改变极点的位置达到变动系统特征值，从而使系统处于稳定状态，反馈矩阵的引入，实质上就是给系统提供了附加刚度和阻尼。若控制了系统极点的位置也就在很大程度上控制了系统的动态稳定性和动力响应，这类设计方法不仅可适用于单输入控制和多输入控制系统，也可适用于状态反馈和部分状态反馈。

对非线性系统的线性化方程(15-19)，若为单输入时不变系统，即

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ Y = CX \end{cases} \tag{15-24}$$

如果系统完全能控能观，则采用完全状态反馈 $u = -\boldsymbol{FX}$ 可达到任意极点完全配置，对上式取拉氏变换可得

$$\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{G}(s)u(s) \tag{15-25}$$

式中　开环传递函数列阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 可写成

$$\bar{\boldsymbol{G}}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} = \bar{\boldsymbol{g}}(s)/d(s) \tag{15-26}$$

若令 $u = u_c - \boldsymbol{FX}$，则闭环系统方程可表示为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BF})\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}u_c \\ \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{CX} \end{cases} \tag{15-27}$$

对上式取拉氏变换可得

$$\boldsymbol{X}(s) = \bar{\boldsymbol{G}}_c(s)u_c(s) \tag{15-28}$$

式中　闭环系统传递函数列阵 $\bar{\boldsymbol{G}}_c(s)$ 可写成

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}_c(s) &= (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BF})^{-1}\boldsymbol{B} \\ &= \frac{\bar{\boldsymbol{g}}_c(s)}{d_c(s)} = \frac{\bar{\boldsymbol{g}}_c(s)}{d(s) + \boldsymbol{F}\bar{\boldsymbol{g}}(s)} \end{aligned} \tag{15-29}$$

比较 $\boldsymbol{G}(s)$ 与 $\bar{\boldsymbol{G}}_c(s)$ 可知：经状态反馈控制后，系统传递函数的零点不变；开环系统特征多项式 $d(s)$ 与闭环系统特征多项式 $d_c(s)$ 的关系由下列极点配置方程确定

$$d_c(s) = d(s) + \boldsymbol{F}\bar{\boldsymbol{g}}(s) \tag{15-30}$$

比较等式两边 s 同幂次的系数，可得 n 个关于行阵 $\boldsymbol{F}$ 元素的线性方程，在要求的极点分布确定以后，上式除 $\boldsymbol{F}$ 外都是已知的，因此可惟一地解出状态反馈阵 $\boldsymbol{F}$。

如果采用输出反馈控制，$u = -\boldsymbol{F}_Y\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{F}_Y$ 为 m 维行向量(行阵)。由(15-24)可得

$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{G}(s)u(s) \tag{15-31}$$

式中　输出反馈情况下的开环传递函数列阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 可写成

$$\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{g}(s)}{d(s)} \tag{15-32}$$

若令　$u = u_c - \boldsymbol{F}_Y\boldsymbol{Y}$

$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{G}_c(s)u_c(s) \tag{15-33}$$

式中　输出反馈情况下的闭环传递函数列阵 $\boldsymbol{G}_c(s)$ 可写成

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}_c(s) &= \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BF}_Y\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{B} \\ &= \frac{\boldsymbol{g}_c(s)}{d_c(s)} = \frac{\boldsymbol{g}(s)}{d(s) + \boldsymbol{F}_Y\boldsymbol{g}(s)} \end{aligned} \tag{15-34}$$

因而可得输出反馈控制情况下的极点配置方程：

$$d_c(s) = d(s) + \boldsymbol{F}_Y\boldsymbol{g}(s) \tag{15-35}$$

若输出数等于状态数，即 $m = n$，$\boldsymbol{F}_Y$ 的 m 个元素可惟一确定。

若输出数少于状态数，即 $m < n$，未知数有 m 个而方程有 n 个，要有惟一解必须满足 $n - m$ 个相容条件；或找出按一定误差条件极小的解，这时不能达到完全的极点配置。

对多输入系统控制，在状态反馈控制情况下，其闭环系统极点完全可配置的条件仍与单输入系统相同，所不同者在于满足极点配置要求的状态反馈矩阵不惟一，这样，就能较灵活地设计性能更好的控制器，即不仅满足极点分布要求，而且还能满足其他性能要求(如特征向量配置，零点等)。

15.3.3 最优控制

最优控制即是满足一定最优条件的反馈控制，它是基于现代控制理论中的二次最优化原理，通过选取适当的目标函数，解出最优控制力。从理论上讲，最优控制是一种最理想的控制方案，它同时考虑了所有的受控模态，在控制力所能达到的范围内使系统的响应最小。

设系统状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u + d(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ y = C(t)x \end{cases} \tag{15-36}$$

式中 x, u, y 和 $d(t)$ 分别为 n, m, l 和 n 维矢量，且都是时间 t 的函数；$A(t)$ 和 $B(t)$ 为时变数矩阵；$d(t)$ 为确定性干扰。

最优控制就是寻求一个满足约束条件的控制矢量 u 使如下的目标函数 J 达到极小：

$$\begin{aligned} J = & \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\{[y - \beta(t)]^T Q_0(t)[y - \beta(t)] \\ & + u^T R(t)u\}dt + \frac{1}{2}[y(t_f) - \alpha]^T S_0[y(t_f) - \alpha] \\ = & \int_0^{t_f} F(x, u, t)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{15-37}$$

式中 S_0，$Q_0(t)$ 和 $R(t)$ 为权矩阵；α 为预定的稳态响应；$\beta(t)$ 为希望的响应；t_0 为控制的开始时刻；t_f 为控制的终止时刻。

目标函数 J 兼顾了响应与控制两方面的要求，但这两方面又是矛盾的。因此，几个权矩阵的取值就反映了人们对相互矛盾的两方面要求的重视程度，即如要使施加的控制小，就将 $R(t)$ 相对地取得较大；如要使系统响应很快地与希望的值接近，则将 $Q_0(t)$ 和 S_0 相对地取得较大。

最优控制规律通常取决于初始状态或初始输出、希望的状态或希望的输出、约束的性质、性能指标的性质等。因此在一种性能指标下的最优控制对另一种性能指标来说，它不一定是最优的。性能指标的形式决定了最优控制的形式和复杂程度，它直接影响到实际系统中实现最优控制的可能性。二次性能指标具有较大的优点，它在数学上处理较为简便，应用最优控制理论可以得到满足这种性能指标的最优控制的解析表达式。而最优解的必要条件可通过哈密顿函数的极值条件得出。

引入哈密顿函数

$$H(x, u, \lambda, t) = F(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t) \tag{15-38}$$

根据最优原理

$$\min[H(x, u, \lambda, t)] = 0 \tag{15-39}$$

则有

$$\frac{\partial H}{\partial u} = R^T u + B^T\lambda = 0 \tag{15-40}$$

由此可求得系统的最优控制

$$u^* = -R^{-1}B^T\lambda \tag{15-41}$$

λ 可通过伴随方程 $\dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}$ 及相应的黎卡提方程求解。

15.3.4　自适应控制

在实际振动主动控制中，被控对象往往具有变结构、时变性以及各种不确定性等特点，难以建立起有效的数学模型，而自适应控制策略却为解决这类难题提供了有力的工具。

振动的自适应控制方法很多，这里介绍两种符合振动控制特点，而又行之有效的基于超稳定性的振动自适应控制方法和随机自适应控制方法。

1. 基于超稳定性的振动自适应控制方法

图 15-18 为其控制系统简图。它是根据受控对象振动控制的特点，既要求闭环系统保证稳定，又具有输出渐近调节性，这样可省略参考模型这个环节，为避免构造满足波波夫不等式的反馈环节的困难，采用符号参考模型和符号跟随器，使系统中的线性部分易于实现严格正实，因而波波夫超稳定性理论容易得到满足，从而保证系统的渐进调节性。这种方法不仅适用于单输入单输出情况，也适用于多输入多输出的情况。

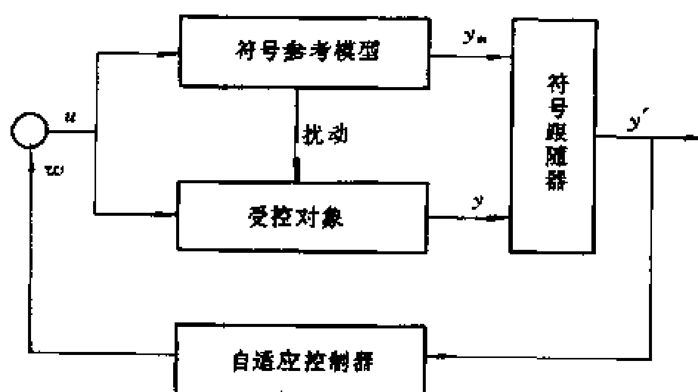


图 15-18　自适应控制简图

对单输入单输出情况，若受控对象的时域离散数学模型为

$$\begin{cases} X_p(k+1) = F_p X_p(k) + G_p u(k) \\ y_p(k) = C_p X_p(k) + D_p u(k) \end{cases} \tag{15-42}$$

符号参数模型为

$$\begin{cases} X_m(k+1) = F_m X_m(k) + G_m u(k) \\ Y_m(k) = C_m X_m(k) + D_m u(k) \end{cases} \tag{15-43}$$

符号跟随器的作用为

$$y'_p(k) = \left|\frac{y_p(k)}{y_m(k)}\right| y_m(k) = \alpha(k) y_m(k) \tag{15-44}$$

式中　$y'_p(k)$ 为符号跟随器的输出，$\alpha(k) = \left|\dfrac{y(k)}{y_m(k)}\right|$。

可证明，如果

i　符号参数模型严格正实

ii　$0 < \alpha(k+1) \leqslant \alpha(k)$

iii　自适应控制律为

$$\begin{cases} u(k) = -w(k) \\ u(k) = [k_I(k) + k_p(k)]y'_p(k) \\ K_I(k+1) \quad K_I(k) + \beta_I y'^2_p(k) \\ K_P(k) - \beta_I y'_p{}^2(k) \end{cases} \tag{15-45}$$

则整个闭环系统渐近稳定，

式中 $K_1(k), K_P(k)$ 为第 k 采样周期的积分增益和比例增益，$K_1(0) > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$。

对于输入与输出数均等于 r 的受控对象，其输入 $U(k)$ 与输出 $Y(k)$ 有如下关系：

$$\boldsymbol{Y}(k) = \boldsymbol{H}(z)\boldsymbol{U}(k) \tag{15-46}$$

式中 $\boldsymbol{Y}(k) = [y_1(k)y_2(k)\cdots y_r(k)]^T$, $\boldsymbol{U}(k) = [u_1(k)u_2(k)\cdots u_r(k)]^T$, $\boldsymbol{H}(z)$ 为传递函数矩阵

$$\boldsymbol{H}(z) = \begin{bmatrix} H_{11}(z) & H_{12}(z) & \cdots & H_{1r}(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{r1}(z) & H_{r2}(z) & \cdots & H_{rr}(z) \end{bmatrix}。$$

将式(15-33)分解成 r 个子系统，则

$$\begin{aligned} y_i(k) &= \sum_{j=1}^{r} H_{ij}(z)u_j(k) \\ &= H_{ii}(z)u_i(k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} H_{ij}(z)u_j(k) \quad i = 1,2,\cdots,r \end{aligned} \tag{15-47}$$

即

$$\begin{cases} y_i = H_{ii}(k)u_j(k) + d_i \\ d_i = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} H_{ij}(z)u_j(k) \end{cases} \quad i = 1,2,\cdots,r \tag{15-48}$$

可以看出：对第 i 个子系统来说，仅在输出之前有输出扰动 d_i，根据单输入单输出情况的结论，只要符号参数模型严格正实，且 $0 < \alpha(k+1) \leqslant \alpha(k)$，则第 i 个子系统是渐近稳定的，这样就实现了离散型自适应振动控制。

2. 随机自适应控制

随机自适应控制系统是针对受随机干扰的未知过程的控制。若在振动控制中表现出的过程动态发生漂移，且这种漂移使一个定常的控制器不再适应，则随机自适应控制系统可以解决这类问题。随机自适应控制问题可以看成为非线性随机控制的一种特例。

设振动系统的运动微分方程式为

$$\boldsymbol{X}(k+1) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{X}(k), \boldsymbol{u}(k), \boldsymbol{\theta}(k), \boldsymbol{W}(k), k] \quad k = 0,1,\cdots,N-1 \tag{15-49}$$

式中 $\boldsymbol{X}(k)$ 为 n 维状态矢量；$\boldsymbol{u}(k)$ 为 m 维控制矢量；$\boldsymbol{\theta}(k)$ 为 P 维参数矢量；$\boldsymbol{W}(k)$ 为 n 维随机扰动矢量；$f[\cdots]$ 为矢量的泛函，假定其形式为已知。

观测方程：

$$\boldsymbol{Y}(k) = \boldsymbol{H}[\boldsymbol{X}(k), \boldsymbol{V}(k), k] \quad k = 1,2,\cdots,N \tag{15-50}$$

式中 $\boldsymbol{Y}(k)$ 和 $\boldsymbol{V}(k)$ 分别为 r 维输出矢量和量测噪声矢量；$\boldsymbol{H}[\cdots]$ 为矢量的泛函，其函数形式已知。

假定随机矢量 $\boldsymbol{X}(0)$, $\boldsymbol{W}(k)_{K=1}^{N-1}$, $\boldsymbol{V}(k)_{K=1}^{N}$ 的特性已知。目标函数为

$$J = E\left\{\sum_{k=0}^{N} C[X(k), u(k), k]\right\} \tag{15-51}$$

其中　$C[X(k), u(k), k]$ 表示 k 级的代价，$k = 0, 1, \cdots, N$。要找到一个最优序列 $u(0)$，$u(1), \cdots, u(N-1)$，使得在满足上述系统方程和约束条件下，目标函数达到最小。与一般随机控制不同之处是被控系统状态方程中还存在一个未知参数矢量 $\theta(k)$，而且扰动和噪声的统计特性也可能未知。

处理这类控制问题主要方法是用一个带有可调参数的模型去跟随过程动态的变化，模型参数用在线识别来获得，然后将参数的估计值作为真正的参数值来计算控制动作。设计控制系统时往往按参数已知的确定性情形来处理，只是执行时将参数用估计值代替。

15.3.5　H_∞ 主动控制方法

H_∞ 控制方法是一种基于鲁棒控制的优化控制方法。它以传递函数的 H_∞ 范数作为设计指标。各种 H_∞ 控制问题都可化成图 15-19 所示的标准问题。

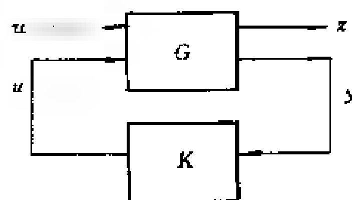


图 15-19　H_∞ 控制标准框图

图中 $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 均为矢量值信号：

w 是 l 维外部输入信号，一般包括指令（参考）信号，干扰和传感器噪声。

z 是 p 维受控输出，通常包括跟踪误差，调节误差，执行机构输出。

u 是 n 维控制信号，同时也是控制器输出；

y 是 m 维量测输出。

图 15-19 中 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 分别表示广义受控装置和控制器。前者是系统的给定部分，而控制器 $\boldsymbol{K}$ 有待设计。假定 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 为线性时不变系统的频率或描述，并假设传递函数矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 和 $\boldsymbol{K}(s)$ 是真实有理函数矩阵。

按 $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的维数将 $\boldsymbol{G}$ 分块成

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{11} & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22} \end{bmatrix} \tag{15-52}$$

图 15-19 代表如下代数方程：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z} &= \boldsymbol{G}_{11}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{G}_{12}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{G}_{21}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{G}_{22}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{K}\boldsymbol{y} \end{aligned} \tag{15-53}$$

如果 $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}_{22}\boldsymbol{K})$ 是可逆的真实有理矩阵，则

$$\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{G}_{11} + \boldsymbol{G}_{12}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}_{22}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{G}_{21})\boldsymbol{w} \tag{15-54}$$

由 $\boldsymbol{w}$ 到 $\boldsymbol{z}$ 的传递函数矩阵 $\boldsymbol{T}_{zw}$ 为

$$\boldsymbol{T}_{zw} = \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{K}) = \boldsymbol{G}_{11} + \boldsymbol{G}_{12}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}_{22}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{G}_{21} \tag{15-55}$$

H_∞ 控制的标准模式是：求一真实有理的 $\boldsymbol{K}$，使 $\boldsymbol{G}$ 稳定，并使传递函数矩阵 $\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{K})$ 的 H_∞ 范数极小，即

$$\min_{\boldsymbol{K}\text{使}\boldsymbol{G}\text{稳定}} \|\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{K})\|_\infty \tag{15-56}$$

或者表述为：求所有真实有理 $\boldsymbol{K}$，使 $\boldsymbol{G}$ 稳定，且使

$$\|\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{K})\|_\infty < \gamma, \quad 0 < \gamma \in R \tag{15-57}$$

前者称为 H_∞ 最优控制问题，后者称为 H_∞ 次优控制问题。

设因模型不确定造成的摄动为 ΔG，它是有界的，即

$$|\Delta G(i\omega)| \leqslant |R(i\omega)| \quad (0 < \omega \leqslant \infty) \tag{15-58}$$

R 为一圆函数，且 $R \in RH_\infty$，则受控系统将是内部稳定的，如果有关的 H_∞ 范数

$$\| RK'(I - GK')^{-1} \|_\infty < 1 \tag{15-59}$$

这是控制器 K 具有鲁棒稳定性的充分条件。

其中
$$K' = [0 \mid K]$$

按照上述 H_∞ 控制的概念来设计控制器，即控制器应能使系统稳定，应具有必要的鲁棒稳定性，在这两个前提下，对不平衡的灵敏度函数的 H_∞ 范数尽可能小。

15.3.6　神经网络自适应控制

非线性振动系统的主动控制也可借助于智能工程的理论来解决。由于神经网络对非线性函数有很强的映射能力，能够充分逼近任意复杂的非线性系统，学习与适应严重不确定性系统的动态特性，具有高度并行性、适应性、智能性、鲁棒性与容错性，因而在解决高度非线性和严重不确定性系统的控制方面具有巨大的潜力。

1. 神经网络控制器

在控制领域中目前应用最为广泛较为成功的是 BP 网络。BP 网络是误差反向传播的多层前馈式网络，它由一个输入层、一个或多个隐层以及一个输出层组成，可以逼近任意复杂的非线性关系。下面用三层 BP 神经网络模型作为控制器 $NNC_{n,m,1}$，如图 15-20 所示，其中，输入层有 $n(=2p+2)$ 个神经元，输出层为 1 个神经元，隐层单元个数 m 可以任选，一般取 $m=n$。

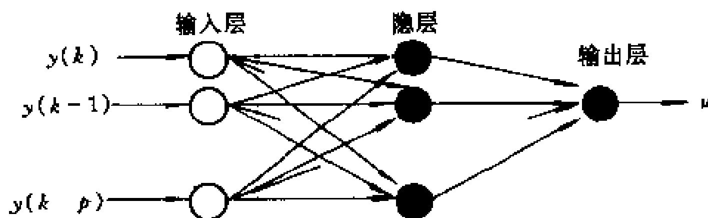


图 15-20　神经网络控制器

神经网络控制器的数学表达式为

$$u = \sum_{i=1}^{m} v_i f(s_i) \tag{15-60}$$

其中
$$f(s_i) = \frac{1}{1+\exp(-s_i)}, \quad s_i = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} X_j + \tau_i$$

$$X_j = \begin{cases} y(k+1-j), & 1 \leqslant j \leqslant n \\ u(k+2p+2-j), & n \leqslant j \leqslant q \end{cases}$$

式中 X_j，u 分别为神经网络的输入输出，w_{ij} 为输入层第 j 个神经元到隐层第 i 个神经元的连接权重，v_i 为隐层第 i 个神经元到输出层神经元的连接权重，τ_i 为隐层第 i 个神经元的阈值，$f(\cdot)$ 为作用在隐层神经元的激励函数。

由式(15-60)可知，神经网络控制器自适应调节参数集为神经元间连接权重与隐层神经元阈值，即

$$\theta = \{w_{ij}, v_i, \tau_i, i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, n\} \in R^s (s = mn + 2m) \tag{15-61}$$

控制器输出 u 对各参数的梯度为

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \left\{\left[\frac{\partial u}{\partial w_{ij}}\right], \left[\frac{\partial u}{\partial v_i}\right], \left[\frac{\partial u}{\partial \tau_i}\right]\right\} \tag{15-62}$$

式中　$i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$

$$\frac{\partial u}{\partial v_i} = f(s_i)$$

$$\frac{\partial u}{\partial w_{ij}} = v_i f(s_i)[1 - f(s_i)]X_j$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau_i} = -v_i f(s_i)[1 - f(s_i)]$$

2. 控制系统模型与结构

考虑一具有非线性阻尼与非线性刚度的单自由度振动系统，其 NARMAX 模型为

$$y(k+1) = f[y(k), y(k-1)] + \beta[u(k) + v(k)] \tag{15-63}$$

式中　$y(k), u(k)$ 分别为系统的输出响应与控制输入，$f(\cdot) \in R$ 为非线性函数；$v(k)$ 为系统的外界干扰，为式(15-63)所描述动态系统的输出，$h(\cdot) \in R$ 为非线性函数。

$$v(k) = h[v(k-1), v(k-2), \cdots, v(k-p)] \tag{15-64}$$

对系统(15-63)，(15-64)作如下假设：

A_1：$f(\cdot), h(\cdot)$ 未知；

A_2：$\beta(\approx T^2$，T 为采样间隔) 已知；

A_3：动态干扰系统的阶次 p 已知。

由(15-63)可得

$$\left.\begin{aligned} v(k-1) &= \{y(k) - f[y(k-1), y(k-2)]\}/\beta - u(k-1) \\ v(k-2) &= \{y(k-1) - f[y(k-2), y(k-3)]\}/\beta - u(k-2) \\ &\vdots \\ v(k-p) &= \{y(k-p+1) - f[y(k-p), y(k-p-1)]\}/\beta - u(k-p) \end{aligned}\right\} \tag{15-65}$$

将式(15-65)代入(15-64)有

$$v(k) = h'[Y(k), U(k-1)] \tag{15-66}$$

式中　$Y(k) = [y(k), y(k-1), \cdots, y(k-p-1)] \in R^{p+2}$

$U(k-1) = [u(k-1), u(k-2), \cdots, u(k-p)] \in R^p$

将(15-66)式代入(15-63)，消去 $v(k)$，则系统(15-63)的控制模型有如下形式

$$y(k+1) = g[Y(k), U(k-1)] + \beta u(k) \tag{15-67}$$

式中 $g(\cdot) \in R$ 为一未知非线性函数。设受控系统的期望输出为 y_d，由上式可得系统期望控制输入

$$U_d(k) = \frac{1}{\beta}\{y_d - g[Y(k), U(k-1)]\} \tag{15-68}$$

由此可设自适应控制器的形式为

$$u(k) = u[y_d, Y(k), U(k-1), \theta] \tag{15-69}$$

其中　y_d、$Y(k)$，$U(k-1)$ 为控制器的输入，θ 为控制器的调节参数。为此可引入神经网络来作为自适应控制器，即

$$u(k) = NN[X, \theta] \tag{15-70}$$

式中 $X = [Y(k), U(k-1)] \in R^q \quad (q = 2p + 2)$ 为神经网络的输入，θ 为神经网络的学习参数。

以系统的期望输出为神经网络监督学习的示教信号，通过调节神经网络的学习参数 θ，可使控制器产生期望输入 u_d，从而实现预定的控制性能指标，基于神经网络的振动自适应主动控制系统如图 15-21 所示。

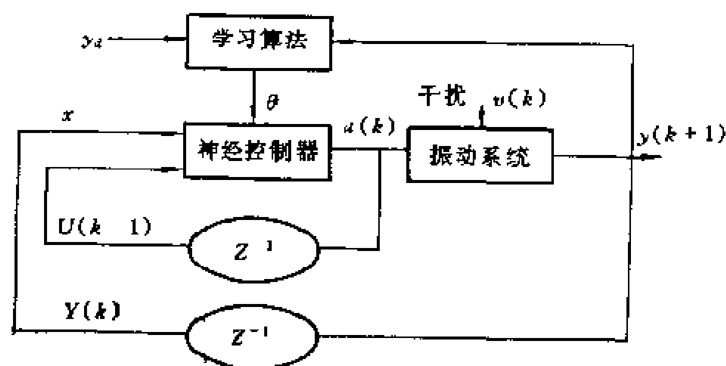


图 15-21 神经网络自适应控制系统

3. 自适应控制算法

下面采用直接自适应控制策略，无需识别系统参数，直接通过反馈自适应调节参数。设系统在 k 时刻的实际输出与期望输出的偏差为

$$\varepsilon(k) = y_d - y(k) \tag{15-71}$$

定义其控制性能指标为

$$J = \frac{1}{2}\varepsilon^2(k) = \frac{1}{2}[y_d - y(k)]^2 \tag{15-72}$$

将式(15-58)代入(15-55)，有

$$y(k+1) = g[X] + \beta NN[X, \theta] \tag{15-73}$$

由上式可知，以 y_d 为示教信号，调节控制器 $NN[X, \theta]$ 中的参数，使 $J \to J_{min}$ 即可实现对系统的振动控制。

由 BP 神经网络的学习算法，可导出参数调节的递推并行算法

$$\left.\begin{aligned} \Delta_i(k) &= a_m \Delta_i(k-1) + a_g \nabla_{\theta_i} J \\ \theta_i(k) &= \theta_i(k-1) + \Delta_i(k) \end{aligned}\right\} \tag{15-74}$$

式中 $\nabla_{\theta_i} J = \dfrac{\partial J}{\partial \theta_i} = -\beta \varepsilon(k) \dfrac{\partial u}{\partial \theta_i}\bigg|_{\theta_i = \theta_i(k)}$，$a_g, a_m$ 分别为学习速度与惯性系数，$a_g, a_m \in (0,1)$。

至此，得到一类非线性振动自适应控制算法如下：

(1) 取(0,1)之间的随机值，初始化神经网络参数 θ；

(2) 采样，获取系统信息 $Y(k)$ 与 $U(k-1)$；

(3) 由式(15-50)计算 $\dfrac{\partial u}{\partial \theta_i}$，由式(15-62)修正控制器参数 θ_i；

(4) 由式(15-48)计算控制器输出，并作用受控对象；

(5) 返回第(2)步。

4. 算例

对于一个具有粘性阻尼和非线性刚度振动系统进行控制计算机仿真，其控制模型为

$$y(k) = 0.8y(k-1) - 0.6y(k-2) - 0.1y^2(k-1) + u(k-1) + v(k+1)$$

首先作用一干扰信号（$v(k) = \cos[5v(k-1) + \mathrm{RND}(1)]$，RND(1)为随机函数），无控时系统响应如图15-22所示，假定只知动态干扰阶次为1，控制输入项的系数为1，其他均为未知，然后以三层BP网络 $NN_{4,4,1}$ 作为控制器，控制器经过近200次采样数据的学习，控制器的输出达到稳定，系统响应趋近零，施控时系统响应如图15-23所示。可以看见，用神经网络能有效地控制（15.51）式所描述的一类非线性系统的振动，响应衰减速度较快，具有良好的实时性。

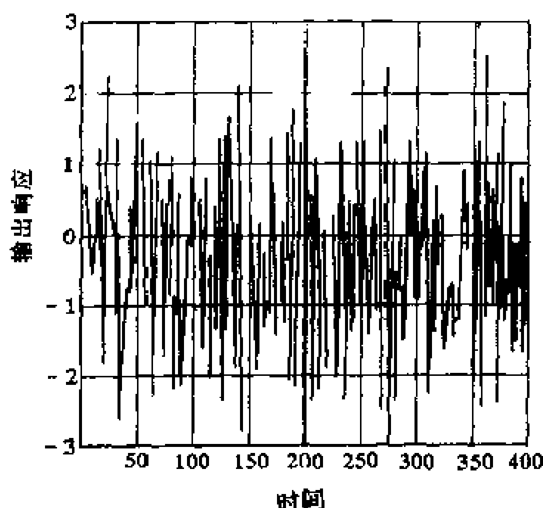


图 15-22　未控时系统响应

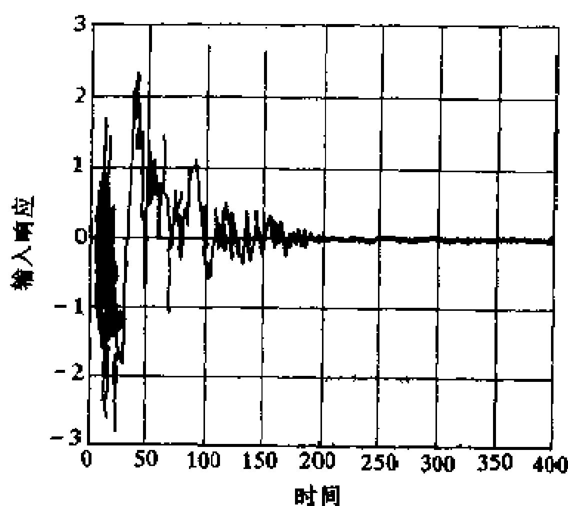


图 15-23　施控时系统响应

15.4　非线性转子振动系统的主动控制

实际转子系统是非线性系统，转子振动的主动控制是转子动力学和现代控制理论的交岔技术，也是近几年来振动主动控制领域内的热门课题之一。与一般结构的振动控制相比，它不仅要抑制转子工作时本身的振动，而且要减小于启动和制动过程中通过临界转速时的振动以及突加不平衡引起的振动过大等问题。从物理意义上讲，转子振动的主动控制可以理解为给转子系统引入附加的刚度和阻尼，从而改变系统的振动特性，使激励响应显著减少，稳定性改善；同时还可以理解为主控力起了平衡的作用。

以前抑制转子振动的传统方法是被动控制，通常是提高转子的加工制造和平衡精度，使用稳定性较好的油膜轴承如可倾瓦轴承等。但是由于旋转机械结构和工况等因素极为复杂，振动事故频频发生，造成重大经济损失。被动控制技术显得力不从心，而转子主动减振技术则被认为是最有可能从根本上预防和排除转子振动事故的新技术。另一方面，随着转子系统向大型化，高速化发展，这类转子由于往往有多阶模态被激起，仅靠被动控制是无法全部满足振动控制要求的。由于上述原因，转子振动主动控制正受到国内外越来越多研究者的重视。

对转子系统，主动控制力应起以下三种作用：

1. 引入足够的模态阻尼，起减振、迅速衰减各种干扰激起的振动，尤其是防止转子系统

失稳的作用；

2. 改变临界转速的位置，使之远离工作转速，避免共振，减小振动；

3. 补偿不平衡力，如叶片脱落后那样的巨大不平衡力。

从控制论的角度看，上述三种作用可归结为两个控制目的：

1. 按给定的性能指标 J，寻求最优或次优控制律 u，使初始扰动在有限或无限长时间内趋近至平衡状态，并且控制器应具有稳定鲁棒性；

2. 受控闭环系统应对不平衡力具有最低的敏感性，并且控制器应具有性能鲁棒性。

近几年的研究工作主要集中在控制方法的探讨和执行机构的设计方面。在控制方法上归结起来可分为：变支承刚度主动控制，状态反馈控制、最优控制以及模态控制和 H_∞ 控制等。

振动的主动控制都是通过一定的控制执行机构实现的。关于执行机构的研究主要集中在电磁轴承电磁阻尼器，可控挤压油膜阻尼器，压电晶体执行机构及液(气)压变支承刚度等。

15.4.1 可控挤压油膜阻尼器非线性 H_∞ 控制

1. 可控挤压油膜阻尼器(CSFDB)

挤压油膜阻尼器(SFDB)转子系统是一种典型的非线性系统。挤压油膜阻尼器本身是一个被动控制元件，通过自动调节挤压油膜阻尼器的间隙、供油压力或轴衬长度等结构参数，使其减振效果可控，就变成了可控挤压油膜阻尼器(CSFDB)。将 SFDB 改造成为 CSFDB 主动控制转子振动，可大大改善转子系统的运行性能。其结构如图 15-24 所示。

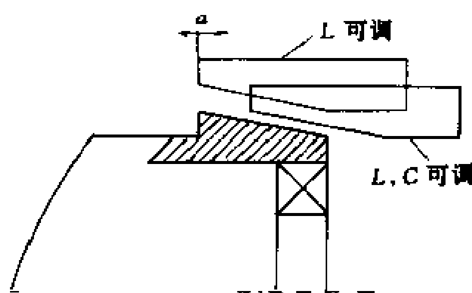


图 15-24 CSFDB 结构示意图

CSFDB 的各种调节方案为

$$c = c_0 + a\sin\theta \qquad (15\text{-}75)$$
$$L = L_0 - ab$$

其中 c_0 和 L_0 为油膜的标称间隙及长度；c，L 为油膜的瞬态实际间隙及长度；a 为可控油膜外环轴向移动量；b 为 0 或 1，取决于间隙可调或间隙和长度同时可调方案。CSFDB的瞬态实际半径为

$$R = R_0 - \frac{a}{2\tan\theta} \qquad (15\text{-}76)$$

其中 R_0 为油膜的标称平均半径，θ 为锥形轴颈半锥角。

假设油膜为中间供油，两边通大气，和一般的柱面挤压油膜阻尼器轴衬一样，可推导在 π 油膜和短轴承边界下 CSFDB 的稳态径向、切向油膜力为

$$F_r = \frac{\mu\omega L^3 R}{c_0^2}\cdot\frac{2\varepsilon^2}{(A_0^2-\varepsilon^2)^2}$$
$$F_t = \frac{\mu\omega L^3 R}{c_0^2}\cdot\frac{\pi\varepsilon^2}{(A_0^2-\varepsilon^2)^{3/2}} \qquad (15\text{-}77)$$

其中 μ 为润滑油粘度系数，ω 为轴承外环的进动速度，ε 为偏心率，与轴承轴颈偏心 e 的关系为

$$\varepsilon = \frac{e}{c} \tag{15-78}$$

A_0 与轴承结构参数的关系为

$$A_0 = 1 + \frac{a\sin\theta}{c_0} \tag{15-79}$$

2. 非线性 H_∞ 控制

对非线性系统

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \\ z &= h_1(x) + k_{12}(x)u \end{aligned}\right\} \tag{15-80}$$

其中 $x \in R^n$ 为状态变量, $u \in R^m$ 为控制输入, $w \in R^l$ 为外部扰动输入, $z \in R^p$ 为可控输出。函数 $f(x), g_1(x), g_2(x), h_1(x), h_{12}(x)$ 均为光滑函数。

假设

$$h_1(x)^T k_{12}(x) = 0, \quad k_{12}(x)^T k_{12}(x) = R_2 \tag{15-81}$$

其中 R_2 为非奇异常数矩阵。

对于 $\gamma > 0$, 若有 $V(x) \geqslant 0$ 满足方程

$$V_x f(x) + \frac{1}{2} h_1{}^T h_1 + \frac{1}{2} V_x \left(\frac{g_1 g_1^T}{\gamma^2} - g_2 R_2^{-1} g_2^T \right) V_x^T = 0 \tag{15-82}$$

则非线性系统(15-70) 存在如下形式的状态反馈

$$u = R_2^{-1} g_2(x)^T V_x^T \tag{15-83}$$

其中 V_x 为 $V(x)$ 的 Jacobi 矩阵: $V_x = \left[\frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \ \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} \ \cdots \ \frac{\partial V(x)}{\partial x_n}\right]$

若将函数 $f(x), g_1(x), g_2(x), h_1(x)$ 分别用 Taylor 级数表示,即

$$f(x) = Ax + f^{[2+]}(x) \quad g_1 = B_1 x + g_1^{[1+]}(x) \tag{15-84}$$

$$g_2 = B_2 + g_2^{[1+]}(x) \quad h_1(x) = C_1 x + h^{[2+]}(x) \tag{15-85}$$

那么状态反馈控制(15-73) 可用幂级数表示为

$$u = R_2^{-1} g_2^T(x)\left(px + \sum_{k=3}^{\infty} s_k^T N_{k-1} x^{(k-1)}\right) \tag{15-86}$$

其中 p 为下列 Riccati 方程的正定解

$$A^T p + pA + p^T \left(\frac{B_1 B_1^T}{\gamma^2} - B_2 R_2^{-1} B_2^{-1} \right) p + C_1^T C_1 = 0 \tag{15-87}$$

3. CSFDB 转子系统非线性 H_∞ 控制

图 15-25 是 CSFDB-转子系统模型简图, 假设系统的质量集中在圆盘 m_2 和两个支承 m_1 和 m_3 上, 左支承为 CSFDB, 并安装传感器, 则转子 CSFDB 系统的动力方程为

$$\overline{M}\ddot{q} + \overline{D} + \overline{C}\dot{q} + \overline{K}q = \overline{B}_1 f + \overline{B}_2 \overline{u} \tag{15-88}$$

其中 $q = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ y_1 \ y_2 \ y_3]^T$ 为无量纲广义位移;

$$\overline{M} = \mathrm{diag}[M\ M], \quad M = \mathrm{diag}[m_1\ m_2\ m_3]$$

$$\overline{C} = \mathrm{diag}[C\ C], \quad C = \{c_{ij}\} \quad (i, j = 1,2,3)$$

$$\overline{K} = \mathrm{diag}[K\ K], \quad K = \{k_{ij}\} \quad (i, j = 1,2,3)$$

$$\bar{f} = \begin{Bmatrix} f_x/c_0 \\ f_y/c_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_2 \varepsilon_u \omega^2 \cos\omega t \\ m_2 \varepsilon_u \omega^2 \sin\omega t \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_u = e/c_0$$

$$u \quad \mu\omega L^3R\begin{Bmatrix}\dfrac{2\varepsilon x_1}{(1-\varepsilon^2)^2} & \dfrac{\pi y_1}{(1 \quad \varepsilon^2)^{3/2}}\\ \dfrac{2\varepsilon y_1}{(1-\varepsilon^2)^2} & \dfrac{\pi x_1}{(1 \quad \varepsilon^2)^{3/2}}\end{Bmatrix}u \qquad u_y u$$

$u = 1/c^3$ 为控制变量，$\varepsilon \quad \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$。

令 $x = [q\ q]$，将式(15 88)化为状态变量形式

$$\dot{x} = Ax + B\ w + g_2(x)u \tag{15 89}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -M^{-1}K & -M^{-1}\bar{C}\end{bmatrix},\quad B_1 = \begin{bmatrix}0\\ -M^{-1}B_1\end{bmatrix},\quad g_2(x) = \begin{bmatrix}0\\ -M^{-1}\bar{B}_2\end{bmatrix}u_0$$

设系统的可控方程为

$$z = \begin{bmatrix}x_1\\ u\end{bmatrix} = C_1x + D_1u \tag{15-90}$$

式中　$\bar{B}_1, \bar{B}_2, C_1, D_2$ 为相应维数矩阵。

根据方程(15-89)和(15-90)知，系统的非线性仅出现在 $g_2(x)$ 中。对于稳态响应，$g_2(x)$ 可用 Taryl r 级数表示为

$$g_2(x) = B_2 + g_2^{[1+}(x) \tag{15 91}$$

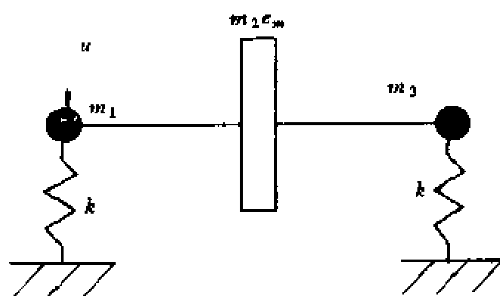


图 15-25　CSFDB-转子系统模型简图

其中　$B_2 = u_0(x_{10}, y_{10})$ 为稳态圆下的油膜力。

那么，CSFDB-转子系统非线性 H_∞ 控制器的三次近似解为

$$u = -B_2(px + S_3^TN_3x^{[2]}) \tag{15 92}$$

图 15 26 和图 15 27 分别为未控转子系统的阶跃响应和已控转子系统圆盘的初始扰动响应。CSFDB 的初始参数：$R_0 = 4.0$cm，L_0 - 2.0cm，c_0 — 0 02cm，$u_a = 19.6$gcm，μ — 2.66×10^{-3}Ns/m²。模型转子系统的三阶临界转速为：$\omega_{cr1} = 176.65$rad/s，ω_{cr2} 1018.55rad/s，

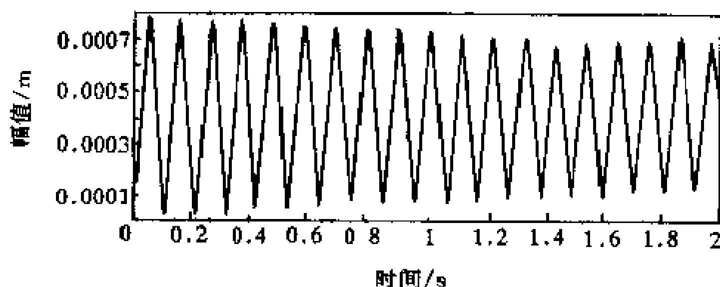


图 15-26　未控转子系统的阶跃响应

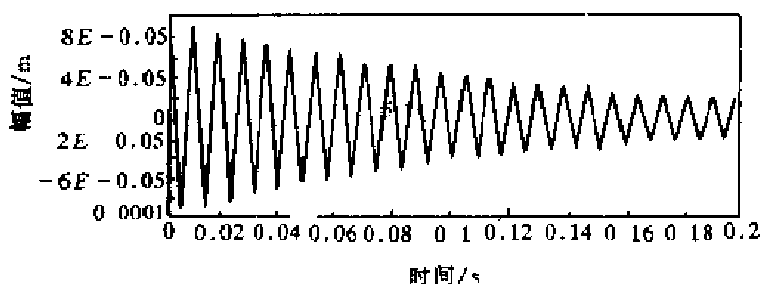


图 15-27　已控转子系统圆盘的初始扰动响应

$\omega_{cr3}=1440.3\text{rad/s}$。未控转子系统圆盘的阶跃响应为振荡曲线，有害于转子系统长时间工作。假设转子工作转速位于 ω_{cr1}、ω_{cr2} 之间，取 $\omega=600\text{rad/s}$，从已控转子系统圆盘的初始扰动响应可以看出，转子系统的抗干扰能力大为改善。在0.2s内，圆盘的初始扰动由0.1mm衰减为0.018mm，衰减幅度为82%。

15.4.2 参数慢变转子系统的变刚度控制

在工程中，常常会遇到这样一些转子系统，其参数是随时间而变化的。引起参数随时间变化的原因很多，有些是由于转子本身的物理或几何特性发生变化而引起的系统参数变化。例如当转子出现裂纹时，会导致整个系统刚度随时间变化。转子在运转过程中，外部条件的变化也会引起其参数的变化。例如，转子在启动或停车过程中，其不平衡激振力也是随时间变化的。值得注意的是主动控制的引入也会导致转子系统参数的变化。尽管控制转子系统振动的方法很多，但其物理意义却是通过调整系统的参数来改变刚度，增大阻尼，抵偿不平衡力，以达到控制振动的目的。显然，在控制过程中，转子系统是一个时变系统。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{m}(t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right]+[\boldsymbol{c}(t)]\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}+[\boldsymbol{k}(t)]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}\left(t,\boldsymbol{x},\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right) \tag{15-93}$$

对于上述系统，如果质量矩阵 $\boldsymbol{m}(t)$，阻尼矩阵 $\boldsymbol{c}(t)$、刚度矩阵 $\boldsymbol{k}(t)$ 及激励列阵 $\boldsymbol{f}\left(t,\boldsymbol{x},\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right)$ 能用确切的数学表达式表示，那么可以用数值的或解析的方法对其求解，得到系统的响应，并进而可对其动态特性进行分析。

在非线性时变系统中，如果其参数随时间的变化，与其振动周期相比十分缓慢，该系统可视为慢变参数系统，并可以用下列方程描述，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{m}(\tau)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right]+[\boldsymbol{c}(\tau)]\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}+[\boldsymbol{k}(\tau)]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}\left(\tau,\boldsymbol{x},\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right) \tag{15-94}$$

式中　$\tau=\varepsilon t$，ε 是小参数。

下面以慢变刚度主动控制单盘振子振动为例，研究在控制过程中转子的振动特性。所谓慢变刚度就是指转子的支承刚度在控制过程中随时间慢变，即 $k^*=k^*(\tau)$，刚度的变化是在很多振动周期的时间内缓慢完成的。设转子的支承刚度在控制过程中始终保持对称，则可以用下式描述其在控制作用下的振动，即

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+k(\tau)x=me\omega^2\cos(\omega t) \tag{15-95}$$

式中　$\tau=\varepsilon t$、ε 是小参数。

在实际过程中，支承刚度的变化是一个很复杂的非线性过程，但是不论支承刚度如何变化，只要它是随时间慢变的，就可以将其看成是分段线性的非线性过程，即

$$K(\tau)=\begin{cases}k_0+k_1\tau & 0<\tau\leqslant\tau_1\\ k_1+k_2\tau & \tau_1<\tau\leqslant\tau_2\\ k_2+k_3\tau & \tau_2<\tau\leqslant\tau_3\end{cases} \tag{15-96}$$

若阻尼是线性的，则上式所描述的变刚度控制过程可以用如下非线性方程表示，即

$$m\ddot{x}+k_0x=-\varepsilon c\dot{x}-k\tau x+me\omega^2\cos(\omega t) \tag{15-97}$$

上式可改写为

$$\ddot{x}+\omega_0^2=-\varepsilon c_d\dot{x}-k_d\tau x+e\omega^2\cos(\omega t) \tag{15-98}$$

式中　$\omega_0^2=\dfrac{k_m}{m}$，$c_d=\dfrac{c}{m}$，$k_d=\dfrac{k}{m}$。

用多尺度法对上式求解，可得

$$x = \alpha\cos(\omega_0 t + \beta) + e\omega^2(\omega_0^2 \quad \omega^2)^{\ 1}\cos(\omega t) + O(\varepsilon) \tag{15-99}$$

$$\alpha' = -c_d\alpha$$

$$2\omega_0\beta' \quad k_d t$$

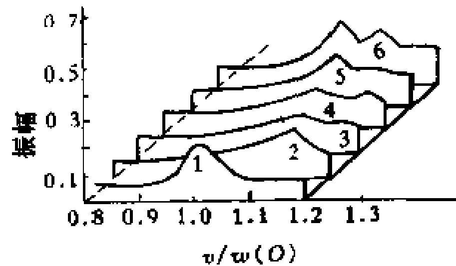


图 15-28　不同慢变刚度系数时的仿真曲线

其中“ ”表示对 $\tau(\tau = \varepsilon t)$ 的一阶导数；α,β 分别是 $T_1 - \varepsilon T$ 的函数，且与慢变变刚度系数 k_d 有关，它反映了刚度变化的速率，在相同工况下，k_d 的选择直接影响转子的振动；k_0,k_1,k_2 为常数，分别对应 $0,\tau_1,\tau_2$ 时刻的刚度值，相应于 $k(\tau)$ 的变化，$\omega(\tau)$ 也发生相应变化。因此在采用变刚度控制振动时，必须针对不同的工况，通过优化的方法选择适当的 k_d，从而达到降振的目的。

取 $\varepsilon = 0\ 01, m = 12.4\text{kg}, e = 0\ 04\text{m}, k(0) = 3.2\times10^6\text{N/m}, c_1 = 0.2\text{s}^{-1}, v = 628\text{s}^{\ 1}$，用四阶龙格　库塔法进行数值计算，得到如图 15-28 所示的仿真曲线。曲线 1,2,3,4,5,6 分别是 k_d 等于 0,5,10,15,20,25 时的仿真结果。可以看出，选择不同的变刚度系数，就可在起动和控制过程中有效地抑制转子的振动，k_d　10 时效果最好。

从不同 k_d 时的转子振动的三维谱图(参见图 5 2)也可看出 k_d　10 时，工作最平稳。这说明，只要选择适当的变刚度系数，就能够有效地抑制转子的振动，达到减振的目的。

15.5　高层土木结构非线性振动的主动控制

随着材料强度和现代化建筑技术的发展，高层土木结构的高度不断地增加，使得按传统的设计方法设计的高层建筑在遭遇地震或飓风荷载情况下，刚度显著降低，柔度显著增大，舒适性、抗震性随之恶化。目前在国际上，一般采用主动拉索和主动调频消振器的减振方案，并已有许多巨型土木工程结构安装了主动调频消振器，抑制了风致振动，改善了舒适性。这种主动控制机理主要有三种：ATM(Active Tendon Mechanism)，ATMD(Active Tendon Mass Damper Mechanism) 和 AAAM (Active Aerodynamic Appendage Mechanism)。ATM 和 ATMDM 的应用如图 15-29 所示。在图 15-29 中高层建筑的控制器是楼层之间的联结键(Tendon)，如果联结键装置的作动器开始移动，沿对角的联结键之一会受拉力，从而产生控制力抵消使楼层平行于联结键移动的侧向力。在图 15-30 中 ATMD 是安置在楼顶的一个质量块。如果作动器工作会对建筑物顶楼产生控制力，从而减小晃动。AAAM 一般用来控制桥梁的振动响应、

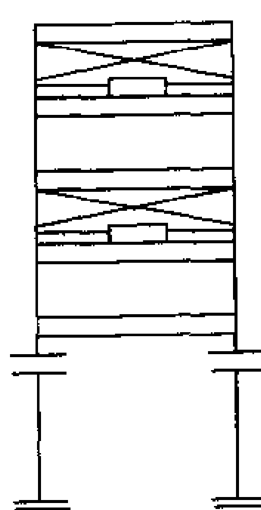


图 15-29　联接键主动控制法

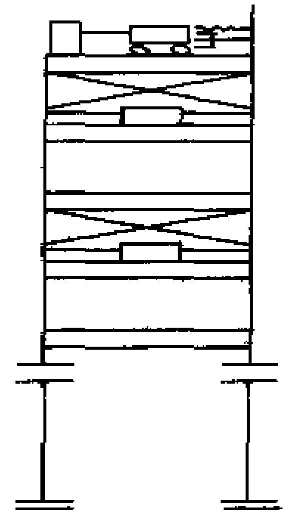


图 15-30　调节质量阻尼主动控制法

最近几年混合控制方法也取得了较大的进展。混合法的概念是建立在主动、被动控制的

基础上，它利用主动和被动控制的各自优点达到更好的控制目的。例如在基底隔离和主动控制相结合的混合控制中，基底隔离法用来减少由地面传递给建筑结构的运动，而主动控制既可用于减小建筑物的响应，也可用来保护隔离系统，还可以协助基底隔离法进一步将地面运动与建筑物的运动解耦。由于基底隔离系统动态行为的非线性和非弹性，混合控制方法也就成为非线性或滞后系统，由此也产生了许多针对非线性或滞后系统的控制策略。

与其他主动控制减振相比，土木工程振动有两大特点：一是土木结构在强震条件下抗力降低，具有非线性和非定常特性；二是控制目的在于抑制持续随机扰动引起的强迫振动。因此，主动控制抗震的土木工程结构的运动方程中的阻尼力和恢复力不能用状态变量表示，分别用 $\boldsymbol{F}_D$ 和 $\boldsymbol{F}_S$ 作为阻尼力和恢复力，则可将其运动方程表示为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}}(t) + \boldsymbol{F}_D[\boldsymbol{X}(t)] + \boldsymbol{F}_S[\boldsymbol{X}(t)] = -\boldsymbol{M}\boldsymbol{\zeta}\ddot{\boldsymbol{X}}_0(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{V}(t) \tag{15-100}$$

其中　$\boldsymbol{M}$ 为质量矩阵，$\boldsymbol{X}$ 为位移向量，$\ddot{\boldsymbol{X}}$ 为地面加速度向量，$\boldsymbol{B}$ 为控制器位置矩阵，$\boldsymbol{V}(t)$ 为控制力向量。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_D[\boldsymbol{X}(t)] &= \boldsymbol{F}_D(t-\Delta t) + \boldsymbol{C}(t-\Delta t)[\boldsymbol{Y}(t) - \boldsymbol{Y}(t-\Delta t)] \\
\boldsymbol{F}_S[\boldsymbol{X}(t)] &= \boldsymbol{F}_S(t-\Delta t) + \boldsymbol{K}(t-\Delta t)[\boldsymbol{Y}(t) - \boldsymbol{Y}(t-\Delta t)]
\end{aligned} \tag{15-101}$$

$$C_{ij}(t-\Delta t) = \frac{\partial \boldsymbol{F}_{Di}(t-\Delta t)}{\partial \boldsymbol{Y}_j(t-\Delta t)}, \quad k_{ij}(t-\Delta t) = \frac{\partial \boldsymbol{F}_{si}(t-\Delta t)}{\partial \boldsymbol{Y}_i(t-\Delta t)}$$

$$\boldsymbol{\zeta} = [1\ \cdots\ 1]^T$$

显然，这是一个非线性时滞系统的运动方程。

引入状态变量 $\boldsymbol{Z}(t) = [\boldsymbol{X}^T(t)\ \dot{\boldsymbol{X}}^T(t)]^T$，运动方程又可写为

$$\dot{\boldsymbol{Z}}(t) = \boldsymbol{g}[\boldsymbol{Z}(t)] + \boldsymbol{N}\boldsymbol{V}(t) + \boldsymbol{W}\ddot{\boldsymbol{X}}_0(t) \tag{15-102}$$

$$\boldsymbol{g}[\boldsymbol{Z}(t)] = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{X}}_t \\ -\boldsymbol{M}^{-1}\{\boldsymbol{F}_D[\boldsymbol{X}(t)] + \boldsymbol{F}_S[\boldsymbol{X}(t)]\} \end{bmatrix} \tag{15-103}$$

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{H} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\boldsymbol{\zeta} \end{bmatrix} \tag{15-104}$$

在运动方程约束下对二次性能指标 $\boldsymbol{J}(t) = \boldsymbol{Z}^T(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Z}(t) + \boldsymbol{U}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}(t)$ 取最小值，得到状态向量和控制向量在计算底层隔离结构加主动控制的混合系统的模型中，阻尼取线性，非线性恢复力取为

$$F_{st}(x_t) = \alpha_t k_t x_t + (1-\alpha_t)k_t D_{yt} v_t \tag{15-105}$$

其中　x_t 为楼层变形位移，k_t 为弹性刚度，α_t 为前后弯曲刚度比，D_{yt} 为常弯曲变形，v_t 为描述滞后的无量纲变量，且 $\dot{v}_t = f(x_t, v_t)$，$|v_t| \leqslant 1$。

一般的优化理论中性能指标只包含结构变形和速度等，而不考虑时间滞后和加速度。实际上时间滞后现象主要是由作动器不能及时按反馈信号运作而引起的。而且在混合控制中，由于被动控制中底层支承行为的非线性及整体结构的滞后都使控制变得复杂化。若在二次性能 J 中考虑到加速度和时间滞后的影响，对结构进行优化控制，对线性控制系统，性能指标为

$$J = \int_0^{t_f}[\boldsymbol{Z}^T(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Z}(t) + \boldsymbol{U}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}(t) + \ddot{\boldsymbol{X}}_a^T(t)\boldsymbol{Q}_a\ddot{\boldsymbol{X}}_a(t) + \boldsymbol{q}^T(t)\bar{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{q}(t)]\mathrm{d}t \tag{15-106}$$

其中　$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{Q}_a$ 分别为 $(2n\times 2n)$，$(n\times n)$ 阶对称半正定权矩阵；$\boldsymbol{R}$，$\bar{\boldsymbol{R}}$ 为 $(r\times r)$ 阶对称正定

权矩阵；$q(t)$ 为 r 阶反馈信号向量，与作动器动态性能有关；$X_a(t)$ 为加速度向量。

对非线性系统，不考虑作动器动态性能的性能指标为

$$J = \int_0^{t_f} [g^T[Z(t)]Qg[Z(t)] + X_a^T(t)Q_aX_a(t) + U^T(t)RU(t)]\mathrm{d}t \qquad (15\text{-}107)$$

若取 Hamilton 函数

$$H = Z^TQZ + U^TRU + \lambda^T(t)\ Z - D^*(t-\Delta t) - A_1X_0(t) - A_2U]$$
$$D^*(t-\Delta t) = A_3Z(t-\Delta t) + A_4[F_D(t-\Delta t) + F_S(t-\Delta t)] + A_5X_0(t-\Delta t) + A_6U(t-\Delta t) \qquad (15\text{-}108)$$

用极大值原理能导出开环控制、闭环控制和复合控制方案的三种瞬时最优计算式：

1）只需观测地面加速度的开环控制方案

$$U_{opt} = -(R + A_2^TQA_2)^{-1}A_2^TQ[D^*(t-\Delta t)^{-1} + A_1X_0(t)] \qquad (15\text{-}109)$$

2）只需观测结构状态的闭环控制方案

$$U_{opt} = -R^TA_2^TQZ(t) \qquad (15\text{-}110)$$

3）同时观测地面加速度和结构状态的复合控制方案

$$U_{opt} = -\frac{1}{2}R^{-1}A_2^T\left[\frac{1}{2}QA_2R^{-1}A_2^T + I\right]^{-1}Q[Z(t) + D^*(t-\Delta t) + A_1\dot{X}(t)] \qquad (15\text{-}111)$$

日本国家地震工程研究中心进行的四单元六层钢架结构主动控制抗震试验，最大控制力为313KN(相当于结构重量的40%)的主动控制已使结构响应减小40%。试验结果表明，拉索液动机控制能减轻结构的地震响应。

美国结构主动控制抗震研究中心已建成$3.6\times3.6\mathrm{m}^2$的地震试验台，用1:4的三层楼模型进行主动控制抗震试验，按上述几种控制方案计算最优控制力的程序预先编排在控制计算机内，用应变计作观测器，液动机作执行机，用计算机控制，试验结果表明，地震响应只减小40%，远未达到预期水平，主要原因是数学模型与试验模型的动态特性不符。根据前者导出的最优控制对后者远非最优。事实上，土木工程结构常有非弹性变形，受循环载荷的应力应变图上有滞回环。载荷达到局部损伤时，材料抗力蜕化，表现出非定常性。同时，从传感器测得结构变形到液动机和拉索给结构施加控制力要经历一段时间，存在纯时滞环节，对控制系统性能有影响。因此，巨型土木工程结构主动控制抗震系统是具有时滞的非定常非线性控制系统，需要实时识别技术建模，设计自校正控制器，才能获得理想的控制效果。

15.6　海洋平台非线性振动的主动控制

随着海洋石油工程的迅速发展，建造了大量的近海平台，这些平台结构长期漂浮在海洋中，始终受到各种不同规律的海浪载荷力冲击作用。因此海洋平台在整个服役期内结构总是伴随着冲击振动。这种振动使平台结构经常发生强度的破坏，疲劳与断裂破坏，同时也使平台工作人员感觉不舒适。因此构造各种海洋平台被动与主动的振动控制阻尼器以减弱振动的影响是海洋工程中必须考虑的问题。

1. 海洋平台非线性振动的最优控制方程

海洋平台结构可以视为平面的连续悬臂式结构，如以团聚质量法可形成 n 个质量层，每

个平面质量层可以被波浪的冲击力作用着，按 Morison 波浪力公式，平台圆柱体上沿 x 轴方向的波浪力可表示为

$$
\begin{aligned}
F(x,z,t) &= F_1(x,z,t) + F_2(x,z,t) \\
&= C_M \cdot \rho \forall \dot{V}_x(x,z,t) + \frac{1}{2} C_D \cdot \rho A_P V_x(x,z,t) \mid V_x(x,z,t) \mid
\end{aligned}
\tag{15-112}
$$

其中 第一项为惯性力项；第二项为阻尼力项，它与波浪和圆柱体的相对运动有关；式中 C_M 中惯性力系数；C_D 是阻力系数；ρ 是流体密度；$\forall$ 是单位长度圆柱体的体积。

流体质点速度、加速度可用有限水深 Stokes 二阶波表示为

$$
\dot{V}_X = \frac{\pi H}{T} \frac{\cosh[k(d+z)]}{\sinh(kd)} \cos(kx - \omega t) + \frac{3\pi H}{4T}\left(\frac{\pi H}{L}\right) \frac{\cosh[2k(d+z)]}{\sinh^4(kd)} \cos[2(kx - \omega t)]
$$

$$
\begin{aligned}
V_X = &\frac{2\pi^2 H}{T^2} \frac{\cosh[k(d+z)]}{\sinh(kd)} \sin(kx - \omega t) + \\
&\frac{3\pi^2 H}{4T^2}\left(\frac{\pi H}{L}\right) \frac{\cosh[2k(d+z)]}{\sinh^4(kd)} \sin[2(kx - \omega t)]
\end{aligned}
\tag{15-113}
$$

如不考虑结构与海浪流体之间的相对位移，整个平台的运动方程是

$$
\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}(t) \tag{15-114}
$$

方程中海浪激振力是非线性函数，因此，上述方程可按非线性振动方程处理。为改变平台结构的动态响应值，可以在平台各层次中安排不同的振动控制阻尼器来减弱振动的响应。下面讨论几种阻尼器。

(1) 调谐液阻尼器(TLCD)

如海洋平台是塔式结构，可以将第 i 层平台分离后视为平台结构如图 15-31。在建造平台时可将前、后两根竖向空心塔柱与横向台面支承空心管道连通，而与下层管道封闭，然后在管道中注入海水，就可形成第 i 层平台的 TLCD 阻尼器。按图中所示的受力状态，可建立非线性运动方程

$$
\begin{aligned}
&m_i\ddot{x}_i + C_i(\dot{x}_i - \dot{x}_{i+1}) + K_i(x_i - x_{i+1}) - C_{i+1}(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) - K_{i+1}(x_{i+1} - x_i) \\
&= F_i(t) - D(t)\rho AL x_{n+i} + \frac{\rho A}{2}\zeta \mid \dot{x}_{n+i} \mid \dot{x}_{n+i} + 2\rho A g x_{n+i} = -\rho AB x_i
\end{aligned}
\tag{15-115}
$$

其中 $D(t) = (\rho AB x_{n+i} + \rho AL x_i)'$；$x_i$ 是第 i 层平面的位移坐标，x_{n+i} 是第 i 层平台上的调谐液升降坐标。ρ 是海水质量比，A 是管道面积，B 是平台底面长度，L 是流柱整个长度，ζ 是横管道中孔控制损失压力的常数。

上述第二个方程的第二项可视为弱非线性项，利用等效线性化法，方程(15-105)可写为

$$
\begin{aligned}
&\left\{\begin{bmatrix} M_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{n+i}^L & 0 \\ 0 & M_{n+i}^L \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{x}_{n+i} \end{bmatrix} + \left\{\begin{bmatrix} C_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{n+i} & C_{n+i} \\ -C_{n+i} & C_{n+i} \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{x}_{n+i} \end{bmatrix} + \\
&\left\{\begin{bmatrix} K_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{n+i} & -K_{n+i} \\ -K_{n+i} & K_{n+i} \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} x_i \\ x_{n+i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{15-116}
$$

式中 K_{n+i}，C_{n+i}，M_{n+i} 分别是 TLCD 的等效刚度、等效阻尼与等效质量。也可将各层的竖直管道设计成 TLCD 振动阻尼器。

(2) 调谐质量阻尼器(TMD)

同样将第 i 层平台分离成图 15-32 的简图，并在平台面上安装调谐质量阻尼器，其阻尼器分离简图为图 15-33，在调谐质量阻尼器上可施加主动力用 $U(t)$ 表示，这时称为主动控制，当 $U(t)=0$ 时称为被动控制。按计算简图可建立下面运动方程

$$M_i\ddot{x}_i + C_i(x_i - x_{i-1}) + K_i(x_i - x_{i-1}) - C_{i+1}(\dot{x}_{i+1} - x_i) - K_{i+1}(x_{i+1} - x_i) - C_{n+i}x_{n+i} - K_{n+i}x_{n+i} = F_i(t) - U_i(t) \tag{15-117}$$

$$M_{n+i}(\ddot{x}_i - \ddot{x}_{n+i}) \quad C_{n+i}\dot{x}_{n+i} + K_{n+i}x_{n+i} = U_i(t)$$

式中　x_{n+i} 是阻尼器与平台的相对位移；M_{n+i} 是阻尼器的质量；K_{n+i} 是阻尼器的组合刚度；C_{n+i} 是阻尼器的阻尼系数。

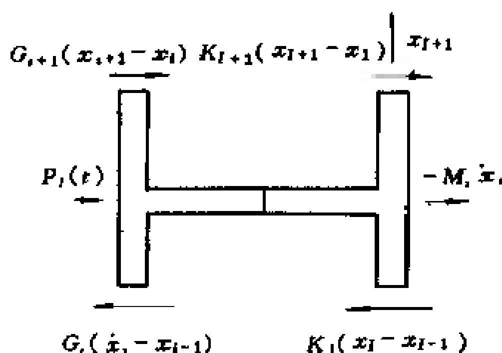


图 15-31　分离后平台结构及受力图

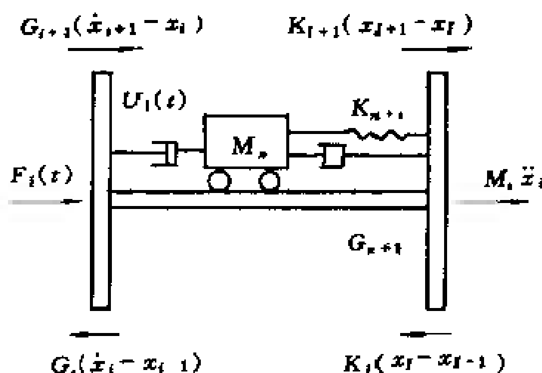


图 15-32　分离后平台结构及受力图

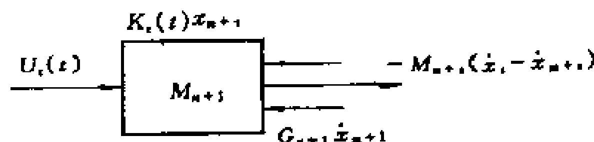


图 15-33　阻尼器分离简图

如在每层平台上构造 TMD 的阻尼器，整个运动方程的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ -M^D & M^D \end{bmatrix}\ddot{x} + \begin{bmatrix} C & C^D \\ C^D & 0 \end{bmatrix}\dot{x} + \begin{bmatrix} K & -K^D \\ 0 & K^D \end{bmatrix}[x] = \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -U(t) \\ U(t) \end{bmatrix} \tag{15-118}$$

式中　$\boldsymbol{M},\boldsymbol{C},\boldsymbol{K}$ 的矩阵式是与第(15-114)式中的矩阵相同，$\boldsymbol{M}^D,\boldsymbol{C}^D,\boldsymbol{K}^D$ 分别是 TMD 阻尼器的附加质量阵、附加阻尼阵和附加刚度阵。

将公式(15-114)，(15-118)的两种运动方程写成统一的运动控制方程为

$$\hat{\boldsymbol{M}}\ddot{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{C}}\dot{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{F}(t) - \hat{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{U}(t) \tag{15-119}$$

2. 运动控制方程的分析

式(15-109)的统一运动控制方程又可写成结构的运动控制状态方程

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{U} \tag{15-120}$$

其中　$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{MK} & \boldsymbol{MC} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{MK} = -\hat{\boldsymbol{M}}^{-1}\hat{\boldsymbol{K}}$　$\boldsymbol{MC} = -\hat{\boldsymbol{M}}^{-1}\hat{\boldsymbol{C}}$

对上述主动控制方程组($\boldsymbol{D}$ 为非零矩阵)求解时，通常是采用二次型性能指标来求解，可令矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是零矩阵来形成求解的状态方程，然后以确定二次型性能指标与求黎卡提方程的数值解来取得最优反馈增益矩阵，再定义主动控制力矩阵 $\boldsymbol{U} = -\boldsymbol{K}^*\boldsymbol{q}$ 代入式(15-120)，

形成新的状态控制方程

$$\dot{q} = (A - BK^*)q^* + BF \tag{15-121}$$

求解状态方程就可获取主动控制下的动态响应位移、速度和加速度。从上述讨论可认识到：在改变 TLCD, TMD 阻尼器的各种设计参数(如质量、刚度与整个流柱长度以及主动控制力的加权系数等)，就可构造不同的控制阻尼器，而这些阻尼器按排在平台的各个层次又可组合成各种振动控制方案，各种方案在某确定的海浪激振频率下具有不同的动态响应的位移、速度和加速度值，比较各个不同结果，就能寻求到最优的振动控制方案，并给予实施。

现以 Penzien 所研究的近海塔式结构 TOWER-1 为例来讨论。该结构的动力分析计算模型可分成7个团聚质量层，结构高度 144.78mm，水深 121.92mm，系数 $C_M = 2.0$, $C_D = 1.4$，所取有效波高 $H_s = 10.2$m，波浪平均频率 $w = 2.831/s$，计算的数据为

$$Z = \{22.86\ \ -3.05\ \ -22.86\ \ -42.67\ \ -62.48\ \ -82.30\ \ -102.11\}$$

$$C_M \rho \forall = \{0\ \ 1744\ \ 1674\ \ 1939\ \ 2563\ \ 3150\ \ 6735\} \times 10^3 \text{kg}$$

$$\frac{1}{2} C_D \rho A_p = \{0\ \ 790\ \ 676\ \ 719\ \ 757\ \ 828\ \ 1557\} \times 10^3 \text{kg}$$

$$M = \{4818\ \ 1475\ \ 1302\ \ 1533\ \ 1840\ \ 2205\ \ 3738\} \times 10^3 \text{kg}$$

$$K = \begin{bmatrix} 244 & -289 & 17 & -1 & 26 & 4 & 16 \\ & 670 & -366 & 4 & 33 & 23 & 10 \\ & & 725 & -368 & 14 & -22 & 9 \\ & & & 777 & -410 & 23 & -23 \\ & & & & 879 & -491 & 56 \\ & \text{对} & & \text{称} & & 1005 & -595 \\ & & & & & & 1344 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{kN/m}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2522 & -1244 & -263 & -135 & 9 & 18 & -59 \\ & 2892 & 936 & -188 & 144 & 7 & 30 \\ & & 2808 & -920 & -161 & -106 & -22 \\ & & & 3142 & -1072 & -161 & 113 \\ & & & & 3652 & -1292 & -122 \\ & \text{对} & & \text{称} & & 4311 & 1605 \\ & & & & & & 6769 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{kN} \cdot \text{s/m}$$

首先计算无任何振动阻尼器的情况，上部平台的位移值表示在图 15-34 中，在上二层平台的结构管道里设置 TLCD 振动阻尼器，并且取整个液柱长度 $L = 90$mm，横管压力损失比 $\zeta = 0.9$，所求的位移值表示在图 15-35 中。如取稳态后的振幅与没有阻尼器的稳态振幅之比 η 为控制消振系数，则 $\eta \simeq 0.626$。如不安设 TLCD 阻尼器，而在最上部结构设立一个 TMD 阻尼器，取阻尼器刚度 $K^D = 770.88$kN/m，$C^D \doteq 2200$kN/m，并抽入海水阻尼器的质量容器内使 $M^D = K^D/\omega^2 = 96.26$ 所求的位移值表示在图 15-36，这时 $\eta \cong 0.667$。在同样的条件下，作为主动控制时，按二次型性能指标求解可获取 $K^* = \{0\ -4.06\ -1.38\ -0.876\ -0.702\ -0.517\ -0.329\ -0.195\ 0.085\ -0.214\ -0.048\ 0.017\ \ 0.029\ 0.008\ 0.012\ 0.0112\}$ 然后代入前式可求得最上部平台的 X 值示于图 15-37 中，其控制系数 $\eta \cong 0.3$。

通过上述理论及实例的分析研究，得知在海洋平台上使用的 TLCD 阻尼器和 TMD 阻尼器可以在主动控制条件下有效地减弱振动的影响，使平台结构的寿命延长，大大减轻结构意外破坏的可能性，提高平台上工作人员的舒适性，这种减振方法在工程上使用，既有效又经济。

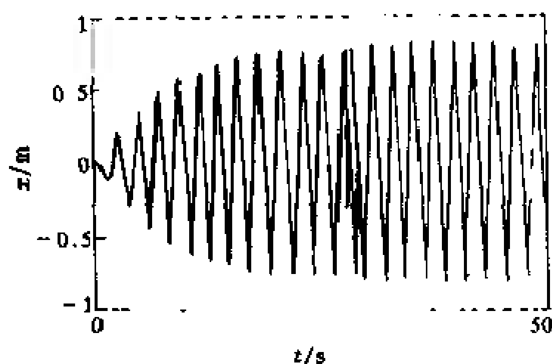


图 15-34　无阻尼器平台的位移响应

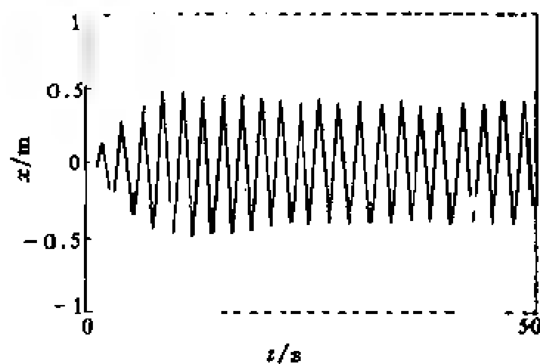


图 15-35　有 TCLD 阻尼器时平台的位移响应

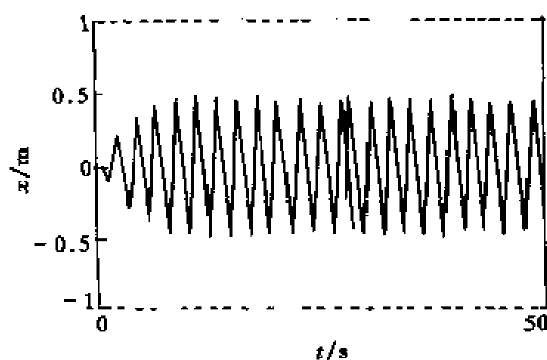


图 15-36　有 TMD 阻尼器时平台的位移响应

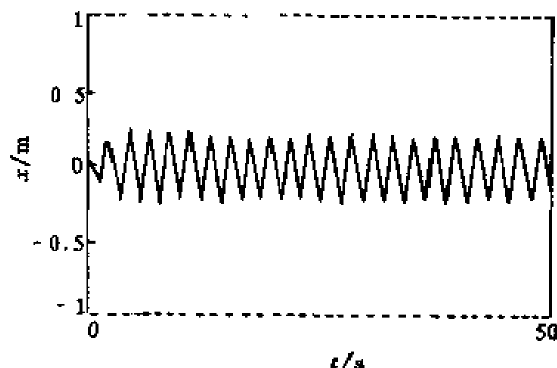


图 15-37　主动控制时平台的位移响应

15.7　车辆的主动悬架与非线性控制半主动悬架

车辆在随机路面不平度的影响下产生振动，使平顺性及舒适性下降，影响了车辆的使用性能。常规汽车绝大多数装有弹簧和减振器组成的机械式悬架，这种悬架通常承担两个似乎是相互矛盾的任务：

a. 支承车身重量并随路面运动；

b. 隔绝随机路面不平度对车体的扰动。

前者通常需要一个高阻尼的“硬”悬架，后者需要一个可减小路面不平面引起高频振动的低阻尼系数的“软”悬架。然而，在低阻尼情况下车身容易出现共振现象。用弹簧和阻尼器构成的被动悬架很难同时改善在不平路面高速行驶车辆的稳定性和行驶平顺性。为解决这个问题，改善车辆使用性能，常常采用主动悬架及半主动悬架系统。

主动悬架虽能改善车辆的行驶性能，但必须配有大功率的能源装置，这不仅使车辆结构更复杂，而且会减少其有效承载能力，消耗较多的控制能量，成为广泛使用主动悬架的障碍。被动悬架系统的阻尼器能抑制共振，但对隔离高频振动分量效果不明显，它取决于两端相对运动参数的符号。当阻尼力作正功时，向系统馈送能量使系统振动加剧；阻尼力作负功时，吸收振动能量，使系统振动衰减。因此，若使阻尼力只作负功，在作正功时自动消失，必将改善隔振效果。图15-38 为一种能自动启闭分油门的阻尼器，通过调节阻尼器油孔大小来改变阻尼系数(甚至可使阻尼器处于工作状态或不工作状态)。由于这种可控阻尼器仅在部分时间工作，因此称之为半主动悬架或半主动控制。

通常主动悬架能提供与隔振对象绝对运动速度成正比的阻尼力，因此半主动悬架系统中阻尼器的控制原则是使半主动悬架系统提供的阻尼力尽可能接近主动悬架所能提供的阻尼力。图 15-39 是二自由度车辆主动悬架的力学模型。簧上质量 m_2 实际上是由弹性元件 k_2 和可变阻尼减振器 c_2 构成的第二级悬架支承着的车体。簧下质量 m_1 是具有刚度 k_1 的橡胶轮胎。这是一个参数变化的动态系统，通过非线性反馈控制可连续调整阻尼。系统运动方程为

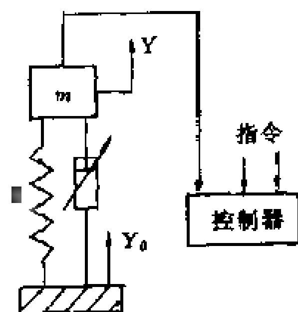


图 15-38　半主动悬架示意图

$$m_2\ddot{y}_2 + k_2(y_2 - y_1) = -F$$

$$m_1\ddot{y}_1 + k_1y_1 - k_2(y_2 - y_1) = k_1y_0 + F \qquad (15\text{-}122)$$

其中粘性阻尼力

$$F = c_2(t)\cdot(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) \qquad (15\text{-}123)$$

如果系数为常数，则系统是线性的，这就是被动悬架。

主动悬架系统提供的阻尼力为

$$F_{des} = -c_h\dot{y}_2 \qquad (15\text{-}124)$$

而半主动悬架系统提供的实际阻尼力为

$$F_{act} = -c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) \qquad (15\text{-}125)$$

控制原则为

如果 F_{des} 与 F_{act} 同号，则调节半主动悬架系统的阻尼系数 c_2 使 $F_{des} \approx F_{act}$；

如果 F_{des} 与 F_{act} 反号，则 $F_{act} = 0$。

即

$$c_2 = \begin{cases} c_h; & 开，\quad \dot{y}_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) \geqslant 0 \\ 0; & 关，\quad \dot{y}_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) < 0 \end{cases} \qquad (15\text{-}126)$$

这表明控制原则是根据相对速度和绝对速度的正负而定。在忽略簧下质量时，该悬架系统的振动传递能力与最优控制的单自由度悬架几乎相同。

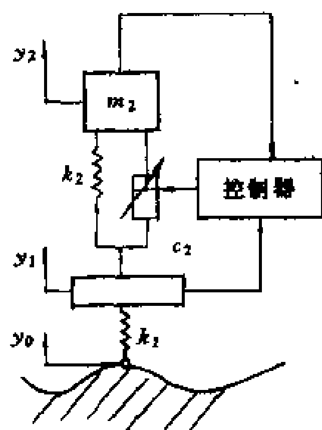


图 15-39　具可调减振器的二自由度的主动悬架

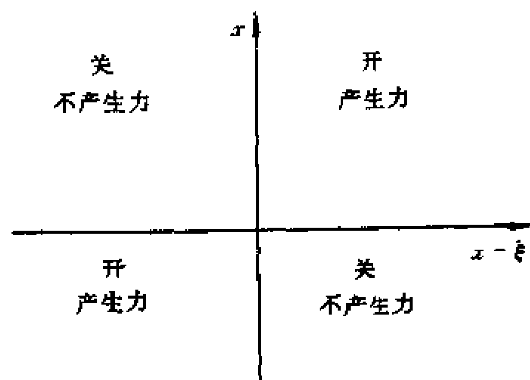


图 15-40　半主动悬架的控制逻辑图

若以 y_2 和 $y_2 - y_1$ 作为状态变量，则相平面之纵横轴均为阻尼力作负功区域的分界线，预先将方程以及它的分界线方程都编排进控制计算机内，并用测振仪分别测量被隔振体和

基座的位移和速度，根据这些信号，计算机就能判断该时阻尼力作功的性质，若阻尼力作负功，计算机将给出关闭油门指令，阻尼器立即产生阻尼力；若阻尼力作正功，计算机立即给出打开油门指令，使阻尼力消失。图 15-40 为半主动悬架的控制逻辑。

通过上式的控制规律，可使半主动悬架的效果接近于主动悬架的效果，如图 15-41(a) 所示。在简谐激励和随机激励条件下分别计算单级主动、半主动和被动悬架系统的隔振传递率曲线和加速度方差曲线，计算结果表明：半主动悬架的性能比被动悬架好得多，与主动悬架性能相近。图15-41(a)，15-41(b) 为被动、半主动与主动悬架三种情况下的隔振效果之比较，图15-41(c) 为开-关式控制的半主动悬架与被动、主动悬架之比较，可见开关式控制方式的低频隔振性能较好。但若用这种开-关调节原则来降低簧下质量的共振现象仍然比较困难，且在高频时存在着振荡和对反馈信号过度敏感的开关反应现象，使得高频隔振性能变差。这个问题可由连续半主动悬架控制系统来解决。连续半主动悬架控制系统的控制律可表示为

$$c_2(t)=\begin{cases} c_h & \Delta c/\alpha \leqslant g(\dot{y}_2,\dot{y}_1) \\ c_m+\alpha\cdot g(\dot{y}_2,\dot{y}_1) & \Delta c/\alpha < g(\dot{y}_2,\dot{y}_1) < \Delta c/\alpha \\ c_1 & g(y_2,y_1)\leqslant -\Delta c/\alpha \end{cases} \tag{15-127}$$

式中 $c_m=(c_h+c_1)/2$，$\Delta c=(c_h-c_1)/2$；c_1 和 c_h 分别为阻尼系数的较低和较高值；系数 α 是连续阻尼系数 $c_2(t)$ 的一个估值。当 $\alpha=0$ 时，这个系统与被动悬架相同，$c_2(t)$ 是一个常数；当 α 为 ∞ 时，它就是一个开-关式主动悬架。

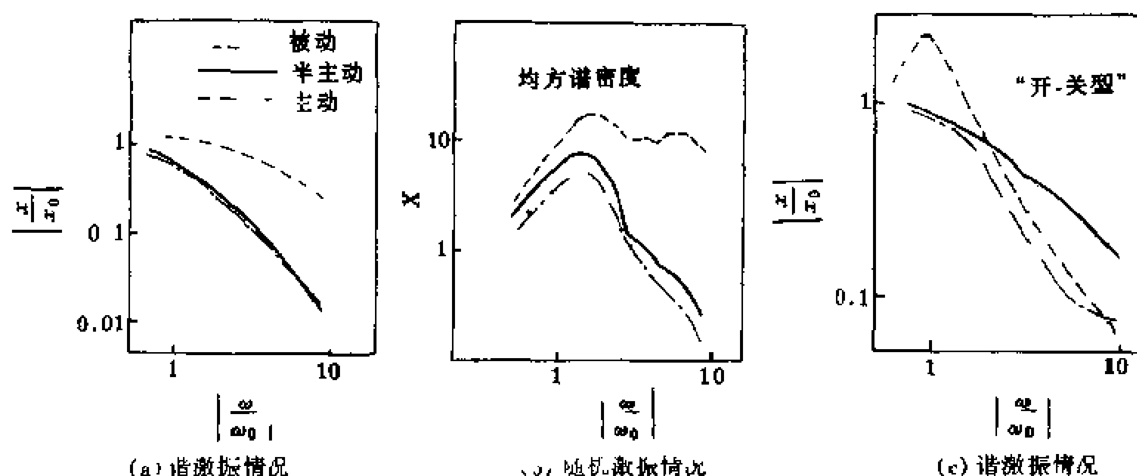


图 15-41　隔振效果之比较

将方程(15-127) 代入方程(15-124) 可得到阻尼力的表达式：

$$F=c_m(\dot{y}_2-y_1)+F_0 \tag{15-128}$$

其中第一项是阻尼力的平均值，第二项是受控制的阻尼力 F_0：

$$F_0=\begin{cases} \Delta c(y_2-\dot{y}_1) & \Delta c/\alpha \leqslant g(y_2,y_1) \\ \alpha y_2 \quad \dot{y}_2 \quad y_1 & \text{其他} \\ \Delta c(y_2-y_1) & g(y_2,y_1)\leqslant -\Delta c/\alpha \end{cases} \tag{15-129}$$

受控制的阻尼力 F_0 是 $\Delta c/\alpha \leqslant g(y_2-y_1) \leqslant \Delta c/\alpha$ 空间范围内的连续函数。此外，F_0 在开关半主动悬架的情况下可用方程写为

$$F_0=\Delta c\cdot \mathrm{sgn}\dot{y}_2\,|\,\dot{y}_2-y_1\,| \tag{15-130}$$

半主动控制过程是一个非线性和瞬态响应过程，频率和频谱响应可采用 Runge-Kutta-Gill 方法计算。表 15-1 是单侧模型的参数。

表 15-1　　二自由度单侧模型的参数

m	500	kg	Δc	1673	N·s/m
m_1	50	kg	f_2	1.33	Hz
k_2	35	KN/m	f_1	14.2	Hz
k_1	400	KN/m	ζ_2	0.5	$(c_2=c_h)$
c_h	4138	N·s/m		0.3	$(c_2=c_m)$
c_m	2510	N·s/m		0.1	$(c_2=c_l)$
c_2	837	N·s/m	y_0	0.001	m

注 $f_2=\sqrt{k_2/m_2}/2\pi$　$f_1=\sqrt{k_1/m_1}/2\pi$　$\zeta_2=c_2/2\sqrt{m_2k_2}$

通过计算连续系统中阻尼系数 $c_2(t)$ 在瞬态响应下的时间历程，发现 $c_2(t)$ 在连续系统中的变化不如在开-关半主动系统中那样敏感，所以采用连续半主动悬架控制系统可使瞬态响应的稳定时间得以改善。

此外，为了在不同的行驶条件下均可获得较高的稳定性和良好的操纵性能，要求轮胎与地面之间的接触压力的波动较小。图 15-42 对开-关半主动悬架系统、连续半主动悬架系统和被动悬架系统的轮接触压力的功率谱密度(PSD)作了比较。从图中可以看出：在被动悬架系统中，共振波峰明显出现于车体和车轮的两个固有频率处。开-关半主动悬架系统可以有效地降低第一个共振波峰，但会增加轮胎振动的第二个共振波峰。这种现象主要是由阻尼系数开关转换的间断性引起的。连续改变阻尼系数的半主动悬架系统不会像开关半主动悬架系统那样使第二个波峰加大。

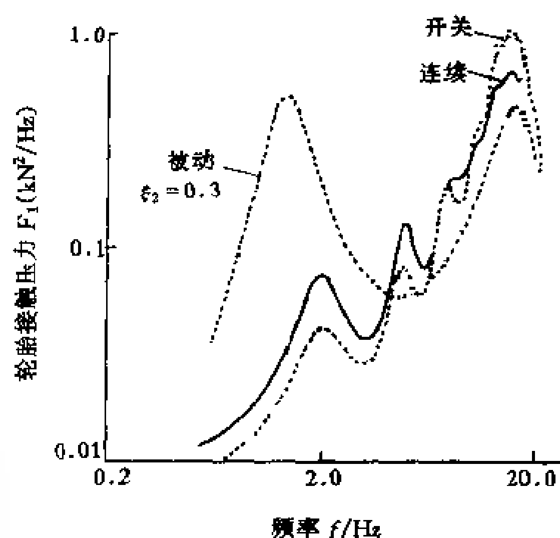


图 15-42　开-关、连续半主动悬架与被动悬架振动传递能力的比较

半主动悬架系统可以简化为分段线性系统，由于采用开关控制，因而具有强非线性。半主动悬架技术目前已成为车辆悬架系统重要的候选方案之一。采用半主动悬架系统的车辆至少需有四套隔振装置，属于多个非线性环节的多自由度动力学系统，很难用解析法进行分析研究，目前主要靠仿真和试验研究。

15.8　混沌的控制

混沌是本世纪最重要的科学发现之一，它打破了确定性与随机性之间不可逾越的分界线。根据英国的《不列颠百科全书》注释，英文中的“chaos”一词源于希腊“xaos”，本意是在万物出现之前就存在的无限广阔的空虚宇宙。这一名词翻译成中文时变为“混沌”。《庄子》一书内篇卷七中有句云“中央之帝为混沌”，其意与上述解释似有不同。但不管是希腊还是中国先有其词，当代英文中的“chaos”一词意指“混乱无序”，其含义与科学和工程非线性动力系

统理论中所描述的"确定性的随机现象"比较贴切,因而已被借用来称呼这些异常现象。

近年来对它的研究十分活跃,当前混沌研究主要包括如下的内容:

(1) 产生混沌的机理和途径。

(2) 混沌的判据和统计特性。

(3) 奇怪吸引子和吸引域的几何结构。

(4) 混沌的控制和应用。

由于混沌系统和混沌现象的奇异性和复杂性至今尚未被人们所彻底了解,这类系统和现象能否被人为地控制和诱导,特别是能否用常规方法来控制,长期以来一直是一个没有被深入探讨过的问题。直观上说,确定性系统可以有确定性控制器来操纵是毫不奇怪的,但随机系统也可以由确定性控制器来操纵就不是理所当然的。因此,控制具有"确定性的随机性"同时又具备"非线性的复杂性"的系统——混沌系统,肯定是一件十分具有诱惑力而又有挑战性的事。随着对混沌这一现象认识的不断深入,人们已开始探索如何控制和利用混沌现象。近年来,控制和利用混沌已在加速度溶液混合化学反应、作为保密通讯的媒体等方面取得了初步的成功。

非线性系统的混沌现象是由某些关键的系统参数的变化而引起的,对于大多数力学系统而言,人们不希望它们产生难以预测的混沌运动。因此,控制混沌的主要目的是消除已有的混沌运动,或降低其振动幅度。从这一角度出发,关于控制或诱导混沌的一种十分自然的想法是直接控制或调整这些参数,对动力系统进行修改或施加控制影响混沌运动的生存条件,从而可设法消除或抑制混沌运动。例如:

(1) 采用动力吸振器可消除简谐激励下 Duffing 振子的混沌运动;

(2) 采用经典的随机最优控制技术可控制 Lorenz 热对流中的混沌;

(3) 当系统同时存在周期运动和混沌运动吸引子时,采用迁移和输送控制(Migration and Entrainment)可实现不同稳态运动间的切换。

但这些控制方法尚未利用混沌的内在动力学特性,实现中往往要对耗散系统作较大的修改或输入较大的控制量。1990年,美国马里兰大学学者 Ott, Greboyi 和 Yoke(OGY)根据混沌特性提出了一种利用混沌内在特性的控制策略,该策略对系统某一控制参数作时变小摄动,即可将系统的混沌运动稳定到指定的周期运动上。人们将这种方法称之为 OGY 方法。由于在调整参数的过程中需要使用系统输出的信息,这种方法亦具有一定的传统反馈控制之特色。这种控制手段有两个突出的特点:它不要求知道严格的系统数学方程,并且能通过微小的控制信号而获得明显的控制效果。

Hubler 及其合作者提出的另一种方法是"纳入轨道"和"强迫迁移"法,另外还有通过控制系统分支点或控制 Lyapunov 指数达到控制混沌的其他思想和方法,分布参数系统的智能控制等。

控制混沌系统和混沌现象是一个新的概念和尝试,它已经引起了非常广泛的注意。尽管目前已进行了大量的研究,混沌系统和混沌现象的控制仍然是一个全新的科学前沿,很多系统的理论和有效的控制方法尚待研究,特别是,如何发掘混沌系统特有的功能去造福人类,是一个极其重大而又意义深远的课题,它在工程上有重要的实际意义。通过对混沌控制的研究,使我们能够根据混沌特性可得到所需的非线性动力系统以便达到精确设计非线性系统的目的。

在机械系统中经常出现有间隙或弹性挡块的动力系统,其恢复力是连续的,但就系统状

态而言是非光滑的，这些非光滑系统即使在最简单的振动系统中也包含着复杂的动力学行为和混沌运动，控制这些系统的混沌运动，是当前研究的热门课题之一。胡海岩对OGY方法用于这类非光滑系统的其有效性进行了理论研究和实验验证。

15.8.1 OGY控制算法

为简便起见，对一个具有非光滑特性及耗散恢复力的受简谐激励的振子，我们讨论它在Poincare截面上的二维映射。考虑具有控制参数 α 的二维Poincare映射

$$u_{n+1}(\alpha) = P(u_n, \alpha) \quad n = 1, 2, \cdots \tag{15-131}$$

式中 状态 u_n 是系统流在Poincare截面的交集。控制参数 α 位于某一微小值 $\bar{\alpha}$ 的邻域内，在该邻域内映射呈混沌特性。由于在典型的混沌吸引子中稠密地嵌有不稳定周期轨道，我们可近似地从做混沌运动的样本中抽取映射的一些不动点，然后集中在某一特别的不动点 $u_F(\bar{\alpha})$ 上。根据混沌运动的漂移特性，u_n 必定以一定的映射重复落在 $u_F(\alpha)$ 附近。当出现这种情况时，可改变控制参数 α 以便使 $u_{n+1}(\bar{\alpha}+\Delta\alpha)$ 落入在 $u_F(\bar{\alpha})$ 的局部稳定流形 W^s 上。

为确定扰动 $\Delta\alpha$，对方程(15-121)在 α 附近作线性近似展开：

$$u_{n+1}(\alpha + \Delta\alpha) \approx P(u_n, \bar{\alpha}) + \frac{\partial}{\partial\alpha}P(u_n, \alpha)\Delta\alpha \tag{15-132}$$

这就要求Poincare映射是相对于 α 在 $(u_n, \bar{\alpha})$ 是连续可微的，并且每一变量的偏导不为零，选择一适当的 $\Delta\alpha$，将 $u_{n+1}(\bar{\alpha}+\Delta\alpha)$ 近似地移到 W_s 上。注意到 u_n 十分接近 $u_F(\bar{\alpha})$，可进一步把方程(15-122)右边两项在 $u_F(\alpha)$ 附近线性展开，即

$$\left.\begin{aligned} &P(u_n, \alpha) \approx u_F(\bar{\alpha}) + J(u_F(\alpha), \alpha)[u_n - u_F(\bar{\alpha})] \\ &\frac{\partial}{\partial\alpha}P(u_n, \bar{\alpha}) \approx \frac{\partial}{\partial\alpha}P(u_F(\alpha) + J(u_F(\alpha), \alpha)[u_n - u_F(\alpha)], \alpha)\mid_{\alpha=\bar{\alpha}}\Delta\alpha \\ &\qquad \approx [I - J(u_F(\bar{\alpha}), \alpha)]\frac{\partial u_F(\bar{\alpha})}{\partial\alpha}\Delta\alpha \end{aligned}\right\} \tag{15-133}$$

把方程(15 123)代入方程(15 122)，可得

$$u_{n+1}(\alpha + \Delta\alpha) \approx u_F(\alpha) + J(u_F(\bar{\alpha}), \bar{\alpha})[u_n - u_F(\bar{\alpha})] + [I - J(u_F(\bar{\alpha}), \bar{\alpha})]\frac{\partial u_F(\bar{\alpha})}{\partial\alpha}\Delta\alpha \tag{15-134}$$

其中 $J(u_F(\bar{\alpha}), \bar{\alpha})$ 是Poincare映射在 $(u_F(\alpha), \alpha)$ 的Jacobi矩阵。显然，上述线性化的有效性取决于对状态的Poincare映射的光滑度及其在 $(u_F(\bar{\alpha}), \alpha)$ 的控制参数。

因为所考虑的振动系统是耗散系统，不稳定不动点 $u_F(\bar{\alpha})$ 具有稳定的一维流形 W^s，该流形与Jacobi矩阵 $J(u_F(\alpha), \alpha)$ 的右特征向量相切，与左特征向量正交。为在 W^s 上映射 u_n，仅需调整 $\Delta\alpha$ 使得

$$\psi_u^T[u_{n+1}(\alpha + \Delta\alpha) - u_F(\alpha)] \quad 0 \tag{15-135}$$

从(15-134)和(15 135)可知，伴随着所期望的参数扰动

$$\Delta\alpha = \frac{\lambda_u\psi_u^T}{(\lambda_u \quad 1)\psi_u^T\cdot\dfrac{\partial u_F(\bar{\alpha})}{\partial\alpha}}\cdot[u_n - u_F(\bar{\alpha}] = \beta^T\cdot[u_n - u_F(\bar{\alpha}] \tag{15-136}$$

式中 λ_u 是对应于特征向量 ψ_u 的特征值。

结果表明，只要Poincare映射对于状态是连续可微的，对于控制参数在不动点是稳定的，OGY方法对非光滑动力系统的混沌控制是适用的。OGY控制的主要特点如下：一是可

选择混沌吸引子中嵌入的任意一种周期运动作为控制目标来改善系统特性；二是控制目标嵌入在当前的混沌运动中，所需的控制参数摄动量和可控制能量均很小；三是通过实验数据来拟合线性化映射，勿需系统的数学模型。

15.8.2 Poincare 映射的光滑度分析

现在研究在广义状态空间 v 上的周期性强迫非光滑振子，广义状态空间 v 包括位移 x，速度 y 和控制参数 α。

$$\left.\begin{aligned} v &= f(v,t) \\ v(0) &= v_0 \end{aligned}\right\} \tag{15-137}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= [x, y, \alpha]^T \\ \boldsymbol{v}_0 &= [x_0, y_0, \alpha_0]^T \\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}, t) &= [y, f(x, y, \alpha, t), 0]^T \end{aligned}\right\}$$

同时，$f(x, y, \alpha, t)$ 是以 T_0 为周期的干扰力和耗散恢复力的合力，对于状态 v 连续，但非光滑；对于时间 t 是以 T_0 为周期。例如，如果振子在 $x = d$ 处具有刚度为 k 的弹性挡块，则挡块的弹性力取

$$g(x) = k(x - d)H(x - d) \tag{15-138}$$

其中 $H(\cdot)$ 是海氏阶函数，容易看出 $\dfrac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$ 在 $x = d$ 处有跳跃。

对作周期性强迫运动的非光滑振子有两种方法定义 Poincare 截面。第一种是以某一固定的激励相位作为 Poincare 截面；第二种是在状态空间内选取一恢复力的切换面，比如说对上述弹性挡块 $x = d$。正如 Kleczka 指出的那样，如果轨线从 u_n 与切换面相切时，则在第二种 Poincare 截面上的 Poincare 映射点状态 u_n 是不连续的。所以只需分析在第一种 Poincare 截面上的 Poincare 映射，并简单地把它称作 Poincare 映射。进一步把映射点定义为振子在时刻 t 的频闪采样(mod T_0)。所以，Poincare 映射的光滑度等价于振子在时刻 t(mod T_0) 相对于初始状态的光滑度。

设 $\boldsymbol{V}(t)$ 表示状态 $\boldsymbol{v}(t)$ 相对初始状态 $\boldsymbol{v}_0$ 的雅可比矩阵。因为矢量场 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}, t)$ 对于 $\boldsymbol{v}$ 是连续的和分段线性的，由于 $t \geqslant 0$，$\boldsymbol{V}(t)$ 存在，且分段满足下述线性扰动方程组的初值问题，则有

$$\left.\begin{aligned} V &= \mathrm{D}_v f(v, t) V \\ \boldsymbol{V}(0) &= \boldsymbol{I} \end{aligned}\right\} \tag{15-139}$$

其中

$$\boldsymbol{V}(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x_0} & \dfrac{\partial x}{\partial y_0} & \dfrac{\partial x}{\partial \alpha_0} \\ \dfrac{\partial y}{\partial x_0} & \dfrac{\partial y}{\partial y_0} & \dfrac{\partial x}{\partial \alpha_0} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{D}_v \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}, t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial \alpha} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

为研究 Jacobi 矩阵 $\boldsymbol{V}(t)$ 对初始状态 v_0 的连续性，将(15-131) 与(15-139) 式合并为一个初值问题

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{v}} &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}, t) \\ \boldsymbol{v}(0) &= \boldsymbol{v}_0 \end{aligned}\right\} \tag{15-140}$$

其中

$$
\left.
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(t) &= \left[x, y, \alpha, \frac{\partial x}{\partial x_0}, \frac{\partial y}{\partial x_0}, \frac{\partial x}{\partial y_0}, \frac{\partial y}{\partial y_0}, \frac{\partial x}{\partial \alpha_0}, \frac{\partial y}{\partial \alpha_0}\right]^T \\
\boldsymbol{v}_0 &= [x_0, y_0, \alpha_0, 1, 0, 0, 1, 0, 0]^T \\
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}, t) &= \left[y, f, 0, \frac{\partial y}{\partial x_0}, \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_0}, \frac{\partial y}{\partial y_0},\right. \\
&\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y_0} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y_0}, \frac{\partial y}{\partial \alpha_0}, \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha_0} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha_0} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_0}\right]^T
\end{aligned}
\right\}
$$

这是一组在切换面上具有不连续性的分段的微分方程，因为方程(15-121)有惟一解 $\boldsymbol{v}(t)$ 及方程(15-129)是线性的，所以方程(15-130)的解 $\boldsymbol{v}(t)$ 显然是惟一的。惟一解 $\boldsymbol{v}(t)$ 对于初始态 $\boldsymbol{v}_0$ 总是连续的，从而 Jacobi 矩阵 $\boldsymbol{V}(t)$ 对初始态 $\boldsymbol{v}_0$ 也是连续的。

结果表明，尽管振子的矢量场是非光滑的，Poincare 映射对振子状态及控制参数是光滑的。因此，当在控制中把 Poincare 映射定义为振子的频闪采样时，OGY 方法对做周期强迫运动的非光滑振子的混沌控制是有效的。

15.8.3 在控制中延迟坐标的有效性

在设计控制实验中的一个重要问题就是根据现有的硬件和实验设备，选择合适的测量方法。当传感器的数目或获取系统数据的能力有限时，延时坐标的使用为表征动力系统的混沌特性提供了一个简单的方法。

对于所考虑的作周期性强迫运动的非光滑振子，可只采集位移或速度，甚至加速度样本来构造一个2维延迟坐标及相应的 Poincare 映射。如果延迟坐标是位移和速度的样本，则容易证明基于频闪采样的 Poincare 映射相对延迟坐标及控制参数是光滑的，因为光滑度是与相对初始状态的一定振子状态等价。

如果用延迟坐标从振子速度 $z(t)$ 采样，就需要检查 Poincare 映射的光滑度。一种简单的方法是将方程(15-121)对时间 t 求导，并研究下面的广义微分方程

$$
\left.
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{w}} &= \hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{w}, t) \\
\boldsymbol{w}(0) &= \boldsymbol{w}_0
\end{aligned}
\right\}
\tag{15-141}
$$

其中

$$
\left.
\begin{aligned}
\boldsymbol{w} &= [x, y, z, \alpha]^T \\
\boldsymbol{w}_0 &= [x_0, y_0, z_0, \alpha_0]^T \\
\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{w}, t) &= \left[y, z, \frac{\partial f}{\partial x}y + \frac{\partial f}{\partial y}z + \frac{\partial f}{\partial t}, 0\right]
\end{aligned}
\right\}
$$

这种微分方程具有一不连续的矢量场，因此，其解对初始状态连续，但不可微，同样对加速度 $z(t)$ 来说也不可微。上述分析表明，对作周期性强迫运动的非光滑振子，其加速度不能作为进行混沌控制的测量对象，不能用其构造延迟坐标。

15.8.4 混沌控制的实验

图15-43为一含弹性约束的两端固支梁的混沌实验框图。质量为0.25kg的质体放在梁的中部，系统的固有频率为10.07Hz，阻尼比为0.03、系统在低频干扰力作用下如果质体向上的位移超过1mm，则梁的运动被一个装有弹簧的弹性挡块所限制，弹簧的总刚度为8.03kg/n.m。

由于系统的对称性，第二阶固有模态不能被激起，第三阶的固有频率高达100Hz，所以该系统可以用受简谐干扰力作用的分段线性振子来模拟。根据方程中的换算参数可以发现，对控制混沌这一共同目的来说，调整干扰力的振幅相当于调整挡块间隙或梁的刚度。为了以较低的代价控制混沌，用控制参数 α 代替振幅，该参数可通过在数据采集系统中的程序控制放大器进行在线调整。

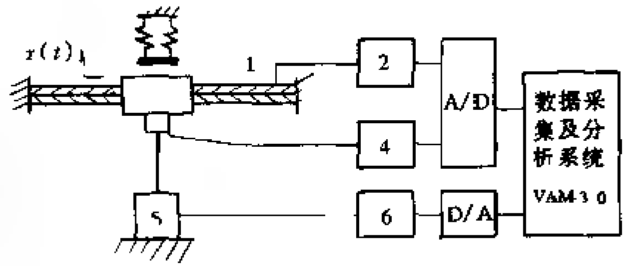


图 15-43 混沌控制实验框图

实验开始，将干扰频率 f_z 从3.0Hz调至8.0Hz，干扰力幅 α 从1.7kg调至1.9kg进行扫描来检查系统的动态特性。图15-44是 $f_F=4.0$Hz的典型分岔图。在Poincare截面 $t(\mathrm{mod}\ T_0)$ 上，水平轴代表振幅，纵轴表示静态位移。图中显示了由于倍周期分岔瀑布而产生的两个不同范围内的混沌运动。

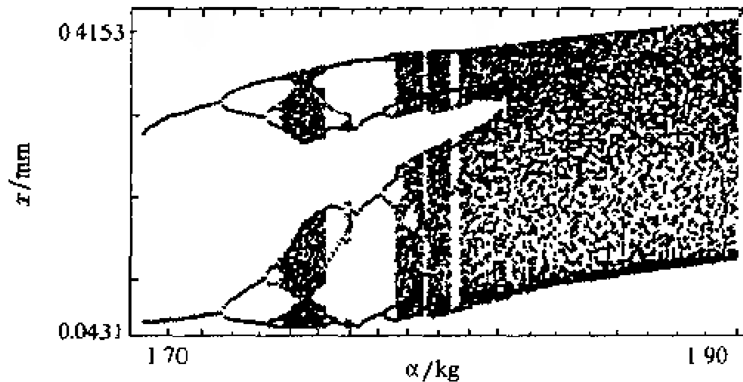


图 15-44 Poincare位移分岔图 $f_E=4.0$Hz

实验的第二步，在控制参数的标定值 $\alpha=1.85$kg，注意图15-44的典型混沌运动。从前面的分析中得知，为了构造延迟坐标，测量和采集了质体的位移。为简便起见，用术语“Pseudo相平面”表示在下文中将出现的延时坐标平面。为了采集基于控制混沌运动所需的数据，在采样率 $\Delta t=\dfrac{T_0}{64}$ 时，采集 $1024T_0$ 时间间隔内的位移。图15-45表示在延迟坐标的Poincare截面上混沌吸引子的1024个交点，图15-46表示在Pesudo相平面上 $64T_0$ 的时间间隔内的混沌运动。在这两个图中，时间延时 $\tau=25\Delta t$。

第三步，借助于标准的递推曲线，从已采集的混沌运动中抽取某一周期运动，对距离取最小值

$$\min_i\{|u_i-u_{i+64k}|,\ \cdots,\ |u_i-u_{i+64j}|>\delta,\ 1\leqslant j\leqslant k\}\tag{15-142}$$

其中 u_i，$i<1$ 是在Pseudo相平面上采集到的系统状态，δ 是一微小的正的阈值，以避免重复性识别较低周期的运动。因此可成功地采集到周期为 $T_0,2T_0,4T_0,6T_0$ 和 T_0 的不动点。已经选取的不动点 $u_F(\alpha)$ 在所抽取的不动点内是稳定的，所以用最小二乘法来估计在 $(u_F(\bar{\alpha}),\alpha)$ 上的Jacobi矩阵。

$$J(u_F(\bar{\alpha}),\alpha)=\Big[\sum_n(u_{n+1}-u_F)(u_n-u_F)^T\Big]\Big[\sum_n(u_n-u_F)(u_n-u_F)^T\Big]^{-1}\tag{15-143}$$

其中 u_n 是 Poincare 截面上的系统状态，并非常接近于 u_F。由 Jacobi 矩阵可得到特征值 λ_u 及特征向量 ψ_u。

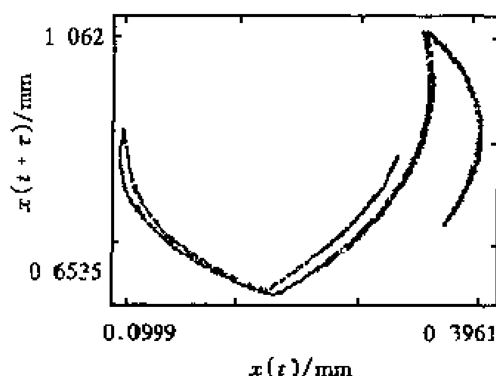


图 15-45 Poincare 截面上的混沌吸引子

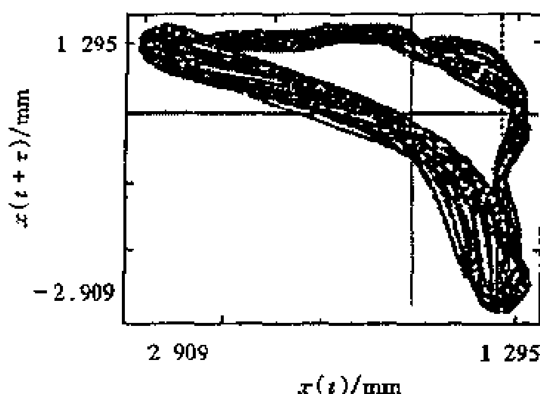


图 15-46 Pesudo 相平面上的混沌运动

在控制算法中，$\dfrac{\partial u_F(\alpha)}{\partial u}$ 的估计误差需要稍稍改变振幅 α 到某一新值，比如说 $\hat{\alpha}$。再次对位移采样，以便得到新的不动点 $u_F(\hat{\alpha})$。在所讨论的情况下，用在第一步 $\hat{\alpha}$ 1.90kg 时采集到的位移来抽取 $u_F(\hat{\alpha})$。

在这一步骤里，不动点 $u_F(\bar{\alpha})$ 和方程(15-136)中的矢量 β 均在控制之中。$\bar{\alpha}$ 1.85kg 时继续进行数据测量，当 Poincare 截面上的采样状态 u_n 落入半径为 0.01mm $u_F(\alpha)$ 的邻域内，并激起由方程(15-136)估计的振幅扰动。因为当 $u_F(\alpha)$ 和 β 已知时，$\Delta\alpha$ 的计算非常简单，振幅能在 1ms 内调整到新值。这样，振幅的控制相对于 0.25s 周期的简谐干扰力激振是瞬时有效的。图 15-47 及图 15-48 分别代表了周期为 T_0 和 $4T_0$ 的稳定运动。

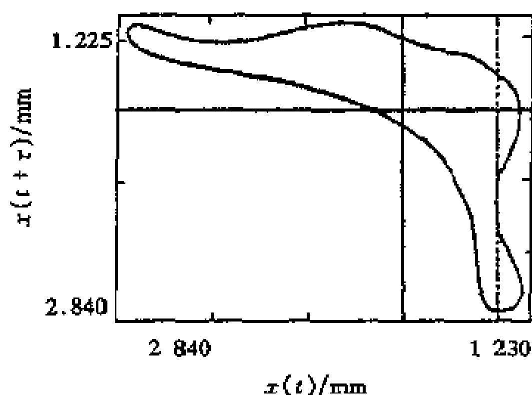


图 15-47 T_0 周期的控制轨道

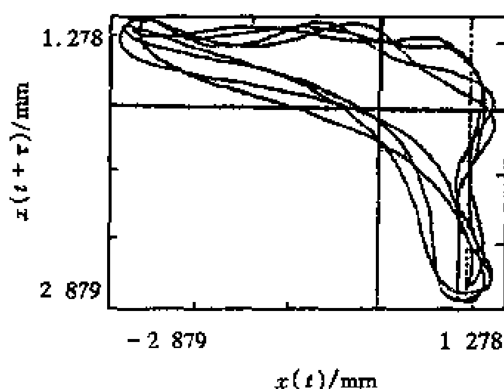


图 15-48 $4T_0$ 周期的控制轨道

综上所述，如果遵从下面规则：

1. Poincare 截面不是设置在任何切换面上，而是代之以恒定的干扰力相位下的状态子空间。

2. 描述 Poincare 映射的是标准振子状态或者是基于位移或速度而不是加速度的延迟坐标。

在生产率简谐激励下的非光滑振子的混沌运动可以通过 OGY 算法稳定的嵌入在混沌吸引子内的非稳定周期运动上。实验结果证实了上述结论。

计算与思考

1. 何谓被动控制?何谓主动控制?
2. 非线性隔振有哪些特点?在什么情况下可采用非线性隔振?
3. 试述非线性阻尼减振的机理,举出工程应用的若干实例。
4. 工程中应用的消振器有哪几种,哪些具有非线性的特征?
5. 非线性振动系统主动控制的策略和方法有哪几种?
6. 非线性转子系统主动控制的主要方法有哪些?试写出控制过程的参数慢变和具有滞后特性的运动方程式。
7. 对高层建筑的风震,如何实现主动控制?
8. 试述海洋平台非线性振动的主动控制的策略和方法。
9. 试述车辆悬架非线性控制的主要方法?
10. 试述混沌运动控制的方法与意义?

第十六章　非线性振动的利用

16.1　振动的工程应用及其发展

在人类的日常生活和生产活动中，人们往往只看到振动带来的危害，总是尽力设法去消除那些有害的振动，而对如何利用振动往往没有足够的重视。事实上，在生活与生产过程中，几乎任何时刻都离不开振动，有效地利用振动可提高生产效率，改善人民的生活环境和条件，使振动在最大的可能范围内为人类造福。目前，振动在人类生活与工农业生产等许多方面几乎是一种不可缺少的环节和必要的机制。因此，近二十年来，国内外的科技工作者对振动与波动的利用进行了大量的和有成效的研究[29, 33, 129, 130, 131]。例如，作物种子采用某种射线适当处理，可以在一定程度上提高作物的产量；在医疗方面，利用超声可治疗与诊断多种疾病；在工程地质领域，利用振动可以对地下资源进行勘探，在石油开采工作中，利用振动可提高原油产量；在海洋工程方面，海浪波动的能量可以用来发电；在土建工程中，振动沉拔桩、振动夯土、修筑高速公路时路基与路面的振动压实(压路)与振动摊铺、以及浇灌混凝土时的振动捣固等；在冶金、煤炭、化工、轻工、机械、电力、食品加工等部门，广泛应用振动给料、振动输送、振动筛分、振动冷却、振动烘干、振动破碎、振动粉磨和振动脱水等作业过程；在电子仪器和仪表与通讯工程方面，如录音机、电视机、收音机、程控电话、电子表及其他一些通讯设备中使用的谐振器都是由于利用了振动有效地工作；在文化娱乐方面，几乎所有乐器都利用了振动或波动原理。由前面举出的一些例子，不难看出，振动对人类的生活和生产是何等的重要呀！

利用振动或波动原理的系统，绝大多数是属于非线性振动系统，这些系统的一部分并非是主动有意识地或积极地利用非线性振动。而另一部分则是积极有意识地利用振动或波动，只有在非线性振动的工况下才能完成其工艺过程，或者是仅仅在这条件下才能有效地工作，这些系统利用了非线性振动所具有的本质特性。本章将通过一些实际例子讨论非线性振动的利用。

16.2　利用复摆测定摩擦系数

下面介绍两种方法，第一种方法直接利用复摆摆角每一振动周期的衰减值算出摩擦系数的大小；第二种方法利用 Froude 摆的工作原理对摩擦系数进行测量与计算，当然后一种方法更为准确[62,63]。

16.2.1　利用复摆测量轴与内套的干摩擦系数

复摆在摆动过程中，由于轴与内套间的摩擦，在缺乏外部和内部激励的条件下，摆幅将逐渐减小直至停止。假设轴与内套间的摩擦为与速度无关的常数，则复摆运动的微分方程式为

$$J\ddot{\varphi} = \varepsilon M_r - mgl\sin\varphi \tag{16-1}$$

式中　J —— 摆的转动惯量；

m —— 摆的质量；

l —— 摆的质心至悬挂点的距离；

M_r —— 摩擦力矩。

摩擦力矩 M_r 可表示为

$$M_r = (mg\cos\varphi + ml\dot{\varphi}^2)rf(\varphi) \tag{16-2}$$

将式(16-2)代入式(16-1)，得

$$J\ddot{\varphi} = \varepsilon(mg\cos\varphi + ml\dot{\varphi}^2)rf(\dot{\varphi}) - mgl\sin\varphi$$

由于摩擦的存在，当摆的初始摆角为 φ_0 时，经过一个振动周期以后，摆幅将减小至 φ_1，再经过一个振动周期以后，又减小至 φ_2，每一振动周期，摆动幅角的减小值为 $\Delta\varphi = \varphi_n - \varphi_{n-1}$。这一数值与摩擦系数的大小有直接的关系，并根据这一数值计算出摩擦系数的值，下面将说明这个关系。

设滑动摩擦系数 $f(\dot{\varphi})$ 有以下表示式

$$f(\dot{\varphi}) = \text{sgn}\dot{\varphi} = \begin{cases} -f, & \dot{\varphi} \geqslant 0 \\ f, & \dot{\varphi} \leqslant 0 \end{cases} \tag{16-3}$$

式中　f —— 滑动摩擦系数，摩擦系数 $\text{sgn}\dot{\varphi}$ 是与相对速度的方向相反，通过实验测出 $\Delta\varphi$，再按理论公式计算出 f 具体的数值。

下面将找出 $\Delta\varphi$ 与 f 的关系。设方程的一次近似解为

$$\varphi = a\cos\omega_e t \tag{16-4}$$

$$\dot{\varphi} = -a\omega_e\sin\omega_e t$$

有

$$\frac{da}{dt} = -\delta_e a$$

其中

$$\delta_e = \frac{c_e}{2J}$$

$$\omega_e = \sqrt{\frac{k_e}{J}}, \quad \omega_0^2 = \frac{mgl}{J} \tag{16-5}$$

$$c_e = -\frac{1}{\pi\omega_0 a}\int_0^{2\pi} f_0(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi)\sin\psi d\psi$$

$$k_e = \frac{1}{\pi a}\int_0^{2\pi} f_0(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi)\cos\psi d\psi \tag{16-6}$$

$$f_0(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi)$$

$$= -mgla\cos\psi + \left(mg - mg\frac{a^2\cos^2\varphi}{2} + mla^2\omega_0^2\sin^2\psi\right)rf(-a\omega_0\sin\psi) + \frac{1}{6}mgla^3\cos^3\psi$$

将非线性函数代入上式，可求得

$$c_e = \frac{4m}{\pi\omega_0}\left(\frac{g}{a} + a\omega_0^2 l\right)rf$$

$$k_e = mgl\cdot\left(1 - \frac{3}{24}a^2\right)$$

$$\delta_e = \frac{c_e}{2J} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{l} + \frac{a^2\omega_0^2}{g}\right)rf\omega_0 \tag{16-7}$$

$$\omega_e = \sqrt{\frac{mgl}{J}\left(1 - \frac{3}{24}a^2\right)}$$

因为摩擦阻力矩的存在，振幅是衰减的，其方程式为

$$\frac{da}{dt} = -\delta_e a - \frac{4m}{\pi\omega_0}(g + a^2\omega_0^2 l)rf \tag{16-8}$$

根据以上方程可作出振幅的衰减曲线，进而可算出干摩擦系数的值。

16.2.2　利用沸洛特摆测量滑动轴承的动摩擦系数

1. 轴与内套之间的动摩擦系数的测量

通过摩擦摆试验可以测定轴与内套之间的动摩擦系数，图 16-1 为其力学模型。转动轴上的外套及摆的内套为一组试件，滑动面半径为 r，摆的重心至转动轴心距离为 l。当轴以角速度 Ω 逆时针转动时，摩擦力将带动摆偏转 φ 角度。

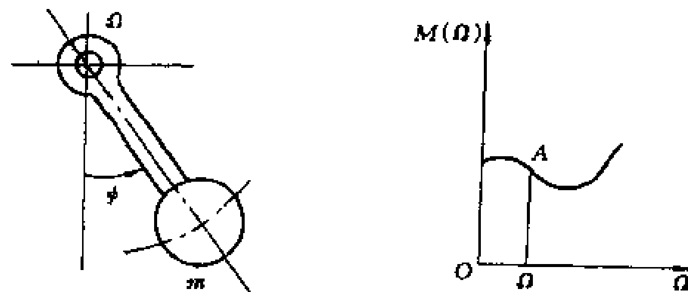


图 16-1　Froude 摆

摆的运动微分方程为

$$J\ddot{\varphi} = M_r - mgl\sin\varphi - ul\dot{\varphi} \tag{16-9}$$

式中　J —— 摆的转动惯量；

m —— 摆的质量；

M_r —— 摩擦力矩；

u —— 空气阻力系数。

摩擦力矩 M_r 可表示为

$$M_r = (mg\cos\varphi + ml\dot{\varphi}^2)rf(\Omega - \dot{\varphi}) \tag{16-10}$$

摩擦系数 $f(\Omega - \dot{\varphi})$ 是相对速度的函数，将式(16-10)代入式(16-9)，得

$$J\ddot{\varphi} = (mg\cos\varphi + ml\dot{\varphi}^2)rf((\Omega - \dot{\varphi}) - mgl\sin\varphi - ul\dot{\varphi} \tag{16-11}$$

当转轴以 Ω 角速度转动而摆处于静平衡状态时，有 $\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} = 0$，这时 $\varphi = \varphi_0$，则有

$$rf(\Omega)\cos\varphi_0 - l\sin\varphi_0 = 0 \tag{16-12}$$

即

$$f(\Omega) = \frac{l}{r}\tan\varphi_0 \quad 或 \quad f(\nu) = \frac{l}{r}\tan\varphi_0 \tag{16-13}$$

由此可见，在实验过程中摆处于静止不动时，则偏角 φ_0 极易测出，从而由式(16-13)可计算出动摩擦系数 $f(\nu)$ 的值，改变轴的转速，又可测出另一转速下试件的动摩擦系数。

通过大量的试验，动滑动摩擦系数 $f(\nu)$ 有以下表示式

$$f(\nu) = a - b\nu + c|\nu|\nu + d\nu^3 \tag{16-14}$$

式中　a, b, c, d —— 系数，可由实验确定。

2. 摆在静平衡位置邻域振动的情况下摩擦系数的测定

设

$$F(\Omega-\dot{x}) = A - B(\Omega-\dot{x}) + C(\Omega-\dot{x})^2 + D(\Omega-\dot{x})^3$$
$$= (A - B\Omega + C\Omega^2 + D\Omega^3) + (B - 2C\Omega - 3D\Omega^2)\dot{x} + (C + 3D\Omega)\dot{x}^2 - D\dot{x}^3 \tag{16-15}$$

将式(16-15)代入式(16-11)，有

$$J\ddot{x} + [ul - (B - 2C\Omega - 3D\Omega^2) - (C + 3D\Omega)\dot{x} + D\dot{x}^2]\dot{x} - (A - B\Omega + C\Omega^2 + D\Omega^3) + mgl\sin\varphi_0 + mgl\cos\varphi_0 x = 0 \tag{16-16}$$

设

$$A_0 = -(A - B\Omega + C\Omega^2 + D\Omega^3) + mgl\sin\varphi_0$$
$$B_0 = ul - B - 2C\Omega - 3D\Omega^2 \tag{16-17}$$
$$C_0 = C + 3D\Omega$$

则

$$J\ddot{x} + (B_0 - C_0\dot{x} + D\dot{x}^2)\dot{x} + A_0 + mgl\cos\varphi_0 \cdot x = 0 \tag{16-18}$$

即
$$\ddot{x} + \frac{1}{J}(B_0 - C_0\dot{x} + D\dot{x}^2)\dot{x} + \frac{A_0}{J} + \omega_0^2 \cdot x = 0 \tag{16-19}$$

式中
$$\omega_0^2 = \frac{mgl\cos\varphi_0}{J} \tag{16-20}$$

设　$x_1 = \frac{A_0}{\omega_0^2 J} + x$，当转速固定时 A_0 为常数，则式(16-19)变为

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \varepsilon F(x_1, \dot{x}_1)$$
$$\varepsilon F(x_1, \dot{x}_1) = -\frac{1}{J}(B_0 - C_0\dot{x}_1 + D\dot{x}_1^2)\dot{x}_1 \tag{16-21}$$

式(16-21)的一次近似解为

$$x_1 = \varphi_0\cos\psi$$
$$\frac{d\varphi_0}{dt} = \varepsilon\delta_e(\varphi_0)\varphi_0 \tag{16-22}$$
$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon\omega_1(\varphi_0)$$

其中

$$\varepsilon\delta_e(\varphi_0)\varphi_0 = -\frac{1}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi} F(\varphi_0\cos\psi,\quad \varphi_0\omega_0\sin\psi)\sin\psi d\psi$$
$$= -\frac{1}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi} -\frac{1}{J}(-B_0\varphi_0\omega_0\sin\psi - C_0\varphi_0^2\omega_0^2\sin^2\psi - D\varphi_0^3\omega_0^3\sin^3\psi)\sin\psi d\psi$$
$$= -\frac{B_0}{2J}\varphi_0 - \frac{3D\omega_0^2}{8J}\varphi_0^3 \tag{16-23}$$

由此可得

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = -\frac{\varphi_0}{2J}\left(B_0 + \frac{3}{4}D\omega_0^2\varphi_0^2\right) \tag{16-24}$$

对上式积分，可得

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{\sqrt{e^{\frac{B_0}{2MJ}t} + \frac{3D\omega_0^2}{4B_0}\varphi_0^2(e^{\frac{B_0}{2MJ}t} - 1)}} \tag{16-25}$$

由式(16-25)可看出，当角速度很小时，$B_0 < 0$，当角速度大时，$B_0 > 0$。

当 $B_0>0$ 时，式(16-25) 分母随时间的增加趋于无穷大，所以 $\varphi\to 0$，φ_0 是渐近稳定的。当 $B_0<0$，即低转速时，随时间的增大则有

$$\varphi=\sqrt{\frac{4B_0^2}{3D\omega_0^2}} \tag{16-26}$$

当 $B_0=0$，$\varphi=\varphi_0$，则有稳态等幅振动，φ_0 可从下式求出

$$\varphi_{\max}=\varphi_0+\varphi_{01}\qquad \varphi_{\min}=\varphi_0-\varphi_{01}$$

$$\varphi_0=\frac{1}{2}(\varphi_{\max}+\varphi_{\min}) \tag{16-27}$$

从测试仪表上可以读出 $\varphi_{\max}$ 和 $\varphi_{\min}$ 的值，由(16-27) 可以求出摆的平衡位置时的偏角 φ_0，代入式(16-13) 可求得摩擦系数 $f(\nu)$ 的值。

16.3 硬式光滑非线性振动系统的利用

16.3.1 增加电磁式振动机振幅稳定的措施

对于一些在共振情况下工作的振动机械，往往存在振幅不稳定的缺点，例如，电磁振动给料机、近共振型振动输送机和共振筛等。振幅不稳定会给机械的工作性能带来不良影响，为了消除前述缺点，可以采用具有硬式非线性恢复力的振动系统。

为了消除一般电磁振动给料机振幅不稳定的缺点，有的科技工作者提出，将主共振板弹簧的两端固接处做成带有曲线的形式，随着振幅的增大，板弹簧的工作长度将变短，因此，弹簧刚度随振幅的增大而增加。其表示式为：

$$\phi(x)=kx+Q(\dot{x},x)=f\dot{x}+kx+bx^3+dx^5 \tag{16-28}$$

式中 k——线性部分的刚度；

f——阻力系数；

b,d——常数。

电磁振动给料机为双质体振动系统，参照图 16-2 的力学模型图。

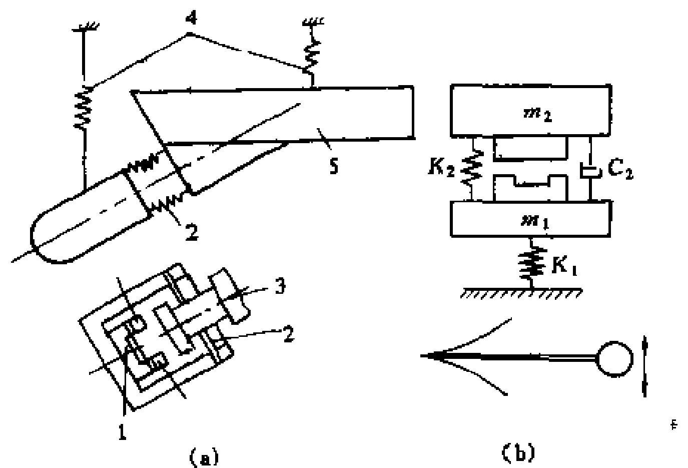


图 16-2 电磁振动给料机的工作机构及力学模型

该机的运动微分方程式可表示为

$$
\begin{aligned}
&m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k(x) = F_0 + F_1\sin\nu t_1 + F_2\sin2\nu t_2 - \varepsilon Q(\dot{x},x)\\
&m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 - k(x) = -(F_0 + F_1\sin\nu t_1 + F_2\sin2\nu t_2) + \varepsilon Q(\dot{x},x) \qquad (16\text{-}29)\\
&x = x_1 - x_2,\quad \dot{x} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2
\end{aligned}
$$

式中 m_1, m_2 —— 分别为质体 1 和质体 2 的质量;

k_1、k_2 和 k —— 分别为质体 1 和质体 2 上弹簧的刚度及两个质体间的弹簧刚度;

x_1、x_2 和 x —— 分别为质体 1 和质体 2 的位移及两个质体的相对位移;

ν —— 激振频率。

可将以上方程写成矩阵形式

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} + \varepsilon\boldsymbol{Q}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k & -k \\ -k & k_2 + k \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F} = \begin{Bmatrix} F_0 + F_1\sin\nu t_1 + F_2\sin2\nu t_2 \\ -(F_0 + F_1\sin\nu t_1 + F_2\sin2\nu t_2) \end{Bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{Bmatrix} -Q(\dot{x},x) \\ Q(\dot{x},x) \end{Bmatrix} \qquad (16\text{-}30)$$

为了求出上述方程的解,先将方程变换至主坐标上,为此必先求出系统的两个固有频率与振型函数。由以下代数行列式可求出两个频率,即

$$\begin{vmatrix} k_{11} - m_{11}\omega^2 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - m_{22}\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (16\text{-}31)$$

$$\omega_{0i} = \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},\quad a = m_{11}m_{22},\quad b = -(m_{11}k_{22} + m_{22}k_{11}),$$

$$c = k_{11}k_{22} - k_{12}^2,\ k_{12} = k_{21},\ i = 1,2$$

而振型函数可由下式求出

$$\phi_1^{(i)} = 1,\quad \phi_2^{(i)} = -\frac{k_{11} - m_{11}\omega_{0i}^2}{k_{12}} = -\frac{k_{12}}{k_{22} - m_{22}\omega_{0i}^2},\quad i = 1,2$$

电磁振动给料机通常在第二固有频率附近工作。当固有频率和振型函数已知的情况下,可设方程的解为

$$
\begin{cases}
x_1 = \phi_1^{(2)}x_0 = \phi_1^{(2)}(a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin2\varphi_2)\\
x_2 = \phi_2^{(2)}x_0 = \phi_2^{(2)}(a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin2\varphi_2)\\
x_0 = a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin2\varphi_2,\quad \varphi_r = \nu t_r + \theta_r
\end{cases}
\qquad (16\text{-}32)
$$

代入原振动方程中,并化简,得第二主坐标上的方程

$$m(\ddot{x} - \nu^2 x_0) = \sum_{r=1}^{2}\varepsilon Q_r\phi_r^{(2)} + \sum_{r=1}^{2}\phi_r^{(2)}(F_{0r} + F_{1r}\sin\varphi_1 + F_{2r}\sin2\varphi_2)$$

$$m = m_1\phi_1^{(2)^2} + m_1\phi_2^{(2)^2},\quad F_{01} = -F_{02},\quad F_{11} = -F_{12},\quad F_{21} = F_{22} \qquad (16\text{-}33)$$

式(16-32)的 a 和 θ 可由下式求出

$$\frac{da_i}{dt} = -a_i\delta_e^{(2)} - \sum_{i=1}^{2}\sum_{r=1}^{2}F_i\psi_r^{(2)}\cos\theta_i/m(i\nu+\omega_2)$$
$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_e^{(2)} - \nu + \sum_{i=1}^{2}\sum_{r=1}^{2}F_i\psi_r^{(2)}\sin\theta_i/ma_i(i\nu+\omega_2) \tag{16-34}$$

式中 $\delta_e^{(2)},\omega_e^{(2)}$ 为等效衰减率和等效固有频率，可分别由下式求解：

$$\delta_e^{(2)} = \frac{1}{2\pi ma_i i\nu}\int_0^{2\pi}\sum_{r=1}^{2}\varepsilon Q_{r0}^{(2)}(a_i,\varphi_i)\psi_r^{(2)}\sin i\varphi_i\mathrm{d}\varphi_i$$
$$\omega_e^{(2)} = \omega_2 - \frac{1}{2\pi mi\nu}\int_0^{2\pi}\sum_{r=1}^{2}\varepsilon Q_{r0}^{(2)}(a_i,\varphi_i)\psi_r^{(2)}\cos i\varphi_i\mathrm{d}\varphi_i \tag{16-35}$$

定常情况下由于有 $\frac{da_i}{dt}=0,\ \frac{d\theta}{dt}=0$ 成立，于是可得到以下方程：

$$m^2a_i^2[((\omega_e^{(2)})^2-(i\nu)^2)^2+4(\delta_e^{(2)})^2(i\nu)^2] = (F_i^{(2)})^2$$
$$\theta_i = \arctan((\omega_e^{(2)})^2-(i\nu)^2)/2i\nu\delta_e^{(2)}$$
$$F_i^{(2)} = F_{i1}\psi_1^{(2)} + F_{i2}\psi_2^{(2)} \tag{16-36}$$

由于该系统为硬式非线性系统，其共振曲线与线性系统有显著的区别，由图16-3可见，当频率或阻尼发生变化时，在亚共振区域振幅稳定性明显优于线性振动系统。

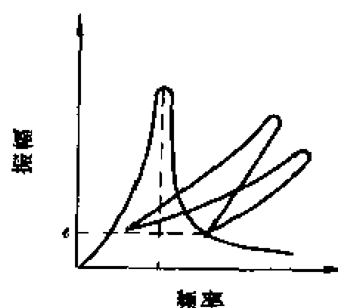


图 16-3 硬式非线性系统与线性系统振幅稳定之比较

16.4 分段线性非线性振动系统的工程应用

16.4.1 硬式对称分段线性的非线性振动系统

有些弹性连杆式振动输送机采用硬式分段线性非线性振动系统，其工作机构如第一章中的图1-5(a)所示，而力学模型见图1-5(b)。上方的质体用于输送物料，下方的质体作平衡质体使用。在两个质体之间，装有线性弹簧和带间隙的分段线性的非线性弹簧，连杆头部装有连杆弹簧，平衡质体下方还有隔振弹簧。按照力学模型图，可列出该振动系统的运动微分方程式

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + c\dot{x} + (k_0+k)x = k_0r\sin\nu t - Q(x,\dot{x})$$
$$m_2\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 - c\dot{x} + k_2x - (k_0+k)x = -k_0r\sin\nu t + Q(x,\dot{x}) \tag{16-37}$$
$$x = x_1 - x_2$$

式中 x_1,x_2 和 x —— 质体1和质体2相对于静平衡位置的位移及相对位移；

m_1,m_2 —— 质体1和质体2的质量；

ν —— 偏心转子的回转角速度；

r —— 偏心距；

k_0 —— 连杆弹簧刚度；

k —— 线性弹簧刚度；

k_2 —— 质体 m_2 与基础间弹簧的刚度；

c_1, c_2—— 与 $\dot{x}_1$ 和 $\dot{x}_2$ 成正比的阻力系数；

$Q(x, \dot{x})$—— 间隙弹簧与线性弹簧的分段作用力：

$$Q(x, \dot{x}) = \begin{cases} 0, & \text{当} \ -e < x < e \\ \Delta c\dot{x} + \Delta k(x - e), & \text{当} \ x > e \\ \Delta c\dot{x} + \Delta k(x + e), & \text{当} \ x < -e \end{cases} \tag{16-38}$$

式中　Δk——m_1 两侧间隙弹簧的刚度；

Δc—— 与 m_1 两侧间隙弹簧的刚度成正比的阻力系数；

e—— m_1 两侧的间隙。

由于左右间隙弹簧刚度及间隙为对称，当机器正常工作时，在一次近似情况下，振动中心将不会发生偏移。

方程可化为：

$$\begin{aligned} & m_1\ddot{x}_1 + C\dot{x} + c_1\dot{x}_1 + K(x_1 - x_2) = k_0 r\sin\nu t - \varepsilon Q_1 \\ & m_2\ddot{x}_2 - C\dot{x} + c_2\dot{x}_2 - K(x_1 - x_2) + k_2 x_2 = -k_0 r\sin\nu t + \varepsilon Q_2 \\ & C = c + c_e, \quad K = k_0 + k + k_e \\ & k_e = k_0 + k + \Delta k\left[1 - \frac{2}{\pi}\left(\varphi_e - \frac{1}{2}\sin 2\varphi_e\right)\right] \\ & \varphi_e = \arccos\frac{e}{a} \end{aligned} \tag{16-39}$$

上式中，c_e 和 k_e 分别为等效线性化得出的阻力系数和弹簧刚度。这时，非线性作用力可表示如下：

$$\varepsilon Q_1 = -\varepsilon Q_2 = c_e\dot{x} + k_e x + \begin{cases} 0, & \text{当} \ -e < x < e \\ -\Delta c\dot{x} - \Delta k(x - e), & \text{当} \ x > e \\ -\Delta c\dot{x} - \Delta k(x + e), & \text{当} \ x < -e \end{cases} \tag{16-40}$$

上式可写成矩阵形式，即

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} + \varepsilon\boldsymbol{Q}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_1 + C & -C \\ -C & c_2 + C \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & k_2 + K \end{bmatrix} \tag{16-41}$$

$$\boldsymbol{F} = \begin{Bmatrix} k_0 r\sin\nu t \\ -k_0 r\sin\nu t \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}$$

下面我们进一步求方程的解。

由于该种机器一般在第二固有频率附近工作，通常我们按下述方法求其一次近似解：先求出二阶固有频率及振型函数，再将方程转换到第二主坐标上求解。

$$\begin{aligned} & \psi_1^{(2)} = 1 \\ & \psi_2^{(2)} = (K - m_1\omega_2^2)/K = K/(K + k_2 - m_2\omega_2^2) \\ & m_1 m_2\omega_j^4 - [(K + k_2)m_1 + Km_2]\omega_j^2 + Kk_2 = 0, \quad j = 1,2 \end{aligned} \tag{16-42}$$

在振型及固有频率已知的情况下，设

$$\begin{cases} x_1 = \psi_1^{(2)} x_0 = \psi_1^{(2)} a\cos\varphi \\ x_2 = \psi_2^{(2)} x_0 = \psi_2^{(2)} a\cos\varphi \\ x_0 = a\cos\varphi, \quad \varphi = \omega_2 t + \theta \end{cases} \tag{16-43}$$

代入(16-41)式可得第二主坐标上的方程：

$$m(x_0 - \nu^2 x_0) = \sum_{r=1}^{2} \varepsilon Q_r \psi_r^{(2)} + \sum_{r=1}^{2} \varepsilon E_r \psi_r^{(2)} \cos\nu t$$
$$m = m_1 \psi_1^{(2)^2} + m_2 \psi_2^{(2)^2}, \quad E_1 = m_0 \nu^2 r, \quad E_2 = 0 \tag{16-44}$$

方程(16-43)中 a 和 θ 可由下式求出：

$$\frac{da_t}{dt} = -a\delta_e^{(2)} - \sum_{r=1} \varepsilon E_r \psi_r^{(2)} \cos\theta / m(\nu + \omega_2)$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_e^{(2)} - \nu + \sum_{r=1} \varepsilon E_r \psi_r^{(2)} \sin\theta / ma(\nu + \omega_2) \tag{16-45}$$

式中　$\delta_e^{(2)}$，$\omega_e^{(2)}$ 为等效衰减率和等效固有频率，可分别由下式求解

$$\delta_e^{(2)} = \frac{1}{2\pi ma\nu}\int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^{2} \varepsilon Q_{r0}^{(2)}(a,\varphi)\psi_r^{(2)} \sin\varphi d\varphi$$
$$\omega_e^{(2)} = \omega_2 - \frac{1}{2\pi m\nu}\int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^{2} \varepsilon Q_{r0}^{(2)}(a,\varphi)\psi_r^{(2)} \cos\varphi d\varphi \tag{16-46}$$

定常情况下由于有 $\frac{da}{dt} = 0$，$\frac{d\theta}{dt} = 0$ 成立，于是可得到以下方程

$$m^2 a^2 [(\omega_e^{(2)^2} - (\nu)^2)^2 + 4\delta_e^{(2)^2} \nu^2] = E^{(2)^2}$$
$$\theta = \arctan(\omega_e^{(2)^2} - \nu^2)/2\nu\delta_e^{(2)} \tag{16-47}$$
$$E^{(2)} = E_1 \psi_1^{(2)} + E_2 \psi_2^{(2)}$$

由该方程可得到系统的幅频响应曲线和相频响应曲线如下：

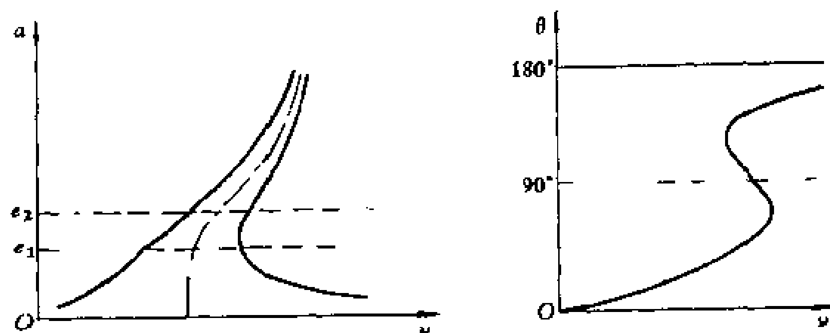


图 16-4　幅频与相频曲线图

图 16-4 反映了系统硬式非线性的特点。因为系统的实际工作频率通常略低于系统的二阶固有频率，一般取工作频率 $\nu = (0.85 \sim 0.95)\omega_e^{(2)}$，为提高计算精度，可以按下述方法进一步求系统改进的一次近似解。设

$$x_s = \psi_s^{(2)} a\cos\varphi + \varepsilon u_s^{(2)}(a,\varphi), \quad s = 1,2 \tag{16-48}$$

$$u_s^{(2)} = \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 1,-1}}^{n=\infty} \psi_r^{(2)} \frac{\int_0^{2\pi} \sum \psi_r^{(2)} Q_{r0}^{(2)}(a,\varphi) e^{-in\nu t} d\varphi}{m(\omega_r^{(2)^2} - n^2\nu^2)} e^{in\nu t} \tag{16-49}$$

16.4.2　软式不对称分段线性非线性振动系统

在工业部门中为了完成所需的工艺过程，往往要求工作机体有一定运动轨迹，在选矿工业中应用的弹簧摇床，就是根据所要求的运动轨迹而设计的一种特殊的非线性振动机构及

系统。图 16-5 表示了该种机械工作机构和力学模型。由图可见，该机由两个振动质体组成，两个振动质体的左右侧分别安装有线性软弹簧和工作时带有间隙的硬弹簧，使质体产生振动的单轴惯性激振器装于质体 2 上。参照力学模型图可列出该系统的运动微分方程式：

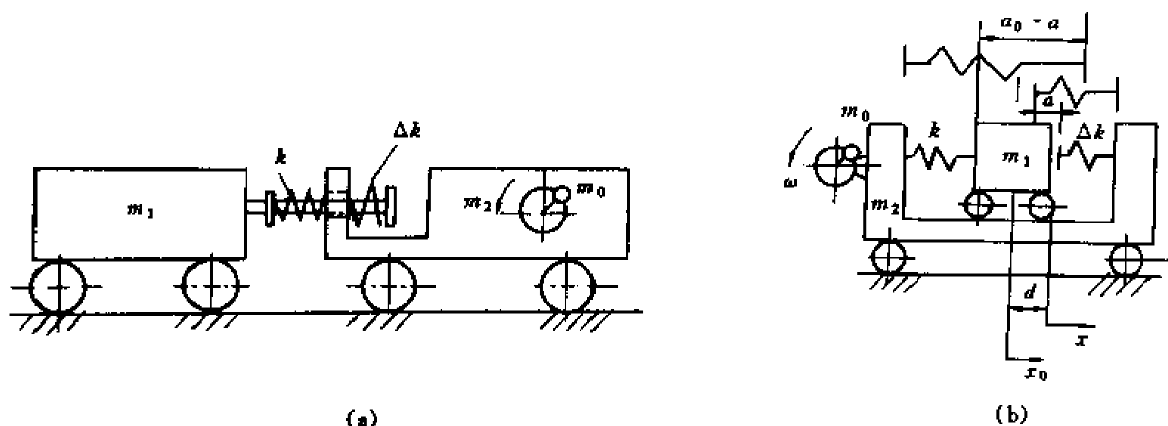


图 16-5　弹簧摇床的工作机构和力学模型

$$
\begin{aligned}
& m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_ex = \varepsilon\Delta Q(\dot{x}, x) \\
& m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 - k_ex = m_0r\nu^2\cos\nu t - \varepsilon\Delta Q(\dot{x}, x) \qquad (16\text{-}50) \\
& x = x_1 - x_2, \quad \dot{x} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2
\end{aligned}
$$

$$
\Delta Q(\dot{x}, x) = \begin{cases} -k(b_0 - b - x) - \Delta k(b + x) - (f + \Delta f)\dot{x} + k_ex, & x \geqslant -b \\ -k(b_0 - b - x) - f\dot{x} + k_ex, & x \leqslant -b \end{cases} \qquad (16\text{-}51)
$$

式中　m_1 和 m_2——分别为质体 1 和质体 2 的质量；

x_1，x_2 和 x——分别为质体 1 和质体 2 的位移及两个质体的相对位移；

m_0——偏心块质量；

ν——偏心转子的回转角速度；

r——偏心距；

k_1 和 k_2——质体 1 和质体 2 的弹簧的刚度；

$Q(\dot{x}, x)$ 和 $\Delta Q(\dot{x}, x)$——分别为非线性作用力与残余非线性作用力；

b——静止状态下硬弹簧压缩量；

$b_0 - b$——静止状态下软弹簧压缩量；

k 和 Δk——软弹簧与硬弹簧的刚度；

f 和 Δf——软弹簧与硬弹簧工作区段的阻力系数。

上述方程为二自由度系统振动的运动方程式，可按上一节的方法求出固有频率及振型函数，然后将方程式变换到主坐标上，再按照单自由系统的渐近方法进行求解。下面我们将用较简便的方法进行分析。由于上述方程中的隔振弹簧的刚度很小，近似计算时可以略去。这时方程可写为

$$
\begin{aligned}
& m_1\ddot{x}_1 + k_ex = \varepsilon\Delta Q(\dot{x}, x) \\
& m_2\ddot{x}_2 - k_ex = m_0r\nu^2\cos\nu t - \varepsilon\Delta Q(\dot{x}, x) \qquad (16\text{-}52) \\
& x = x_1 - x_2, \quad \dot{x} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2
\end{aligned}
$$

第一式乘 $\frac{m_2}{m_1+m_2}$ 减去第二式乘 $\frac{m_1}{m_1+m_2}$,即得

$$
\begin{aligned}
&m\ddot{x}+k_e x = \varepsilon\Delta Q(\dot{x},x)+E_1\cos\nu t\\
&m_2\ddot{x}_2-k_e x = E_2\cos\nu t-\varepsilon\Delta Q(\dot{x},x)\\
&m=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2},\ x=x_1-x_2,\quad E_1=\frac{m}{m_1}m_0r\nu^2,\quad E_2=m_0r\nu^2
\end{aligned}
\tag{16-53}
$$

在前面的表示式中直接引入了等效刚度,目的为使方程的一次近似更接近于实际工作系统。将非线性作用力表示为某一等效线性恢复力和残余非线性恢复力之和,即

$$
\begin{aligned}
&Q(\dot{x},x)=k_e x+\Delta Q(\dot{x},x)\\
&k_e=\frac{1}{2\pi\nu m}\int_0^{2\pi}Q(a\cos\varphi,-a\nu\sin\varphi)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\\
&\Delta Q(\dot{x},x)=Q(\dot{x},x)-k_e x
\end{aligned}
\tag{16-54}
$$

由于弹性力的不对称性,机器正常工作时,振动中心对原始静止位置将偏离距离 d,此值可根据位能平衡条件求出

$$\int_{a-d}^{a+d}Q(x)\mathrm{d}x=0 \tag{16-55}$$

即
$$\frac{1}{2}\Delta k[a-(d-b)]^2=k(b_0-b+d)2a$$

式中　b_0 — 软弹簧与硬弹簧预压量之和,软弹簧的预压量为 b_0-b;

b — 硬弹簧预压量。

根据力的平衡条件:$\Delta kb=k(b_0-b)$

即
$$b=\frac{kb_0}{k+\Delta k} \tag{16-56}$$

由前式可按下式求出 d

$$
\begin{aligned}
&Ad^2+Bd+C=0\\
&A=1,\quad B=-2\left[\left(\frac{2b}{b_0-b}+1\right)a+b\right],\quad C=(a+b)^2-4ab
\end{aligned}
\tag{16-57}
$$

该种振动机在近共振情况下工作,下面求方程的共振解。按相对位移表示的运动微分方程式的解可设为

$$x=-d+a\cos(\nu t+\theta)=-d+a\cos\varphi \tag{16-58}$$

式中　a—— 相对振幅。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=-\varepsilon\delta_e(a)+\cdots\\
&\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega_0-\nu+\varepsilon\omega_1(a)+\cdots
\end{aligned}
\tag{16-59}
$$

其中　δ_e,ω_e 为等效衰减率和等效固有频率,可分别由下式求解:

$$
\begin{aligned}
\delta_e&=\frac{1}{2\pi ma\nu}\int_0^{2\pi}\Delta Q_0(a,\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\\
&=\frac{1}{2m}\left\{f+\frac{1}{2}\Delta f\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\left(\varphi_e+\frac{1}{2}\sin2\varphi_e\right)\right\}\\
\omega_e&=\omega_0-\frac{1}{2\pi ma\nu}\int_0^{2\pi}\Delta Q_0(a,\varphi)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}
\tag{16-60}
$$

$$= \sqrt{\frac{k + \frac{1}{2}\Delta k\left[1 - \frac{2}{\pi}\left(\varphi_e + \frac{1}{2}\sin 2\varphi_e\right)\right]}{m}}$$

$$\varphi_e = \arcsin\frac{d - b}{a} \tag{16-61}$$

在定常情况下由于有 $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = 0, \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0$ 成立，于是可得到以下方程：

$$\begin{aligned} m^2a^2[(\omega_e^2 - \nu^2)^2 + 4\delta_e^2\nu^2)] &= E^2 \\ \theta = \arctan(\omega_e^2 - \nu^2)^2/2\nu\delta_e \end{aligned} \tag{16-62}$$

由该方程可得到系统的幅频响应曲线，如图16-6所示。图中曲线反映了系统软式非线性的特点。

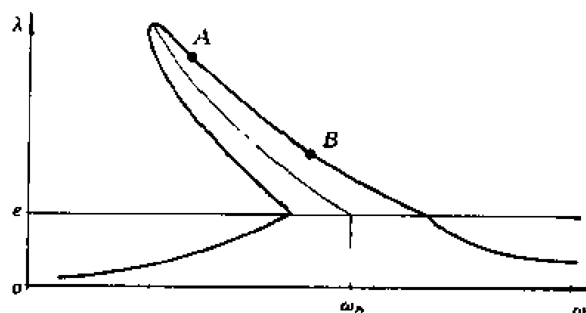


图 16-6　幅频曲线图

因为系统的工作频率通常略低于系统的二阶固有频率，一般取 $\nu = (0.85 \sim 0.95)\omega_e^{(2)}$。这种振动机之所以采用不对称非线性振动系统，其目的是要获得不对称的运动轨迹，但前面求出的一次近似解只有一次谐波成分，即其振动曲线为简谐形式。而不对称的振动系统含有较大的二次谐波成分，因此，必须求出高次谐波成分，特别是二次谐波成分。由于各次谐波合成的曲线呈不对称形，这种曲线可使床面上的物料向某一方向运动。

高次谐波可以按下述方法进一步求系统改进的一次近似解得出。设

$$x = a\cos\varphi + \varepsilon u_1(a, \varphi)$$

$$\varepsilon u_1 = \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 1,-1}}^{n=\infty}\frac{\int_0^{2\pi}Q_0(a,\varphi)e^{-in\nu t}\mathrm{d}\varphi}{m(\omega_r^{(2)^2} - n^2\nu^2)}e^{in\nu t} \tag{16-63}$$

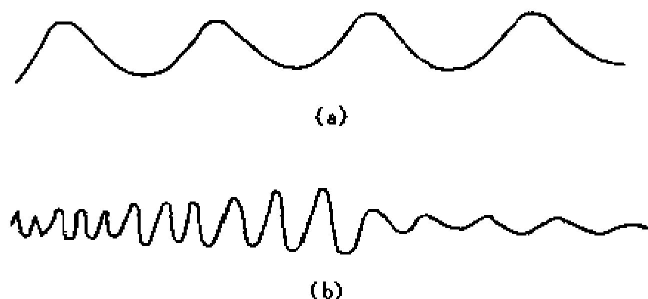
将 $Q_{r0}^{(2)}(a, \varphi)$ 代入上式，不考虑 $F_m(\ddot{x}_1)$ 的影响时，可得：

$$\begin{aligned} x_s &= \psi_s^{(2)}a\cos\varphi + \sum_{n=2}^{\infty}\psi_s^{(2)}[\psi_1^{(2)} - \psi_2^{(2)}]^2 \cdot \frac{a}{\pi m\nu_2^2(1 - n^2)} \\ &\quad \cdot [(k_{01}c_{n0} - k_{02}c_{n2})\cos n\varphi + \nu_2(c_{01}d_{n1} - c_{02}d_{n2})\sin n\varphi] \\ c_{n1} &= \frac{2}{n}\cos\varphi_{01}\sin n\varphi_{01} - \frac{\sin(n-1)\varphi_{01}}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\varphi_{01}}{n+1} \\ c_{n2} &= \frac{2}{n}\cos\varphi_{02}\sin n\varphi_{02} - \frac{\sin(n-1)\varphi_{02}}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\varphi_{02}}{n+1} \\ d_{n1} &= \frac{\sin(n-1)\varphi_{01}}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\varphi_{01}}{n+1} \\ d_{n2} &= \frac{\sin(n-1)\varphi_{02}}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\varphi_{02}}{n+1} \end{aligned} \tag{16-64}$$

根据以上算式可算出二次谐波成分的具体数值，与一次谐波成分相加以后，可得如图16-7(a) 所示的曲线，这与试验测得的曲线(图 16-7(b)) 是一致的。

16.4.3　含复杂分段线性的非线性振动系统

1. 振动系统方程式的建立



(a) 理论曲线 (b) 试验曲线

图 16-7 理论计算得的振动曲线与实际得的曲线的比较

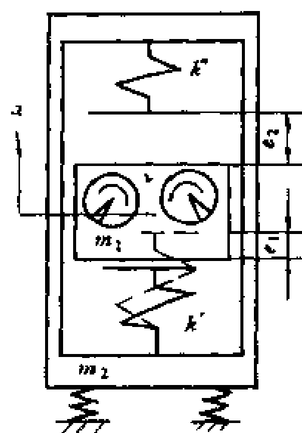


图 16-8 惯性式共振筛示意图

由单轴惯性激振器激振的分段线性的非线性共振筛属于这一类系统。该筛的结构图如图16-8 所示。图中 1 为筛箱;2 为平衡质体;3 为偏心块;4 为导向板弹簧;5 为隔振弹簧;6 和 7 是间隙为 e 的橡胶弹簧。当筛箱的质心和平衡重的质心靠近,支承弹簧刚度所引起的一阶固有频率远小于工作频率时,筛箱不会出现明显的摇摆振动。在这种情况下,平衡质体和筛箱在 x 方向和 y 方向的运动方程式如下式所示:

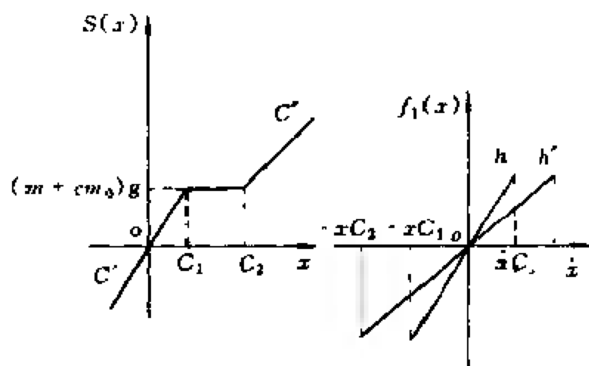


图 16-9 非线性弹性力与非线性阻尼力示意图

$$
\begin{aligned}
& m_1 \ddot{x}_1 + c_{12}\dot{x} + k_{12}x = F_0 \sin\nu t \\
& m_2 \ddot{x}_2 - c_{12}\dot{x} - k_{12}x + k_{3x}x_2 = 0 \\
& (m_1 + m_2)\ddot{y}_1 + k_3 y = F_0 \cos\nu t
\end{aligned}
\tag{16-65}
$$

式中

$$
x = x_1 - x_2, \quad \dot{x} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2, \quad y_1 = y, F_0 = m_0 \nu^2 r
$$

$$
f_c(\dot{x}) = \begin{cases} c'\dot{x} & -\infty \leqslant x \leqslant e \\ 0 & e_1 \leqslant x \leqslant e_2 \\ c''\dot{x} & e_2 \leqslant x \leqslant \infty \end{cases}
$$

$$
f_k(x) = \begin{cases} k'x & -\infty \leqslant x \leqslant e \\ m_1 g \sin\alpha & e_1 \leqslant x \leqslant e_2 \\ k''(x - e_2) + m_1 g \sin\alpha & e_2 \leqslant x \leqslant \infty \end{cases}
\tag{16-66}
$$

式中 m_1—— 平衡质体的质量;

m_2—— 筛箱的质量；

m_0—— 偏心块质量；

$f_c(\dot{x})$—— 非线性阻尼力；

$f_k(x)$—— 非线性弹性力；

c' 和 c''—— 平衡质体与筛箱间的下弹簧与上弹簧之阻力系数；

k' 和 k''—— 平衡质体与筛箱间的下弹簧与上弹簧之刚度；

e_1 和 e_2—— 平衡质体与筛箱间下弹簧与上弹簧之间隙；

k_{3x} 和 k_{3y}—— 隔振弹簧在 x 方向和 y 方向的刚度；

x_1 和 x_2—— 平衡质体和筛箱在 x 方向的位移及相对位移；

y_1 和 y_2—— 平衡质体和筛箱在 y 方向的位移；

F_0—— 激振力幅；

ν — 激振频率；

r —— 偏心块的偏心距；

t—— 时间。

当不考虑筛箱摇摆振动时，该系统为二个自由度的振动系统。若认为非线性作用力为弱非线性，可按线性系统的分析方法将上述方程变换到主坐标或正规坐标上，然后可按单自由的渐近方法进行求解。下面将利用较简便的方法求与激振力频率相接近的共振解。

2．振动中心的确定

由于该系统的不对称性，在振动过程中振动中心将对原始位置，即原始坐标偏移一个距离。振动中心可按以下位能平衡条件求出

$$\int_{-a+d}^{a+d} f_k(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{16-67}$$

式中a—— 筛箱对平衡质体的相对振幅；

d—— 振动中心之坐标。

当机器正常工作时，$d+a>e_2$，对式(16-67)进行分段积分，可得

$$\begin{aligned}&(k''-k')d^2+2[(k''+k')a+(k'e_1-k''e_2)]d+\\&[(k''+k')a^2+2a(k'e_1-k''e_2)-(k'e_1^2-k''e_2^2)]=0\end{aligned} \tag{16-68}$$

由上式可求出振动中心 d

$$d=\frac{-[(k''+k')a+(k'e_1-k''e_2)+\sqrt{4k''k'a^2+4k'(k'e_1-k''e_2)a+k''k'(e_2-e_1)^2}]}{k''-k'} \tag{16-69}$$

当 $k''=k'$ 时，可由下式求出在

$$d=\frac{e_2-e_1}{2}\cdot\frac{2a-(e_2+e_1)}{2a-(e_2-e_1)} \tag{16-70}$$

对更一般的情形，可分三种情况进行求解，即

$$d=\begin{cases}0 & 0\leqslant a_x\leqslant e_1\\(\sqrt{a_x}-\sqrt{e_1})^2 & e_1\leqslant a_x\leqslant a^*\\-\{[(k''+k')a_x+(k''e_1-k''e_2)]+\\\sqrt{4k''k'a_x^2+4k'(k''e_1-k''e_2)a_x+k''k'(e_2-e_1)^2}]\cdot(k''-k')^{-1} & a^*\leqslant a_x\leqslant\infty\end{cases} \tag{16-71}$$

当 $k' = k''$ 时，则有

$$
d = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant a_x \leqslant e_1 \\ (\sqrt{a_x} - \sqrt{e_1})^2 & e_1 \leqslant a_x \leqslant a^* \\ \dfrac{e_2 - e_1}{2} \cdot \dfrac{2a_x - (e_2 + e_1)}{2a_x - (e_2 - e_1)} & a^* \leqslant a_x \leqslant \infty \end{cases} \tag{16-72}
$$

3. 按渐近法求方程的解

下面利用较简便的方法对上述方程求强迫振动解。由于隔振弹簧刚度较小，对筛箱的强迫振动解影响很小，计算时可以略去。这时有

$$
\begin{aligned} y_1 &= y_2 = a_y \cos\nu t = \frac{m_0 r}{m_1 + m_2}\cos\nu t \\ a_y &= -\frac{m_0 r}{m_1 + m_2} \end{aligned} \tag{16-73}
$$

式中　a_y——y 方向的振幅。

对式(16-65) 第 1,2 式进行简化，得

$$
\begin{aligned} m\ddot{x} + f_c(\dot{x}) + f_k(x) &= \frac{m}{m_1} F_0 \sin\nu t \\ m &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \tag{16-74}
$$

式中　m — 诱导质量；

　　　x — 相对位移。

$$
\begin{aligned} x &= d + a_x \sin(\nu t + \beta) = d + a_x \sin\psi \\ \frac{\mathrm{d}a_x}{\mathrm{d}t} &= -\delta_e(a_x) + \frac{F_0}{m(\omega_0 + \nu)}\sin\beta \\ \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} &= \omega_e - \nu - \frac{F_0}{m a_x(\omega_0 + \nu)}\cos\beta \end{aligned} \tag{16-75}
$$

式中的等效阻尼比 δ_e 和等效固有频率 ω_e 可由下式求出

$$
\begin{aligned} \delta_e &= \frac{1}{2\pi m \omega_0 a_x}\int_0^{2\pi} f_c(a_x \omega_0 \cos\psi)\cos\psi \, \mathrm{d}\psi \\ \omega_e^2 &= \frac{1}{\pi m a_x}\int_0^{2\pi} f_c(a_x \sin\psi)\sin\psi d\psi \end{aligned} \tag{16-76}
$$

将非线性作用力代入以上方程式，可得

$$
\delta_e = \begin{cases} \delta' & 0 \leqslant a_x \leqslant e_1 \\ \delta'\left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\left(\arcsin\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_1}\sqrt{1 - \dfrac{1}{z_1^2}}\right)\right] & e_1 \leqslant a_x \leqslant a^* \\ \delta'\left\{\dfrac{1 + \dfrac{\delta''}{\delta'}}{2} + \dfrac{1}{\pi}\left[\left(\arcsin\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_1}\sqrt{1 - \dfrac{1}{z_1^2}}\right) - \right.\right. & \\ \left.\left.\dfrac{\delta''}{\delta'}\left(\arcsin\dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_2}\sqrt{1 - \dfrac{1}{z_2^2}}\right)\right]\right\} & a^* \leqslant a_x \leqslant \infty \end{cases} \tag{16-77}
$$

$$\omega_e^2 = \begin{cases} \omega_0'^2 & 0 \leqslant a_x \leqslant e_1 \\ \omega_0'^2\left[\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\left(\arcsin\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_1}\sqrt{1-\dfrac{1}{z_1^2}}\right)\right] & e_1 \leqslant a_x \leqslant a^* \\ \omega_0'^2\left\{\dfrac{1+\dfrac{k''}{k'}}{2}+\dfrac{1}{\pi}\left[\left(\arcsin\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_1}\sqrt{1-\dfrac{1}{z_1^2}}\right)-\right.\right. & \\ \left.\left.\dfrac{k''}{k'}\left(\arcsin\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_2}\sqrt{1-\dfrac{1}{z_2^2}}\right)\right]\right\} & a^* \leqslant a_x \leqslant \infty \end{cases} \tag{16-78}$$

其中 $\delta'=\dfrac{c'}{2m}$，$\delta''=\dfrac{c''}{2m}$，$\omega_0'^2=\dfrac{k'}{m}$，$\omega_0''^2=\dfrac{k''}{m}$

在定常情况下，可求出稳态相对振幅

$$a_x=\frac{F_0}{m\sqrt{[\omega_e^2-\omega_0^2]^2+4\delta_e^2\omega_0^2}}$$
$$\beta=\arctan\left[-\frac{2\omega_0\delta_e}{\omega_e^2-\omega_0^2}\right] \tag{16-79}$$

根据上式可作出系统的共振曲线(图16-10)。由图看出，随着振幅的增加，共振曲线分为线性、软式非线性和硬式非线性三个区段。

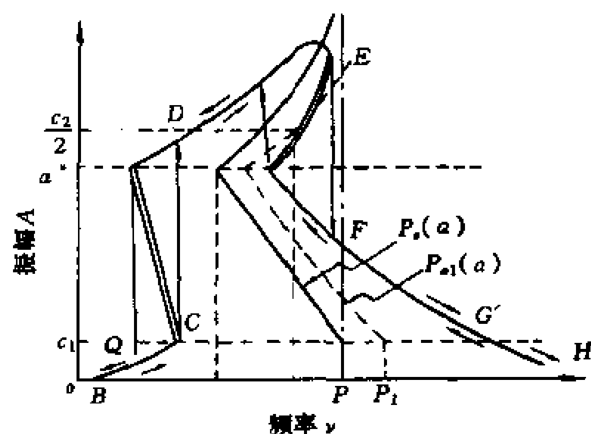


图 16-10 惯性式共振筛的共振曲线

按照前面的算式，相对位移及质体 1 和质体 2 的位移可由下式求出

$$x=x_1-x_2=d+a_x\sin(\nu t+\beta)$$
$$x_1=\frac{m}{m_1}d+\frac{1}{m_1+m_2}\sqrt{(m_1a_x)^2+(m_0r)^2-2m_1a_xm_0r\cos\beta}\,\sin(\nu t+\beta) \tag{16-80}$$
$$x_2=-\frac{m}{m_1}d-\frac{1}{m_1+m_2}\sqrt{(m_1a_x)^2+(m_0r)^2+2m_1a_xm_0r\cos\beta}\,\sin(\nu t+\beta)$$

当 $\beta=0$ 时，则有

$$x_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}d+\frac{m_2a_x-m_0r}{m_1+m_2}\sin\nu t$$
$$x_2=-\frac{m_1}{m_1+m_2}d-\frac{m_1a_x+m_0r}{m_1+m_2}\sin\nu t \tag{16-81}$$

因而振幅的近似值为

$$a_{x1}=\frac{m_2a_x-m_0r}{m_1+m_2}$$
$$a_{x2}=-\frac{m_1a_x+m_0r}{m_1+m_2} \tag{16-82}$$

16.5 含滞回非线性作用力的振动系统的利用

含滞回非线性作用力的振动系统在工业部门中有广泛的应用。例如用于压实松散物料的振动成型机，压实土壤或砂石的振动夯土机和振动压路机等。它们都是利用振动使被压实

物料在发生弹性变形过程中产生具有实际意义的塑性变形或在物料颗粒之间产生滑移，进而使物料压实。振动冷轧或热轧钢材或有色金属，材料本身也必须产生塑性变形，才能完成轧制工作。伴随着弹塑性变形的发生，在位移与恢复力组成的直角坐标中便会出现滞回的恢复力模型。因此，只有利用含滞回非线性作用力的振动系统才能有效完成物料压实或使金属材料产生变形的工艺过程。

滞回非线性作用力有多种形式，这里仅举出一种较为简单的平行四边形形式，如图16-11所示。含滞回非线性作用力的单自由度振动系统的运动微分方程式如下式。

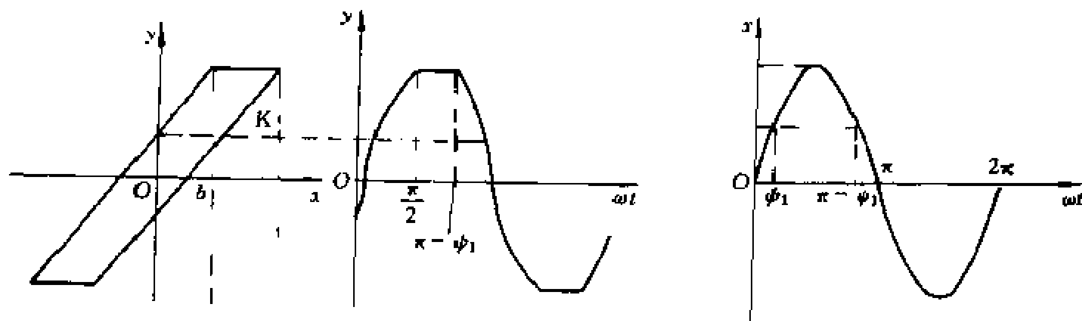


图 16-11　平行四边形的滞回模型

$$m\ddot{y}+F(y,\dot{y})=F_0\sin\nu t$$

$$F(y,\dot{y})=\begin{cases}k(a\sin\nu t-b) & 0\leqslant\nu t\leqslant\frac{\pi}{2}\\ k(a-b) & \frac{\pi}{2}\leqslant\nu t\leqslant\pi-\psi_1\\ k(a\sin\nu t+b) & \pi-\psi_1\leqslant\nu t\leqslant\pi\end{cases}\tag{16-83}$$

$$\psi_1=\arcsin\left(\frac{a-2b}{a}\right)$$

式中　a—— 一次近似的振幅；

k—— 倾斜线之斜率，即被压实物料之刚度；

b—— 折线转折点之坐标。

为加速对实际工况的逼近，可取非线性函数等于等效线性作用力加附加非线性作用力，即

$$F(y,\dot{y})=c_e\dot{y}+k_e y-\varepsilon f(y,\dot{y})\tag{16-84}$$

式中　k_e—— 等效刚度(按第二章中的方法计算)；

ε—— 小参数；

$f(y,\dot{y})$—— 非线性函数。

因而式(16-83)可表示为

$$m\ddot{y}+c_e\dot{y}+k_e y=\varepsilon f(y,\dot{y})+\varepsilon F_0\sin\nu t$$

$$f(y,\dot{y})=c_e\nu\cos\nu t+k_e\sin\nu t-\begin{cases}k(a\sin\nu t-b) & 0\leqslant\nu t\leqslant\frac{\pi}{2}\\ k(a-b) & \frac{\pi}{2}\leqslant\nu t\leqslant\pi-\psi_1\\ k(a\sin\nu t+b) & \pi-\psi_1\leqslant\nu t\leqslant\pi\end{cases}\tag{16-85}$$

下面我们来求方程的非共振解和共振解。

16.5.1 方程的非共振解

对以上方程进行以下变换

$$y = x + A\sin(\nu t - \alpha) \tag{16-86}$$

代入方程(16-85),得

$$\begin{aligned} mx + k_e x &= \varepsilon f[x + A\sin(\nu t - \alpha)] - \varepsilon c_e x \\ &\quad + \varepsilon[F_0\sin\nu t - (k_e - m\nu^2)A\sin(\nu t - \alpha) - c_e\nu A\cos(\nu t - \alpha)] \end{aligned} \tag{16-87}$$

设方程的解为

$$\begin{aligned} x &= a\cos(\omega_0 t + \beta) = a\cos\psi \\ \frac{da}{dt} &= -\delta_e(a)a = \frac{1}{4\pi^2\omega_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(a,\psi,\theta)\sin\psi d\psi d\theta \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_0 + \varepsilon\omega_1 = \omega_0 - \frac{1}{4\pi^2\omega_0 a}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(a,\psi,\theta)\cos\psi d\psi d\theta \end{aligned} \tag{16-88}$$

式中 $\theta = \nu t$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_e}{m}}$

$$f_0(a,\psi,\theta) = f(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi, \nu t) \tag{16-89}$$

而改进的一次近似解为

$$x = a\cos\psi + \varepsilon u_1(a,\psi,\theta)$$

$$u_1(a,\psi,\theta) = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{\substack{n \quad m \\ [n^2+(m-1)^2\neq 0]}}\sum \frac{e^{i(n\theta+m\psi)}}{\omega_0^2 - (n\theta + m\omega_0)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(a,\psi,\theta)e^{-i(n\theta+m\psi)}d\theta d\psi \tag{16-90}$$

由于阻尼的存在,自由振动将衰减为零。实际上,对工作有意义的是方程的强迫振动解,其振幅和相位差角为

$$A = \frac{F_0\cos\alpha}{k_e - m\nu^2}, \quad \alpha = \arctan\frac{c_e\nu}{k_e - m\nu^2} \tag{16-91}$$

等效线性化刚度和等效线性化阻尼可按下式计算

$$\begin{aligned} c_e &= \frac{4kb}{\pi}\left(\frac{b-a}{a}\right) \\ k_e &= \frac{ka}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{a-2b}{a}\right) + \left(\frac{a-2b}{a}\right)\sqrt{1-\left(\frac{a-2b}{a}\right)^2}\right] \end{aligned} \tag{16-92}$$

16.5.2 方程的共振解

设方程的解为

$$\begin{aligned} y &= a\cos(\nu t + \beta) = a\cos\varphi \\ \frac{da}{dt} &= -\delta_e(a)a - \frac{\varepsilon F_0}{m(\omega_0 + \nu)}\cos\beta \\ \frac{d\beta}{dt} &= \omega_e(a)a - \nu + \frac{\varepsilon F_0}{ma(\omega_0 + \nu)}\sin\beta \end{aligned} \tag{16-93}$$

$$
\begin{aligned}
\delta_e(a) &= \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0 a m}\int_0^{2\pi} f(a\cos\varphi,\ -a\nu\sin\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\
\omega_e(a) &= \omega_0 - \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0 a m}\int_0^{2\pi} f(a\cos\varphi,\ -a\nu\sin\varphi)\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}
\tag{16-94}
$$

式中　$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k_e}{m}}$

将式(16-85)的值代入上式，进行分段积分，即得

$$
\begin{aligned}
\delta_e &= \frac{2kb}{\pi m}\left(\frac{b-a}{a}\right) \\
\omega_e &= \sqrt{\frac{ka}{\pi m}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{a-2b}{a}\right) + \left(\frac{a-2b}{a}\right)\sqrt{1-\left(\frac{a-2b}{a}\right)^2}\right]}
\end{aligned}
\tag{16-95}
$$

对于定常情况，$\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = 0$，$\dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = 0$，则可得

$$
a = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_e^2 - \nu^2)^2 + \delta_e^2}}
\tag{16-96}
$$

事实上，滞回过程是物料产生弹塑性变形的过程，塑性变形愈大，物料压实过程完成得也愈迅速。因此，从提高工艺效果来看，必须采取相应措施来加速工艺过程。

16.6　自激振动系统的应用

在工业部门中广泛应用了自激振动。例如，采矿工业中应用的气动式与液压式凿岩机与碎石机，早年采煤用的风镐，铸造车间清理铸件的风铲、锻造车间使用的蒸汽锤，选煤厂应用的气动无活塞跳汰机，蒸汽机的工作过程也属于自激振动，由液压阀控制的往复油缸或活塞驱动的各种机件所组成的系统等。在无线电通讯及仪器仪表工业部门，如无线电收音机和电视机中的电子振荡器，各种仪器仪表中广泛采用的振荡器和不同形式的波形发生器，各种恒温容器采用的开关型温度调节器等。日常生活中所必需的手表和挂钟，依赖琴弦演奏的各种乐器等。

下面举出两个例子，第一个例子是气动冲击器的自激振动[229,230]，其工作原理如图16-12所示。由图可见，活塞运动的微分方程式为

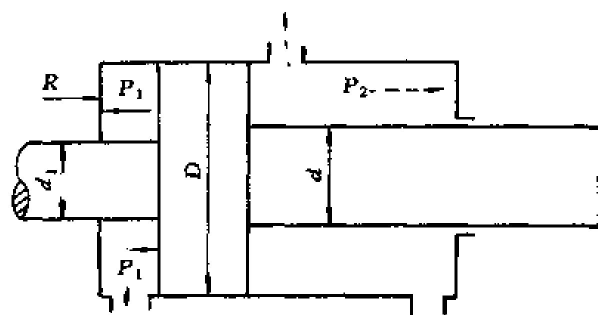


图 16-12　气动冲击器的工作原理图

$$
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F_2p_2(t) - F_1p_2(t) - G + f\left(\frac{|\dot{x}|}{\dot{x}}\right)
\tag{16-97}
$$

式中　m——活塞的质量；

F_1 和 F_2——气缸后室与前室的有效面积；

$p_1(t)$ 和 $p_2(t)$——气缸后室与前室的压力；

G——活塞重力在冲击方向的分力；

$f\left(\frac{|\dot{x}|}{\dot{x}}\right)$——非线性作用力，如下式所示

$$f\left(\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}\right) = \begin{cases} R_1 & \dot{x} \leqslant 0 \\ -R_2 & \dot{x} \geqslant 0 \end{cases} \tag{16-98}$$

式中　R_1 和 R_2 —— 干摩擦力。

根据以上方程，可在相平面图上作出如图16-13所示之振动曲线。这表明该系统能获得稳定的周期振动。该系统能否获得稳定的周期振动，还必须通过稳定性分析。

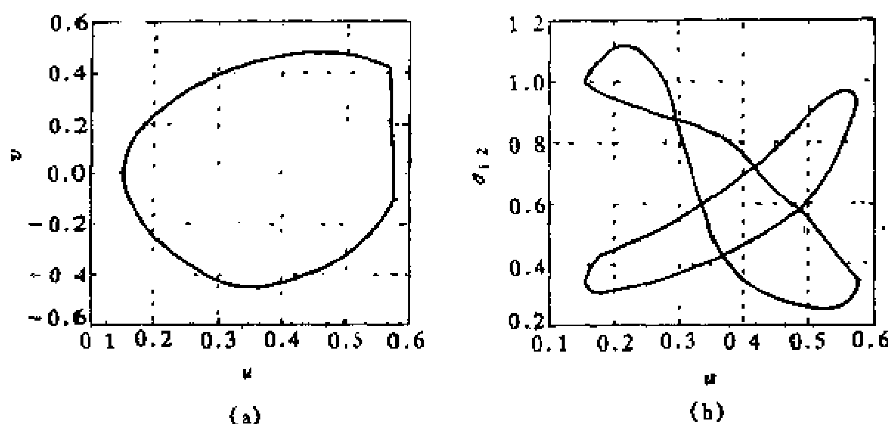


图 16-13　气动冲击器活塞在相平面图上振动曲线

第二个例子是电子振荡器的自激振动，其工作原理如图16-14所示。由图可见，电子振荡器电流的微分方程式为

$$CL\ddot{x} - \alpha\dot{x} + \frac{\beta}{3}\dot{x}^3 + x = 0 \tag{16-99}$$

式中　C—— 振荡器回路中的电容；

L—— 振荡器回路中的电感；

α 和 β—— 两个正值的常数。

若设

$$\omega_0^2 = \frac{1}{CL},\quad \varepsilon = \frac{\alpha}{CL},\quad \mu^2 = \frac{3\alpha}{\beta} \tag{16-100}$$

则上式可变为标准的瑞雷方程

$$\ddot{x} - \varepsilon\left(\dot{x} - \frac{1}{\mu^2}\dot{x}^3\right) + \omega_0^2 x = 0 \tag{16-101}$$

将上式变换成一阶方程组，则有

$$\frac{dx}{dt} = y,\ \frac{dy}{dt} = \varepsilon\left(y - \frac{1}{\mu^2}y^3\right) - \omega_0^2 x \tag{16-102}$$

因而相平面上轨线的斜率计算式为

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon\left(1 - \frac{1}{\mu^2}y^2\right) - \omega_0^2\frac{x}{y} \tag{16-103}$$

根据以上方程，可在相平面图上作出如图16-15所示之曲线。这表明该系统能获得稳定的周期振动。

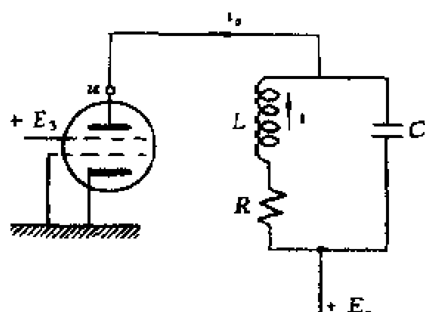


图 16-14　电子振荡器的工作原理图

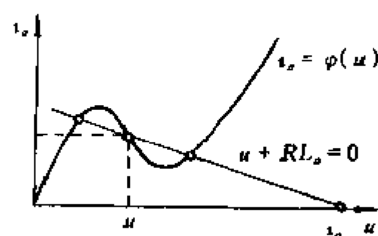


图 16-15　电子振荡器的电流波动曲线

16.7　带有冲击的非线性振动系统的工程应用

利用冲击来完成工艺过程的振动机械有蛙式夯土机、振动锤锻机、带有冲击的振动落砂机和振动钻探机等。冲击式振动机械是非线性振动机一个特例。根据理论计算与试验都可以证明，冲击情况下物体瞬间所产生的加速度较一般线性振动机的最大加速度大几倍、几十倍，甚至几百倍。利用冲击可以产生很大的冲击力，这对压实土壤，使物体产生塑性变形、岩石发生破坏或碎裂、促使铸件上的型砂剥落都是十分重要的。

冲击式振动机械可由弹性连杆式激振器、惯性式激振器、电磁式激振器、气动式和液压式激振器驱动。它既可以在远离共振情况下工作，也可以在近共振情况下工作。

下面以蛙式夯土机为例来说明冲击式振动机的力学特性。

图 16-16 表示了蛙式夯土机的工作机构。这种机器每个振动周期对土壤产生一次冲击，还往前移动一个距离。

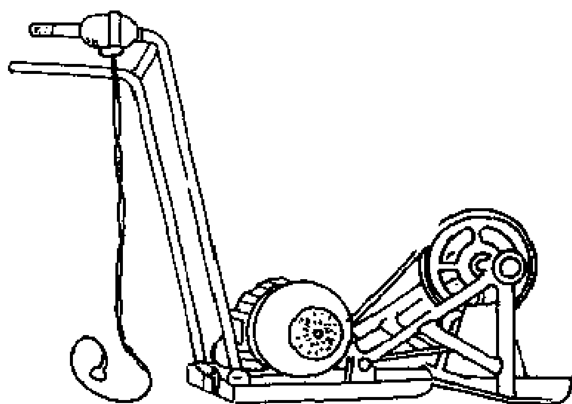


图 16-16　蛙式夯土机机构示意图

参照第一章图 1-8 可写出夯头绕 o 点摆动的运动方程式及传动部机座移动的方程式：

$$J\ddot{\psi} = m_1 r\omega^2 l_1 \sin(\varphi + \alpha_0 + \psi) - G_1 l_1 \cos(\alpha_0 + \psi) - G_2 l_2 \cos(\alpha_0 + \psi - \delta)$$

$$\frac{G}{g}\ddot{x} \approx m_1 r\omega^2(-\cos\varphi + f\sin\varphi) + (G_1 + G_2)\omega_2^2 l_c[\cos(\alpha_0 + \psi) + f\sin(\alpha_0 + \psi)] - fG \qquad (16\text{-}104)$$

$$J = \frac{G_1}{g}l_1^2 + \frac{G_2}{g}l_2^2, \quad G = G_1 + G_2 + G_3$$

式中　J——夯头部分绕轴线 o 之总转动惯量；

m_1 和 r——偏心块质量及偏心距；

ω 和 ω_2——分别为偏心块回转角速度和分头摆动的角速度；

G_1、G_2 和 G_3——分别为偏心块、夯头及电动机架体托盘部分之重量；

ψ 和 $\ddot{\psi}$——夯头摆动角度和摆动角加速度；

$\ddot{x}$——移动加速度；

l_1, l_2 和 l_t——分别为摆杆长度、夯头质心至摆动中心距离及其合成质心至摆动中心之距；

α_0——摆杆与水平面的夹角；

f——底架与地面摩擦系数；

φ——偏心块回转角，$\varphi = \omega t$。

由方程第一式可以确定夯头抬起时偏心块之相位角 φ_d

$$\sin(\varphi_d + \alpha_0 + \psi) = \frac{G_1 l_1 \cos(\alpha_0 + \psi) + G_2 l_2 \cos(\alpha_0 + \psi - \delta)}{m_1 r \omega^2 l_1} \tag{16-105}$$

根据上式可计算出起始摆动角 φ_d，进而可计算出夯头抬起的时间内偏心块转过的相位角——抬起角 θ 及夯头落下时的相位角——下落角 $\varphi_z = \varphi_d + \theta$。然后可按式(16-105)计算出托盘每一周期走过的距离。在简化的情况下，上式可化简为

$$\sin\varphi_d = \frac{\sum m_i g l_i}{m_1 \omega^2 r l_1}, \quad \varphi_d = \arcsin\frac{1}{D}, \quad D = \frac{\sum m_i g l_i}{m_1 \omega^2 r l_1} \tag{16-106}$$

当 $D \leqslant 1$ 时，φ_d 无解；当 $D > 1$ 时，φ_d 有解，这时夯头被抬起，其运动方程式为

$$\sum m_i l_i^2 \ddot{\psi} = m_1 r \omega^2 l \sin(\varphi_d + \alpha_0 + \psi) - G_1 l_1 \cos(\alpha_0 + \psi) + G_2 l_2 \cos(\alpha_0 + \psi - \delta) \tag{16-107}$$

因等号后的 α_0 与 ψ 相比较小，近似计算时可用平均值替代，或略去。这时方程可写为

$$\psi = \frac{m_1 r l_1}{\sum m_i l_i^2}\left[(\sin\varphi_d - \sin\varphi) + \cos\varphi_d(\varphi - \varphi_d) - \frac{1}{2} g \frac{(\varphi - \varphi_d)^2}{\omega^2}\right] \tag{16-108}$$

当 $\psi = 0$ 时，夯头又回到原位置上，并完成夯实工作。此时摆动相位角 $\varphi = \varphi_z$，而夯头抬起角为 $\theta = \varphi_z - \varphi_d$，进而可求得 φ_d 与抬起角 θ 的关系式

$$\tan\varphi_d = \frac{\theta - \sin\theta}{1 + \cos\theta + \frac{1}{2}\theta^2} \tag{16-109}$$

对式(16-104)积分，可求出夯头落下时之动量矩计算式

$$J\dot{\psi} = G_1 l_0 \cos\beta\left[\frac{1}{\tan\varphi_d}(1 - \cos\theta) + \sin\theta - \theta\right] \tag{16-110}$$

而冲击力可按下式计算

$$F = \frac{J\dot{\psi}}{\Delta t \cdot l_0 \cos\beta} = \frac{JG_1}{\Delta t}\left[\frac{1}{\tan\psi_d}(1 - \cos\theta) + \sin\theta - \theta\right] \tag{16-111}$$

式中　Δt——冲击时间。

显然，抬起角 θ 不得大于360°，而 θ 过小又会使冲击力减少，进而降低工作效率。抬起角应在180°～270°范围内选取，相对应的抬离角 φ_d 为45°～28°。由式(16-111)机器的工作转数可按下式计算

$$n = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{G_1 \cos\beta}{m_0 r \sin\varphi_d}} \tag{16-112}$$

根据第二个方程，可以按下式确定往前运动的起滑角 φ_k

$$\cos\varphi_k = -\frac{1}{m_0 r \omega^2}\left[G_2 \frac{\sin\mu_0}{\cos(\mu_0 - \beta)} + G_1 \sin\beta\right] \tag{16-113}$$

式中　μ_0——摩擦角，$\mu_0 = \arctan f_0$。

进而可以求出停止滑动的滑止角 φ_m 和产生每次冲击机器所走过的路径。

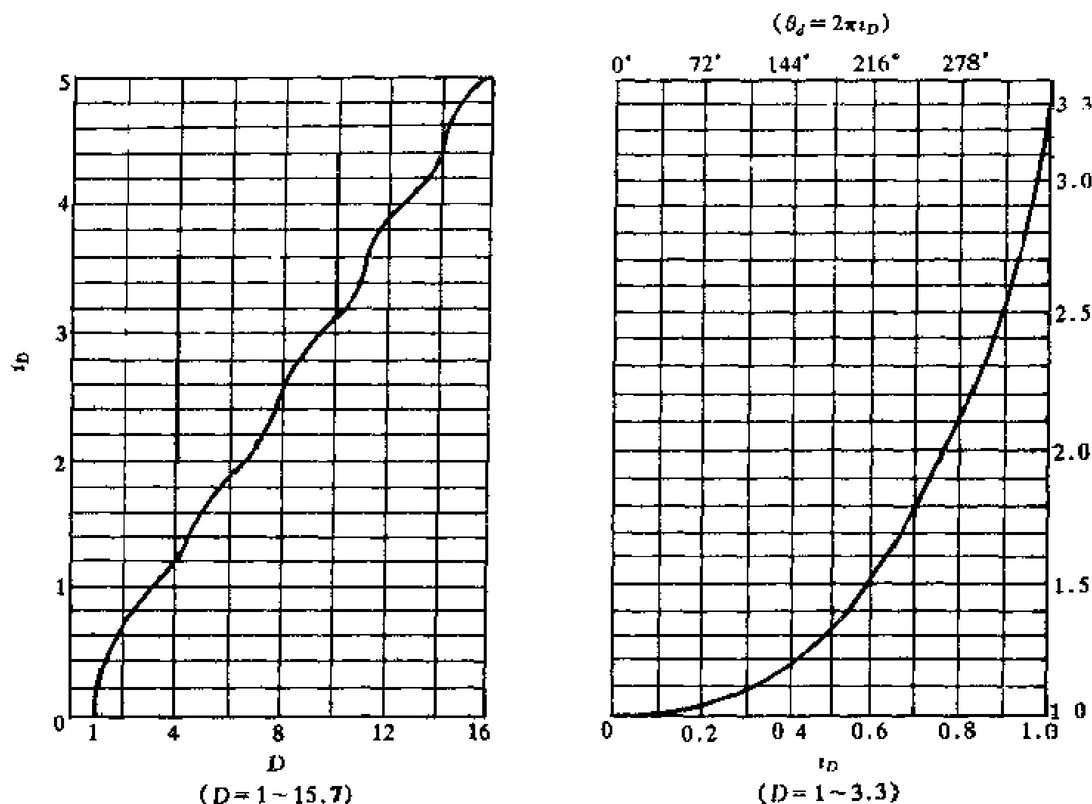


图 16-17 抬离角 φ_d 与抬起角 θ 的关系

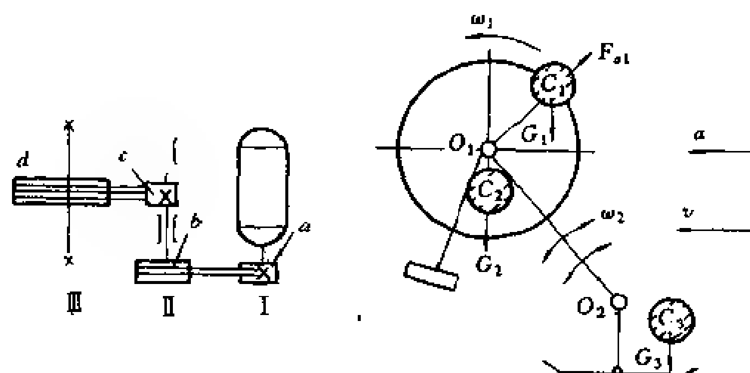


图 16-18 蛙式夯土机的工作机构和力学模型

16.8 非线性波与波能的利用

在自然界中，除振动外，各种形式的波到处存在着，例如，水波、声波、超声波、应力波、电磁波和可见光波等。介质在波动过程中伴随着一定大小的能量，这些能量有相当一部分是可以被利用的。例如，海浪可以用来发电；周期接近等于 24 小时的潮汐实际也是一种频率极低而能量十分巨大的波，这种波也可用来发电，目前我国已有一座投产多年的潮汐发电站；将振动源产生的振动通过应力波传至地层深处的油层，可使油水实现较好的分离，进而可提高原油产量；光波和声波的用途比比皆是，随处可见；超声波已成功用于油水混合，进而提高燃油效率。实践证明，使用经混合后的重油用于燃烧，大约可节省重油 20% ～ 30%；超声波目前已成功用于医疗和结构件探伤；人类借助于电磁波实现无线电通讯，传递信息，成为当今

信息时代人类相互联系不可缺少的桥梁和纽带；光在光导纤维中的传播也是一种特殊形式的波，利用光纤来代替通电的导线，其应用的重大价值是无法估算的。

严格地说，上述各种不同形式的波都是属于非线性的，只是在近似分析时作为线性来处理。下面讨论振动锤直杆应力波的传递过程。直杆受简谐力的作用，设密度 $\rho(x)$，弹性模量 $E(x)$ 和横截面积 $A(x)$ 均为常数，则沿直杆传播的应力波的非线性方程式为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -2E_1\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cdots \tag{16-114}$$

将上式变换为

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} = 2E_1\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cdots \\ t_1 = c_0 t, \quad t = \frac{t_1}{c_0}, \quad u(0,t_1) = 0, \quad u(1,t_1) = \varepsilon F_0\cos\omega t_1\end{gathered} \tag{16-115}$$

设杆截面的振动位移为

$$u = \varepsilon u_1(x,t_1) + \varepsilon^2 u_2(x,t_1) + \cdots \tag{16-116}$$

通过计算，可求得

$$\begin{gathered}u_1 = \frac{F_0}{\sin\omega}\cos\omega t_1\sin\omega x \\ u_2 = \frac{E_1F_0^2\omega^2}{8\sin^2\omega}\left[\frac{1}{\omega}(x\sin 2\omega - \sin 2\omega x) - \left(x\cos 2\omega x - \frac{\cos 2\omega \cdot \sin 2\omega x}{\sin 2\omega} \cdot \cos 2\omega x t_1\right)\right]\end{gathered} \tag{16-117}$$

上述结果对于 $\omega \approx n\pi$ 及 $\omega \approx \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$，即对于主共振和次谐波振动是不适用的。

16.9　频率俘获原理的工业应用

频率俘获原理在自同步振动机中得到了广泛应用。过去为了使振动机械上两个激振器实现同步运转，通常采用一对速比等于1的齿轮(作反向回转)或链轮(作同向回转)实现同步。60年代发明了自同步振动机，在许多振动机中取消了齿轮同步器；按照频率俘获原理，在两激振器用两台感应电动机分别驱动的情况下，实现同步运转，并使振动机体获得所要求的直线运动轨迹或圆周运动轨迹等。自同步振动机有作平面运动和作空间运动的，有单体的和双质体的，有作同向回转和作反向回转的振动机等。下面以平面振动机为例说明频率俘获原理，即振动同步原理，也称自同步原理[32]。

图16-19表示了平面单质体自同步振动机的工作原理与力学模型。

按照力学模型图，可建立以下微分方程式

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}(t) + \varepsilon\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}) \tag{16-118}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \sum k_{x} & 0 & \sum k_{x}l_{y} \\ 0 & \sum k_{y} & \sum k_{y}l_{x} \\ \sum k_{x}l_{y} & \sum k_{y}l_{x} & \sum(k_{x}l_{y}^2 + k_{y}l_{x}^2)\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \phi \end{Bmatrix}$$

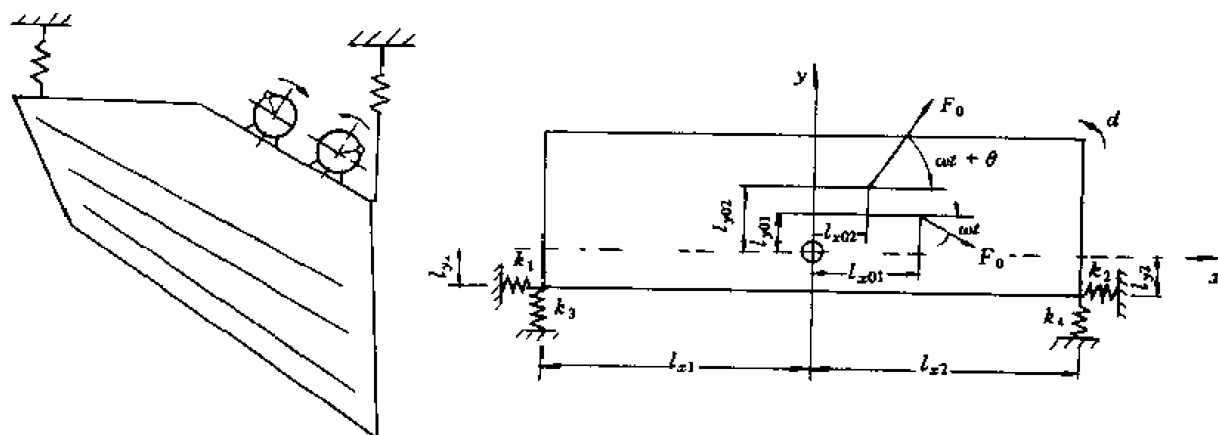


图 16-19　自同步振动机的工作原理图与力学模型

$$\boldsymbol{F}(t)=\begin{bmatrix}0 & F & 0 & F\\ F & 0 & F & 0\\ -Fl_{y0i} & -Fl_{x0i} & Fl_{yi} & -Fl_{xi}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin\nu t\\ \cos\nu t\\ \sin(\nu t+\Delta\alpha)\\ \cos(\nu t+\Delta\alpha)\end{Bmatrix},\quad F=m_0 r\nu^2$$

$$\boldsymbol{Q}=\begin{Bmatrix}Q_1\\ Q_2\\ Q_3\end{Bmatrix}$$

式中　$\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{K}$——质量矩阵和刚度矩阵；

$x,\boldsymbol{F}(t)$ 和 $\boldsymbol{Q}$——位移列阵，激振力列阵和非线性作用力列阵；

m 和 J——振动质体的质量及振动质体绕质心的转动惯量；

k_{xi} 和 k_{yi}——弹簧 i 在 x 和 y 方向的刚度；

l_{xi} 和 l_{yi}——弹簧 i 支承点至质心在 x 和 y 方向之距；

l_{x0i} 和 l_{y0i}——激振器 i 至质心在 x 和 y 方向之距；

$\Delta\alpha$——两激振力的相角差；

F——激振力；

ν——激振频率；

m_0 和 r——偏心质量和偏心距。

为了求出方程的解，先将方程变换至主坐标上，可由以下方程求出固有频率 ω_{0i} 及振型函数

$$\boldsymbol{\psi}=\begin{bmatrix}\psi_1^{(1)} & \psi_1^{(2)} & \psi_1^{(3)}\\ \psi_2^{(1)} & \psi_2^{(2)} & \psi_2^{(3)}\\ \psi_3^{(1)} & \psi_3^{(2)} & \psi_3^{(3)}\end{bmatrix}\tag{16-119}$$

第 i 个主坐标上的主质量、主刚度和主激振力为

$$m_j=\sum_{j=1}^{3}m_j\psi_j^{(j)^2},\quad k_j=m_j\omega_{0j}^2,\quad F_j=\sum_{j=1}^{3}F_j\psi_j^{(j)},\quad Q_j=\sum_{j=1}^{3}Q_j\psi_j^{(j)}\tag{16-120}$$

而第 j 个主坐标的运动方程式为

$$m_j\ddot{q}+k_jq=F_{j1}\sin\nu t+F_{j2}\cos\nu t+F_{j3}\sin(\nu t+\Delta\alpha)+F_{j4}\cos(\nu t+\Delta\alpha)\tag{16-121}$$

因而方程解为

$$q_j = \frac{1}{k_j - m_j\omega_{0j}^2}[F_{j1}\sin\nu t + F_{j2}\cos\nu t + F_{j3}\sin(\nu t + \Delta\alpha) + F_{j4}\cos(\nu t + \Delta\alpha)] \tag{16-122}$$

用主坐标表示的拉格朗日函数可写为

$$L = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} m_j\dot{q}_j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} k_j q_j^2 \tag{16-123}$$

拉格朗日函数在一个周期内的积分,哈密顿作用量可由下式表示

$$I = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} L dt \tag{16-124}$$

对于稳定状态 I 有一个最小的不变值,数学表达式为其积分式的变分等于零,即

$$\delta I = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \delta L dt \tag{16-125}$$

将求得的 q_j 和 $\dot{q}_j$ 代入上式并化简,对于稳定状态的相位差角可由下式求得

$$\frac{\partial I}{\partial \Delta\alpha} = \sum_{j=1}^{3} \frac{F_{j2}F_{j3} - F_{j1}F_{j4}}{k_j - m_j\nu^2}\sin\Delta\alpha - \sum_{j=1}^{3} \frac{F_{j1}F_{j3} - F_{j2}F_{j4}}{k_j - m_j\nu^2}\cos\Delta\alpha = 0 \tag{16-126}$$

由上式可求得稳定运转状态所对应的相位差角为

$$\cot\Delta\alpha = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{3} \frac{F_{j2}F_{j3} - F_{j1}F_{j4}}{k_j - m_j\nu^2}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{3} \frac{F_{j1}F_{j3} - F_{j2}F_{j4}}{k_j - m_j\nu^2}} \tag{16-127}$$

由方程(16-127)可求出两个对应的相位差角,使 I 最小的相位差角的条件应是 I 对 $\Delta\alpha$ 的二阶导数大于零,即

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \Delta\alpha^2} = \sum_{j=1}^{3} \frac{F_{j2}F_{j3} - F_{j1}F_{j4}}{k_j - m_j\nu^2}\sin\Delta\alpha - \sum_{j=1}^{3} \frac{F_{j1}F_{j3} - F_{j2}F_{j4}}{k_j - m_j\nu^2}\cos\Delta\alpha > 0 \tag{16-128}$$

我们可以利用计算机来完成上述计算。

下面讨论一个具体的例子,设两个激振器为同心,且装于机体的质心上,即 $l_{x0i} = l_{y0i} = 0$。若设弹簧对称于质心安装,这时,$l_{yi} = 0, l_{x1} = -l_{x2}$,两激振器作反向回转。根据以上条件,系统的运动方程式为

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{x1} + k_{x2} & 0 \\ 0 & k_{x1} + k_{x2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = F\begin{Bmatrix} \cos\nu t + \cos(\nu t + \Delta\alpha) \\ -\sin\nu t + \sin(\nu t + \Delta\alpha) \end{Bmatrix} \tag{16-129}$$

以上方程的解为

$$\begin{aligned} x &= a_x[\cos\nu t + \cos(\nu t + \Delta\alpha)], \quad a_x = \frac{m_0 r\nu^2}{\sum k_{xj} - m\nu^2} \\ y &= a_y[-\sin\nu t + \sin(\nu t + \Delta\alpha)], \quad a_y = \frac{m_0 r\nu^2}{\sum k_{yj} - m\nu^2} \end{aligned} \tag{16-130}$$

当取 $\dfrac{\partial I}{\partial(\Delta\alpha)} = 0$ 时,可求得

$$\frac{\pi}{\nu}F^2 \frac{\omega_{y0}^2 - \omega_{x0}^2}{(\omega_{x0}^2 - \nu^2)(\omega_{y0}^2 - \nu^2)}\sin\Delta\alpha = 0 \tag{16-131}$$

当以下条件满足时，同步状态是稳定的。

$$\frac{\partial^2 I}{\partial(\Delta\alpha)^2} = \frac{\pi}{\nu}F^2\frac{\omega_{y0}^2-\omega_{x0}^2}{(\omega_{x0}^2-\nu^2)(\omega_{y0}^2-\nu^2)}\cos\Delta\alpha > 0 \tag{16-132}$$

因此，由于 $\nu \gg \omega_{x0}$，$\nu \gg \omega_{y0}$，当 $\omega_{y0} > \omega_{x0}$ 时，$\Delta\alpha = 0$ 的同步运转状态是稳定的，反之，当 $\omega_{y0} < \omega_{x0}$ 时，$\Delta\alpha = 180°$ 的同步运转状态是稳定的。

当两激振器同向同转时，因为式(16-132)中的 $\sin\nu t$ 变为 $\sin\nu t$，上式成为

$$\frac{\partial^2 I}{\partial(\Delta\alpha)^2} = \frac{\pi}{\nu}F^2\frac{-\omega_{y0}^2-\omega_{x0}^2}{(\omega_{x0}^2-\nu^2)(\omega_{y0}^2-\nu^2)}\cos\Delta\alpha > 0 \tag{16-133}$$

因此，仅仅当 $\Delta\alpha = 180°$ 时，同步运转状态是稳定的，此时，机体的振幅为零。这在工程上是利用自动平衡的方法，使系统不出现振动或减少系统的振动。但对振动机来说是没有意义的。

16.10 分岔解与混沌的利用

16.9.1 分岔解的应用

研究非线性系统分岔解目前已引起科学技术工作者普遍重视和广泛注意。在非线性方程式的分岔解中有一些可以被利用，而有一些不可能加以利用。因此，研究分岔解具有工程意义。例如，在振动输送机中物料的运动会出现多种形式的分岔解，等周期跳动、2倍周期跳动、3倍周期跳动、n 周期跳动和非周期跳动等，从这些分岔解选择最为理想或者说工艺指标和其他综合评价指标最佳的运动形式，即最佳的分岔解，仍然是有价值的研究课题。

16.9.2 关于混沌运动的利用

混沌运动的特点是具有宽的功率谱图和运动轨线的不规则性及其他相关的条件，有的科技工作者试图利用这些特点将混沌运动应用于工业生产中，例如，利用冲击消振器振动空穴中的钢球的混沌运动来消除镗床镗杆的振动；在振动混料中利用多种物料的混沌运动来加速物料的混合；再如有人曾设法研究一种作混沌运动的振动机。所有这些企图利用混沌来完成某一工艺过程的设想，最根本的问题是要看该种设备的工艺指标及其他评价机器性能的综合指标是否优于同一种用途的机器，如果综合指标优于后者，那么对该种利用混沌的机器的研究是成功的，否则再好的设想也是无济无事的。

目前，混沌已开始在保密软件的设计中获得应用。

此外，由于一些非线性振动系统在工作中会出现有害的不稳定振动，在这种情况下，设法使这种不稳定的振动过渡到较之有利的混沌运动，这自然也是利用混沌运动一种可开发的途径。但是否还有比混沌运动更为有效的其他措施，这仍然是一个值得研究的问题。

计算与思考

1. 试举例说明非线性振动的工程应用概况。
2. 如何利用复摆和 Froude 摆测量轴与内套之间的摩擦系数？
3. 举出应用硬式和软式光滑非线性振动特性的工程实例。
4. 举出分段线性非线性振动系统的应用实例，并写出它的运动方程式。

5. 举出两个滞回非线性的工程应用实例，并写出该振动系统的运动方程式。

6. 举出自激振动系统的两个工程应用实例，并写出该振动系统的运动方程式。

7. 带有冲击的振动系统在工程中有广泛的应用，举出两个实际应用的例子。

8. 举出非线性波应用的两个例子，并写出它的运动方程式。

9. 频率俘获是非线性振动系统的特性之一，试说明频率俘获原理的工程应用，并写出同步运转的条件及同步运转状态的稳定性条件。

10. 列举混沌运动的工程应用实例，说明实现混沌有效利用的最基本条件是什么？

参考文献

1 包戈留包夫 N N，米特罗波尔斯基 Y A. 非线性振动理论中的渐近方法. 上海：上海科学技术出版社，1963

2 米特罗波尔斯基 Y A. 非线性振动系统的不稳定过程. 北京：科学出版社，1958

3 Nayfeh A H and Mook D T. Nonlinear Oscillations, John Wiley & Sons, 1979

4 Nayfeh A H Introduction to Perturbation Techniques, John Wiley & Sons, 1981

5 Nayfeh A H. Problems in Perturbatin, John Wiley & Sons, 1985

6 安德罗诺夫 A A，维特 A A，哈依金 C Z. 振动理论. 北京：科学出版社，1981

7 斯托克 J J. 力学及电学中的非线性振动 上海：上海科学技术出版社，1950

8 Minorsky N. Nonlinear Oscillations, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, New Jersey, 1962

9 邓哈陀 J P. 机械动力学. 北京：科学出版社，1956

10 Hayashi C Forced Oscillations in Nonlinear Systems, Nippon Printing and Publishing Co., Osaka, 1953

11 Hayashi Ch Selected Papers on Nonlinear Oscillations, Nippon Printing and Publishing Co., 1975

12 铁摩辛柯 S，扬 D，小韦孚 W. 工程中的振动问题 北京：人民铁道出版社，1978

13 马尔金 E G 非线性振动理论中的李雅普诺夫与邦加来方法. 北京：科学出版社，1959

14 哈尔克维奇 A A 自振. 北京：科学出版社，1959

15 Tondl A. Some Problems of Self-Exited Vibratiopn of Rotors, Bedhovice, 1974

16 Schmidt G and Tondl A. Non Linear Vibrations, Akademie-Verlag Berlin, 1986

17 巴巴科夫 N M 振动理论. 北京：人民教育出版社，1963

18 汤姆逊 W T 著. 振动理论及其应用. 北京：煤炭工业出版社，1980

19 Hsu, C S A Theory of Cell to-Cell Mapping: Amethod of Global Analysis for Nonlinear System. Springer-Verlag, 1987

20 Hsu, C. S. A Theory of Cell-to-cell Mapping Dynamical System, ASME, J. Appl. Mech. 47, 1980

21 Meirovitch L, Elements of Vibration Analysis, 1975

22 YASUDA Kimihiko and YE Jianrui, A Nonparametric Identification Technique in Time Domain for Mult. Degree-of-Freedom Vibratory Systems, JSME Int J., Ser. C, Vol. 36. No. 1, 1993, p, 9

23 YASUDA Kimihiko and YE Jianrui, Proposition of an Improved Nonparametric Identification Technique for Nonlinear Multi-Degree-of Freedom Vibratory System, JSME, Int., J., Ser. C. Vol. 36. No. 3, 1993, P288

24 Bathe K J. and Wilson E. L, Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hill, New Jersey, 1976

25 Harris C. M and Crede C. E. Shock and Vibration Handbook, McGraw-Hill, 1976

26 谷口修主编. 振动工程大全 北京：机械工业出版社，1983

27 前泽成一郎 非线性振动概论,机械的研究.1971,第23卷,第2~5号,力学译丛,1974.5
28 谷内俊弥,西原功修.非线性波动 北京:原子能出版社,1981
29 井上顺吉.机械力学.理工学社,1982
30 下乡太郎.随机振动最优控制理论及应用.北京:宇航出版社,1984
31 麻生和夫,谷顺二,长南征二,林一夫.机械力学.朝仓书店,1988
32 Schmidt P., Das Synchronisieren zweier Unwuchtruettler an Schwingmaschinen, Aufbereitungs Technik, 1976, No.3
33 Blehmann E. E., Synchronization of Dynamical System, Science Press, 1971(in Russian)
34 Blehmann E. E., Synchronization of Nature and Engineering, Sience Press, 1981(in Russian)
35 瓦尔特,霍尔曼.物料由于阻尼和质量结合对振动槽运动状态的影响.起重运动机械,1975.6,1976.1 译自《f+h》,1968,6
36 屈维德主编.机械振动手册.北京:机械工业出版社,1992
37 屈维德主编.机械工程手册,21编,机械振动. 北京:机械工业出版社,1978
38 唐照千,黄文虎主编.振动与冲击手册.北京:国防工业出版社,1992
39 胡海昌.多自由度结构固有振动理论.北京:科学出版社,1987
40 冯登泰.应用非线性振动力学.北京:中国铁道出版社,1982.8
41 朱因远,周纪卿.非线性振动和运动稳定性.西安:西安交通大学出版社,1992
42 王海期.非线性振动.北京:高等教育出版社,1992
43 丁文镜.工程中的自激振动.长春:吉林教育出版社,1988
44 季文美,方同,陈松其.非线性振动理论在机械工程中的应用.力学学报,1965.3
45 陈予恕.非线性振动.天津:天津科学技术出版社,1983
46 陈予恕,唐云等.非线性动力的现代分析方法.北京:科学出版社,1992
47 陈予恕,梅林涛.非线性参数振动系统的共振分叉解.中国科学,1990(9)
48 陈予恕,Langford W.F.非线性 Mathieu 方程的亚谐分驻解及欧拉动弯曲问题.力学学报,1988,20
49 陈予恕,叶敏,詹凯军.非线性 Mathieu 方程 1/2 亚谐分叉解的实验研究.应用力学学报,1990(4)
50 陈予恕.旋转轴横向振动和其能源的相互影响.天津大学学报,1964.17
51 陈予恕.求具有任意个准循环坐标的拟线性运动方程组概周期解的一个方法及应用.力学学报,1965.3
52 陈予恕.两自由度分段线性系统的一种解法.固体力学学报,1982(1)
53 戴德成.非线性振动.南京:东南大学出版社,1993
54 戴德成,蔡晶.非线性随机振动的一种改进的非高斯矩法 振动工程学报,1989,2(2)
55 郑兆昌主编 机械振动.北京:机械工业出版社,1980
56 郑兆昌 非线性系统动力分析的模态综合技术,应用数学与力学,1983,1(4)
57 郑兆昌,谭明一.非线性系统动态响应的数值计算方法,应用数学与力学,1990
58 徐业宜,张芷芬 具间隙和负阻尼自激振动理论及应用.机械工程学报,1995.3
59 徐业宜.轧钢机中自激振动问题.振动工程学报,1988(2)

60 徐业宜.有随机常系数的 Rayleigh 方程及其应用.上海力学,1983(3)
61 Xu Y Y, Self excited Vibration with Random Coefficient, ASME Vibration Analysis, 1989
62 关立章,姚小龙 摆式动滑动摩擦系数测定仪的理论研究.非线性振动、分叉及混沌 天津:天津大学出版社,1992
63 姚小龙,关立章 动滑动摩擦系数随相对速度变化规律的研究.非线性振动、分叉及混沌 天津:天津大学出版社,1992
64 黄文虎,陈滨,王照林.一般力学(动力学、振动与控制)最新进展 北京:科学出版社,1994
65 张阿舟等 实用振动工程.航空工业出版社,1997
66 杨叔子.控制理论基础 北京:清华大学出版社,1986
67 李骊.强非线性振动系统的定性理论与定量方法.北京:科学出版社,1997
68 黄安基.非线性振动.成都:西南交通大学出版社,1993
69 Kreuer K.凌复华译.非线性动力学系统的数值研究.上海:上海交通大学出版社,1989
70 陆启韶.分岔与奇异性.上海:上海科技教育出版社,1995
71 林锐,陈予恕,黄克累.多自由度非线性振动系统的多频分叉.数学物理学报,1989.19
72 朱照宣.非线性力学的浑沌现象,力学进展,1984 15
73 郝伯林,分叉、混沌、奇怪吸引子、湍流及其他,物理学进展,1983(3)
74 李继彬.混沌与 Melnikov 方法 重庆:重庆大学出版社,1988
75 刘曾荣等 中心对称型混沌.力学学报,1992 4
76 唐云 分叉理论方法及在化学反应器研究中的应用.数学的实践与认识,1992,3
77 程崇庆.共振情况下非自治系统的 Hopf 分叉 中国科学(A),1989,10
78 程崇庆 高维环面的 Hopf-Laudan 分叉.应用数学与力学,1989,10
79 江俊,徐健学.动力系统的胞化积分轨迹法.振动工程学报,1993,6(2)
80 徐健学.强迫范德波振荡的全局分岔的过渡区 非线性动力学学报,1998,5(3)
81 朱位秋.随机振动 科学出版社,1992
82 季文美,方同,陈松其.非线性振动理论在机械工程中的几个应用.力学学报,1965.3
83 方同,王真.随机振动时域模态分析若干新发展.振动工程学报,1988,1(2)
84 庄表中等 非线性随机振动理论及其应用 浙江大学出版社,1986
85 周传荣,赵淳生 机械振动参数识别及其应用.北京:科学出版社,1989
86 钟万勰,何穷,刘正兴.数值计算方法.北京:中国建筑工业出版社,1991
87 傅志方,华宏星.模态分析理论与应用 上海:上海交通大学出版社,2000
88 蔡福光,蔡承武,徐兆.振动理论 北京:高等教育出版社,1985
89 张准,汪凤泉 振动分析 南京:东南大学出版社,1991
90 刘秉正.非线性动力学与混沌基础 长春:东北师范大学出版社,1994
91 胡海岩,金栋平.基于分段线性吸振器的振动半主动控制.振动工程学报,1997.2
92 胡海岩 力学系统混沌的主动控制 力学学报,1996,26(4)
93 胡海岩 应用非线性动力学 北京:航空工业出版社,2000
94 胡海岩 分段线性系统动力学的非光滑分析.力学学报,1996,28(4)
95 Haiyan Hu, Simulation Complexities in the Dynamics of a Continuously Piecewise-Linear

Oscillator Chaos, Solitons & Fracals, 1995, Vol 5, No. 11

96 Haiyan Hu, Controlling Chaos of a Periodically Forced Non smooth Mechanical System. Acta Mechanical Sinca, 1995 11

97 闻邦椿，刘凤翘，刘杰.振动筛、振动给料机、振动输送机的设计与调试.北京：化学工业出版社，1989

98 唐驾时.自激振动系统的参数识别.振动与冲击，1991 1

99 徐耀玲，戴汝为.人工神经网络在系统辨识中的应用 自动化学报，1991.17(1)

100 杨建刚，戴德成等.利用结构化神经网络识别振动系统非线性特性.振动工程学报，1995，8(1)

101 顾仲权，马扣根，陈卫东.振动主动控制.北京：国防工业出版社，1997

102 Jin J.D , Bifurcations in a Two-Degree-of Freedom Elastic System with Follower Forces, J. Sound and Vibration, V. 126(2), 1988

103 Jin J.D , Bifurcation Analysis of Double Pendulum with a Force, J. Sound and Vibration, V. 154(2), 1992

104 Jin J.D., Stabity and Bifurcations of a Double Pendulum with a Follower Force, AIAA, 1989

105 Jin J.D., Stabity and Bifurcations of a Two-Dimensional Plate in Incompressible Flow, Aero-Hydroelasticity Developments and Applications, Seismological Press, 1993

106 金基铎，林影，邹光胜.悬臂输流管的颤振和浑沌运动分析.振动工程学报，1997(3)

107 郑吉兵，孟光.考虑非线性涡动时裂纹转子的分叉与混沌特性.振动工程学报，1997(2)

108 陈塑寰.结构振动分析的数值方法.长春：吉林科学技术出版社，1996

109 张阿舟.振动控制工程.机械工业出版社，1989

110 唐永杰，胡选利，戴德沛.振动主动阻尼控制的理论及策略.振动工程学报，1992(1)

111 章水强，骆振黄，陈之炎.转子振动主动控制评述.振动与冲击，1991(4)

112 丁文镜.减振理论.清华大学出版社，1988

113 丁文镜，王和祥.主动减振技术述评 力学与实践，1984(6)

114 唐永杰，胡选利，戴德沛.振动主动阻尼控制的理论及控制策略.振动工程学报，1992，5(3)

115 顾仲权.振动主动控制中低价控制器的优化设计.振动工程学报，1992，3(3)

116 章水强，骆振黄等.转子振动主动控制研究评述 振动与冲击，1991(4)

117 柳家权.转子系统振动主动控制的目的及对策.振动与冲击，1993(2)

118 Watanabe, T. and Yoshida, Reduced-order Active Vibration Control for High-Rise Building, JSME Int. J Ser. C, Vol 37, No. 3, 1994

119 Fujino Y. and Sumpow T., Active Control of Cable and Cable-Structure System, JSME Int. J. Ser. C. Vol 39, No 2, 1995

120 陈滨.现代数学理论与方法在动力学、振动与控制中的应用.科学出版社，1992

121 Toru WATANABE, Kazuo YOSHIDA. Reduced order Active Vibration Control for High-Rise Buildings JSME Int J. Ser C, Vol 37, No. 3, 1994

122 Yozo FUJINO, Thumanoon SUSUMPOW Active Control of Cable and Cable-Structure System. JSME Int. J. Ser. C, Vol 38, No. 2, 1995

123 张义民，宋占伟主编 振动利用与控制工程中的若干理论及应用．长春：吉林科技出版社，2000
124 陈关容．控制非线性动力系统的混沌现象．控制理论与应用，1997，14(1)
125 Chen G, Dong X, From Chaos to Order Perspectives and Methodologies in Controlling Chaotic Nonlinear Dynamic Systems International Journal of Bifucations and Chaos, 1993.3
126 Kapitaniak T, etal., Controlling Chaos without Feedback and Control Signals. International Journal of Bifurcations and Chaos, 1993.3
127 闻邦椿，顾家柳，夏松波，王正．高等转子动力学．机械工业出版社，2000.2
128 闻邦椿，刘树英，张纯宇，机械振动学．冶金工业出版社，2000.2
129 闻邦椿，刘凤翘．振动机械的理论及应用．北京：机械工业出版社，1982
130 闻邦椿，张天侠，徐培民．振动与波利用技术的新进展．沈阳：东北大学出版社，2000
131 闻邦椿，刘树英，何勍．振动机械的理论与动态设计方法．北京：机械工业出版社，2001
132 闻邦椿，刘凤翘，刘杰．振动筛、振动给料机、振动输送机的设计与调试．北京：化学工业出版社，1989
133 闻邦椿，赵春雨．机械系统的振动同步与控制同步．振动工程学报，1997.3.
134 闻邦椿．激振器偏移式自同步振动机运动规律的研究．应用力学学报，1987.4
135 闻邦椿，袁艺，王东．转子系统变刚度主动控制的非线性特性的研究．机械强度，1995.3
136 闻邦椿．振动的利用及各类振动机械的力学特性．机械强度，振动专辑，1978.7
137 闻邦椿．在直线振动机上物料运动的基本特征及参数选择．起重运输机械，1974
138 闻邦椿．共振输送机与共振筛的动力学特性及改善其工作性能的措施．起重运输机械，1975
139 闻邦椿．共振筛的动力学参数的选择与计算．矿山机械，1974
140 闻邦椿，关立章．平面单质体自同步振动机的同步理论．东北工学院学报，1979.2
141 闻邦椿，关立章．空间单质体与双质体自同步振动机的同步理论．东北工学院学报，1980.1
142 闻邦椿，林向阳．振动同步传动及其工业应用 机械工程学报，1984.4
143 闻邦椿．新型离心机工作参数的合理选择．矿山机电，1959.4，1959.6
144 闻邦椿，丁耀武．惯性圆锥破碎机的构造与计算，选矿文集．北京：冶金工业出版社，1960
145 闻邦椿．共振筛的构造及其理论的若干问题，选矿文集．北京：冶金工业出版社，1960
146 闻邦椿，袁惠群，袁艺，熊万里．具有慢变参数的非线性转子系统的动力学特性．哈尔滨工业大学学报，1998年增刊
147 闻邦椿，袁艺，熊万里，袁惠群．含慢变参数的非线性系统的振动特性．非线性动力学报，1998 6
148 闻邦椿，李以农，韩清凯，熊万里．含非线性惯性力的振动系统的强迫振动．工程力学进展，北京大学出版社，1998
149 闻邦椿，李以农．振动利用工程的近期发展及展望，院士展望21世纪．上海科学技术出版社，2000年6月
150 闻邦椿，李以农，何京力 波及波能利用技术的最新发展．振动工程学报，2000年1期

151 闻邦椿,赵春雨,宋占伟.机械系统的振动同步、控制同步、复合同步 工程设计,1999.3

152 闻邦椿,刘树英,李以农.非线性振动的利用及其发展.见:闻邦椿等主编.振动与波利用技术的新进展,沈阳:东北大学出版社,2000

153 Wen B. C., Li Y. N., Han Q K and Zhang H Some Nonlinear Dynamic problems in Process of Vibrating Compaction, The Proceedings of 10th World Congress on ToMM, 1999, Oulu, Finland

154 Wen B C., Some Nonlinear Vibration Problems in Mechanical Engineering, Proceedings of Asia-Pacific Vibration Conference, Melboune, Australia, 1991

155 Wen B.C., Vibratory Synchronization and Controlled Synchronization in Mechanical System, Proceedings of Asia-Pacific Vibration Conference, Kuala Lumpur, Malaysia, 1995

156 Wen B C. and Ji S. Q., Forced Oscillations of Nonlinear Systems with Impact, Dry Friction and Sectional Masses, Proceedings of the 9th Inter Conf. on Nonlinear Oscillations, Vol 3, p.58-62, kiev, USSR, Naykova Dumka, 1981

157 Wen B C. and Duan Z.S., Study on the Nonlinear Dynamics of Self-Propelled Vibrating Machines with Rocked Impact, Proceedings of 10th Inter Conf on Nonlinear Oscillations, P.798-801, Varna, Bulgaria, 1984

158 Wen B. C. and Wang Y. B., Theoretical Research, Calculation and Experiments of Cracked-Shaft Dynamic Response, Proceedings of Inter. Conf. on Rotating Machinery, Edinburg, U.K., 1988

159 Wen B C., Wang D., Yuan Y., Study on Nonlinear Characteristics of Changing Stiffiness Active Control of Rotor System, Proceedings of World Congress on Machine Theory and Mechanisms, Milan, Italy, 1995

160 Wen B C., Wu W.Y., Dynamic Characteristics of the Rotor with Axial Vibration. Proceedings of International Conference on Rotor Dynamics, Tokyo, Japan, 1986

161 Wen B.C., Tang B.X. and Wang Z.J., Dynamic Model, Experiment and Case Study of a Cracked Rotor, Proceedings of the Asia-Pacific Vibration Conference '95, Kuala Lumpur, Malaysia, 1995

162 Wen B.C., Zhang Y.M. and Liu Q.L., Response of Uncertain Nonlinear Vibration System with 2D Matrix Functions, International Journal of Nonlinear Dynamics, 1998.1

163 文成秀,姚玉玺,闻邦椿.用胞变换法分析分段线性系统周期运动的稳定性.振动工程学报,1989.3

164 文成秀,姚玉玺,闻邦椿 动力系统的胞映射-点映射综合法 振动工程学报,1997.4

165 文成秀,姚玉玺,闻邦椿.强迫 vn der Pol 振子的吸引子和吸引域.非线性动力学学报,1996 9

166 文成秀,闻邦椿.强迫 van der Pol 方程的全局稳定性,非线性动力学、振动与稳定性.中国科学技术出版社,1995

167 文成秀,姚玉玺,闻邦椿,富文敏 分段线性振动机械周期运动稳定性研究.机械科学与技术,1997.2

168 文成秀,姚玉玺,闻邦椿.动力系统胞映射 点映射法及其应用.东北大学学报,1997.2

169 文成秀,姚玉玺,闻邦椿.分段线性振动机械全局性态研究.矿山机械,1997.1

170 文成秀,姚玉玺,闻邦椿.胞变换绘图方法研究.矿山机械,1992

171 姚玉玺,文成秀,马云海,闻邦椿 分段线性非线性振动机械周期运动的分岔.非线性动力学报,1998(9)

172 Wen C.X. and Wen B C ,Global Stability Analysis of Nonlinear System with Piece wise Linearity Using Cell Mapping Method, Proceedings of 11th Inter.Conf on Nonlinear Oscilations, Budapest, Hungary, 1987

173 Wen C.X. and Wen B.C., Property of Attractors and domains of Attraction in Forced Van der pol Oscillations, Proceedings of Inter.Conf.on Structural Dynamics, Vibrations, Noise and Control, Hong Kong, 1995

174 Wen C.X. and Wen B.C., etc. Bifurcation in Nontinear Mechanical System with Piecewise Linearity, Proceedings of Inter. Conf.on Vibration Engineering, 1998, Dalian, China

175 李以农,芮延年,刘树英,闻邦椿 惯性振动圆锥破碎的新工艺及动力学分析.黄金,1997(4)

176 李以农,郑玲,闻邦椿. 一类具有参数慢变的非线性振动系统.重庆大学学报,2000,23(6):16-18

177 李以农,闻邦椿,李竟志.超低频可控震源振动采油机理及实验研究.见:闻邦椿等主编.振动与波利用技术的新进展,沈阳:东北大学出版社,2000

178 李以农,郑玲,闻邦椿.利用波动信息识别结构缺陷的研究.见:闻邦椿等主编.振动与波利用技术的新进展,沈阳:东北大学出版社,2000

179 李以农,闻邦椿,李竟志.可控振源振动采油机理及实验研究.振动与冲击,2000(3)

180 Li Y.N. and Wen B.C., Study on Dynamical Characteristics of Vibrating Cone Crusher, Proceedings of International Conference on Mechanical Transmissions and Mechanisms, Tianjing, 1997

181 Li Y N., Rui Y.N., Yuan Y., Wen B.C and Zhao Y., Fuzzy Changing Stiffness Active Control of Vibrating System of a Centrifuge Rotor, Proceedings of the 3rd China-Japan Conference on Filtration and Separation, 1996

182 Li Y.N., Wen B.C. etc Impedance-based Technique and Wave Propagation Mesurement for Non-destructive Evaluation, Proc of Inter. Conf. on Vibration Engineering, 1998, Dalian, Chian

183 Li Y.N., Wen B.C, etc. Study on Dynamic Characteristics of the Slow-changing Process in Intelligent Structure, Journal of Shock and Vibration, 2000.3

184 Li Y.N., Wen B.C. and Zhang T.X., Study on the Mechanism of Using the Controlled Hypocentre with Super Low-Frequency to Extract Oil with Vibration, Proceedings of Asia-Pacific Vibration Conference '97, Korea, 1997

185 Li Y.N., Lin Mi. Bifurcation and Chaos in Gear-pairs System with Piecewise Linearity, Proceedings of the Int Conf. on Mechanical Transmissions, , Chongqing, China, 2001

186 刘树英,韩清凯,闻邦椿.考虑物料作用的复合同步振动圆锥破碎机的动力学特性.机械工程学报,2001(6)

187 袁惠群,关立章.同步发电动暂态稳定性的非线性分析 沈阳建筑工程学院学报,1988(3)

188 袁惠群,关立章 非线性自治系统周期解的直接数值解法.沈阳建筑工程学院学报,1989(2)

189 袁惠群.发电机转子非线性振荡分析.沈阳建筑工程学院学报,1989.4

190 袁惠群,韩清凯,闻邦椿.具有非线性滞回特性的振动系统的稳定性及分岔行为分析.非线性动力学学报,1999.3

191 袁惠群,韩清凯、闻邦椿.具有非线性滞回特性的振动系统的稳定性及分岔行为分析.非线性动力学学报,1999.3

192 袁惠群,闻邦椿.转子 定子机匣系统局部碰摩的分叉与混沌行为研究.振动与波利用技术的新进展,沈阳:东北大学出版社,2000

193 袁惠群,闻邦椿,李鸿光.非线性转子局部碰摩故障的分叉与混沌行为.东北大学学报,2000(6)

194 Yuan H Q., Wen B C., Study on the Stability and Bifurcation Behavior of the Vibration System with Nonlinear Hysteresis Properties, Proceedings of Inter. Conf. on Vibration Engineering, 1998, Dalian, China

195 Yuan H Q., Wen B C., Li H G., Study on Bifurcation & Chaos Bihavior of the Rotor with Local Rubbing, Proceedings of the '99 Asia-Pacific Vibration Conference, 1999.12, Singapore

196 张义民,刘巧伶.具有多随机参数结构非线性特征值问题的随机特征对分析,非线性振动、分叉与混沌.天津:天津大学出版社,1992

197 张义民,陈塑寰,刘巧伶.具有随机参数的单自由度非线性振动系统的可靠分析.振动工程学报,1995(4)

198 张义民,闻邦椿,刘巧伶.动力响应灵敏度分析中的长期项消除.振动工程学报,1998.4

199 张义民,闻邦椿.非线性随机振动机的动力学研究.工程力学,1999.3

200 张义民,闻邦椿.振动压路机的随机压振力分析.见:闻邦椿等主编.振动与波利用技术的新进展,沈阳:东北大学出版社,2000

201 Zhang Y. M. and Wen B. C, Eigenvalue Problem of Constrained Flexible Multibody Systems, Mechanics Research Communication, Vol.24, 1997.1

202 Zhang Y. M., Wen B. C. and Chen S. H., PFEM Formalism in Kronecker, Notation, Mathematics and Mechanics of Solids, Vol.1, 1996, Dec. Nomber 4 445～461

203 Zhang Y. M., Wen B. C., First Passage of Umcertain Single Degree-of-Freedom Nonlinear Oscillators, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, January 1998

204 韩清凯,闻邦椿,赵春雨.不对称滞回非线性系统动力学特性.东北大学学报,1997年增刊

205 韩清凯,赵春雨,闻邦椿,付瑶.含慢变参数滞 系统的共振响应.东北大学学报,振动专辑,1996.4 增刊

206 韩清凯,张敬民,闻邦椿.摊铺机振动机构非线性动力学分析,非线性动力学、振动与运动稳定性.北京:中国科学技术出版社,1995

207 韩清凯,闻邦椿.简谐激励慢变参数滞回系统的振动分析.非线性动力学报,1998年增刊

208 韩清凯,闻邦椿 一种不对称滞回受迫振动系统及其分析.振动工程学报,1998年9月

209 韩清凯,刘树英,陈亚东,闻邦椿 几类含特殊滞回环节的机械系统的动力学.见:闻邦椿等主编.振动与波利用技术的新进展,沈阳:东北大学出版社,2000

210 韩清凯,王黎,闻邦椿.过氧化物酶 氧化酶反应系统的分叉与混沌特性分析.见:闻邦椿等主编 振动与波利用技术的新进展,沈阳:东北大学出版社,2000

211 韩清凯,刘杰,闻邦椿.不对称滞回模型的一般形式及其参数慢特性.振动与冲击,2000(3)

212 韩清凯,杨积东,张天侠,闻邦椿.含间隙支承的CT机回转系统的非线性动力学.机械工程学报,2001(3)

213 Han Q.K., Zhang J.M., Zhang H., Wen B.C., Identification of the Nonlinear System of the Vibration Compacting Machine, Proceedings of International Conference on Structural Dynamics, Vibration, Noise and Control, Hong Kong, 1995, 906~911

214 Han Q.K., Wen B.C, etc. Nonlinear Vibration of Mechanical System with Asymmetrical Picec-wisely Curvature Hysteresis, Proceedings of Inter. Conf. on Vibration Engineering, 1998, Dalian, China

215 Ji S.Q., Hou X.L., Liu S.Y., Wen B.C and Yu H, The Research on Nonlinear Theory of the Material Shock, Proceedings of the Asia-Pactific Vibration Conference '95, Kuala Lumpur, Malaysia, 1995

216 Liu J., Li X.Q., Wu L., and Wen B.C., Partial Differential Linearization on Mathematical Model of Electromagnetic Vibrating Machine, Proceedings of the Asia-Pacific Vibration Coference '95, Kuala-Lumpur, Malaysia, 1995

217 刘树英,袁艺,闻邦椿.考虑物料作用力时大倾角振动输送机动力学分析.东北大学学报,1996.3

218 刘树英,韩清凯,刘杰,闻邦椿.新型振动破碎机非线性动力学分析.振动与冲击,2000.3

219 张天侠,闻邦椿.一类质量偏置非线性力学系统受迫振动的分析,非线性振动、分叉及混沌.天津:天津大学出版社,1992

220 Zhang T.X., Wen B.C, Vibration Synchronization of the Double Exciters of the Vibrating Machime with Hydralic Motors, International Journal of Vibration & Noise, 1997.12

221 段志善,闻邦椿.蛙式打夯机的运动稳定性分析及摆杆长度的确定.工程机械,1988(1)

222 段志善,闻邦椿 自行摆动冲击式振动机非线性动力学的研究.振动与冲击,1985

223 范俭,闻邦椿,柴天佑.两台交流电动机驱动的机械系统定速比控制的研究.机械工程学报,1996.5

224 范俭,闻邦椿.反向回转双激振器振动机控制同步的理论研究.振动工程学报,1994(4):281~288

225 张辉,佟杰新,闻邦椿.控制规则可调整的模糊控制参数的优化.见:第一届全球华人智能控制与智能自动化会议论文集,北京:1993

226 骆明飞,林向阳,闻邦椿.大倾角振动筛及振动输送机的物料运动速度.起重运输机械,1987(6)

227 王凤兰,闻邦椿.具有横向裂纹的单盘转子系统的稳定性研究,非线性振动、分叉及混沌 天津:天津大学出版社,1992

228 王雁斌,闻邦椿.利用实测的振动响应曲线对有横向裂纹的转子轴承系统进行诊断的研究.第一届全国机器故障诊断会议论文集,沈阳,1986

229 戚靖洋,张国忠,隋松玲.单质体气动自激振动系统平衡状态的稳定性.凿岩机械气动工具,1997.3

230 张国忠,戚靖洋.气动冲击设备活塞的动力过程及点变换方法.矿山机械,1988.6

231 Zhao M.Y., Yuan P.Z. and Wen B.C., The Kinematic Model of General Six DOFs Parallel Manipulators for Simulation and Control, Proceedings of ASME Conference on Modeling, Simulation and Control, 1992

232 Tang B.X. and Wen B.C., Stability Analysis and Real Times System Linearized Control of a Rotor Suspended Magnetically, Proceedings of Asia-Pacific Vibration Conference '93, Japan, 1993

233 Tang B.X., Wen B.C., Jiang J.L. and Ma C.F., Dynamic Model and Stability of a Cracked Rotor, Proceedings of International Conference on Vibration Engineering, Beijing, 1994

234 Yuan Y. Liu S.Y. and Wen B.C., Study on Intelligent Fuzzy Control Method for a Centrifuge Rotor System, Proceedings of the International Conference on Motion and Vibration Control, Japan, 1993

235 Yuan Y. Liu S.Y. and Wen B.C., Fuzzy Changing Stiffness Control of the Unstable vibration of a Centrifuge Rotor, Proceedings of ASME 1997 Design Technical Conference on Mechanical Vibration and Noise, 1997

236 赵春雨,闻邦椿.多机传动机械系统的同步控制理论及应用.东北大学学报,1997(1)

237 赵春雨,朱洪涛,闻邦椿.多机传动机械系统的同步控制.控制理论与应用,1999(2)

238 Zhao C.Y. and Wen B.C., Dynamic Characteristics of the Asymmetrically Piecewise Linear Vibrating Machines, Proceedings of Asia Pacific Vibration Conference '93, Japan, 1993

239 余文,袁艺.离心机转子减振控制:一种新型的自适应混合控制.控制理论与应用,1998,14(2)

240 袁艺,闻邦椿等.慢变支承刚度对离心机转子不稳定自激振动的影响.东北大学学报,Vol.18,振动专辑,1997

241 熊万里,闻邦椿,段志善.自同步振动及振动同步传动的机电耦合机理.振动工程学报,2000

242 熊万里,段志善,闻邦椿.用机电耦合模型研究转子系统的非平稳过渡.应用力学学报,2000(4)

243 文成秀,赵长宽,闻邦椿.分段线性振动机械关于外激频率的分岔与混沌.东北大学学报,2001(2)

244 曹宗杰,闻邦椿,陈塑寰.智能机构振动控制中压电传感器与执行器位置的拓扑优化.振动工程学报,2001(1)

245 熊万里,闻邦椿,段志善.利用机电耦合模型研究自同步振动机械系统的动力学特性.矿山机械,1999.27(7)

246 赵春雨,闻邦椿,赵广耀.同向回转双机传动振动系统相位差的模糊监督控制.振动工

程学报,2001(1)

247 熊万里,闻邦椿.振动起动过程中的迟滞共振原因分析.力学与实践,1999(4)

248 熊万里,闻邦椿,段志善.转子系统瞬态过程的减幅特性及共振区迟滞特性.振动与冲击,1999.4

249 熊万里,闻邦椿,张天侠,段志善 利用机电耦合模型研究自同步振动机械系统的动力学特性.矿山机械,1999.27(7)

250 熊万里,董建国,闻邦椿.非线性弹性支承对转子系统瞬态过程的影响.西安建筑科技大学学报,1999.3

251 熊万里,闻邦椿.弹性连杆式振动机的机电耦合自同步特性.见:闻邦椿等主编.振动与波利用技术的新进展,沈阳:东北大学出版社,2000

252 熊万里,何勍,闻邦椿.机电耦合自同步系统的过渡过程分析.东北大学学报,2000.2

253 李鸿光,闻邦椿.一类可动边界的机械振动系统的混沌行为.东北大学学报,1999.8

254 李鸿光,闻邦椿.具有间隙与振动边界的自激振动系统的非线性振动.振动工程学报,2000(1)

255 李鸿光,闻邦椿,张建武.具有间隙的双向对称滞回模型的研究.见:闻邦椿等主编.振动与波利用技术的新进展,沈阳:东北大学出版社,2000

256 李鸿光,杨文平,闻邦椿.具有可动边界和间隙的机械系统自激振动分析和数值模拟.机械科学和技术,2000(2)

257 Li H Q, Wen B C, Self-excited Vibration in Rolling Mill with Clearance via Asymptotic Method and Numerical Method, Proceedings of Inter. Conf. on Vibration Engineering, 1998, Dalian, China

258 何勍,闻邦椿.双线性滞回系统周期激励下的响应.东北大学学报,1999.5

259 何勍,闻邦椿.振动塑性加工的进展及若干问题.辽宁工学院学报,1999.4

260 何勍,宋长清,闻邦椿.金属材料振动塑性加工的一个本构模型.见:闻邦椿等主编.振动与波利用技术的新进展,沈阳:东北大学出版社,2000

261 何勍,徐培民,闻邦椿.振动塑性加工中的慢变过程分析.见:闻邦椿等主编.振动与波利用技术的新进展,沈阳:东北大学出版社,2000

262 He Q, Wen B C., etc., Advances and Trends of Metal Plastic Deformation Processes with Vibration, Proceedings of Inter. Conf. on Vibration Engineering, 1998, Dalian, China

263 杨积东,徐培民,闻邦椿.Lyapunov 指数在旋转机械故障诊断中的应用.见:闻邦椿等主编.振动与波利用技术的新进展,沈阳:东北大学出版社,2000

264 杨积东,许培民,闻邦椿.裂纹扩展对转子动特性的影响.东北大学学报,2001,Vol.(2)

265 杨积东,许培民,闻邦椿.裂纹转子分叉、混沌行为研究中的映射延拓综合法.应用力学学报,2001.3

266 宋占伟,闻邦椿.电磁振荡及机械振荡的机理研究.见:闻邦椿等主编.振动与波利用技术的新进展,沈阳:东北大学出版社,2000

267 翁刚,高金吉,闻邦椿.旋转机械油膜失稳的机理及识别特征研究.见:闻邦椿等主编.振动与波利用技术的新进展,沈阳:东北大学出版社,2000

268 刘永熙,闻邦椿.社会经济现象中的非线性问题初探.见:闻邦椿等主编.振动与波利

用技术的新进展，沈阳：东北大学出版社，2000
269 刘永熙，闻邦椿．一个经济时间序列的分维研究．见：闻邦椿等主编．振动与波利用技术的新进展，沈阳：东北大学出版社，2000
270 王凤兰，闻邦椿．裂纹转子系统的弯扭耦合振动稳定性．见：闻邦椿等主编．振动与波利用技术的新进展，沈阳：东北大学出版社，2000
271 魏海燕，闻邦椿．惯性式圆锥破碎机的非线性动力学特性研究．见：闻邦椿等主编．振动与波利用技术的新进展，沈阳：东北大学出版社，2000
272 张泓，闻邦椿．振动压路机振动轮"跳振"过程中的动力学特性分析．见：闻邦椿等主编．振动与波利用技术的新进展，沈阳：东北大学出版社，2000
273 韩清凯，张天侠，杨积东，闻邦椿．带有间隙支承CT机回转系统的非线性动力学．机械工程学报，2001(3)
274 韩清凯，郝建山，闻邦椿．金属材料加工中的振动利用问题．中国机械工程，2001(5)
275 杨积东，徐培民，闻邦椿．裂纹扩展对转子动特性的影响．东北大学学报，2001(2)

附录 A 非线性动力系统数值分析演示程序

A.1 功能及特点

本程序基于 Poincaré 映射原理，用数值积分方法(定步长四阶 Runge-Kutta 法)演示非线性动力系统的特性。主要功能包括：①瞬态、稳态运动时域波形分析、相平面轨线分析、Poincaré 截面分析，②最大 Lyapunov 指数计算，③初值敏感性动画演示，④系统分岔、混沌性态研究等。另外，还可用来研究数值积分方法的性能，确定过渡过程的时间长度，考察分岔点附近临界慢化等一些特殊现象。

程序结构合理，各功能之间切换迅速，且易于扩充。虽以 Duffing 振子为例，但只要把系统描述文件“Duffing.c”稍加改造，即可用于分析其它系统(高于 2 维的系统亦可)。绕开数值积分模块后，就可用于分析离散动力系统。要增加新的分析功能，只需在设计好相应模块后，再添一个功能键定义即可。图形显示模块、标准输入输出模块编写规范，使用方便。以此为框架，该程序还可作为进一步开发非线性动力系统分析软件的基础。

本程序用 C 语言编写，由一个头文件(MAIN.H)和三个 C 源文件(DUFFING.C, GRAPH.C, DEMON.C)组成，计有 33 个函数。符号常量、宏定义、类型定义、全局变量等的说明见 A.4 节程序文本，各函数功能及其形参说明见 A.3 节。程序定义了两个波形窗口 Rwave[2]用来进行时域波形分析。一个相平面 win 窗口用来显示相轨线、Poincaré 截面及 Lyapunov 指数和作初值敏感性演示。一个分岔图窗口 Rbifur 和两个小的相平面窗口 win12[2]用来进行分岔分析并实时显示各分岔参数下从选定初始条件出发的稳态解的相轨线及 Poincaré 截面。

程序运行时先进入时域波形分析功能，之后由功能键 F3～F7 在各功能之间切换。其中 F3 启动时域波形分析，F4 进入相平面轨线分析，F5 启动 Poincaré 截面分析及最大 Lyapunov 指数计算，F6 进入初值敏感性动画演示，F7 进行系统分岔、混沌性态研究。另外，用 F1 键可顺序查看、F2 逆序查看系统参数(包括动力系统参数、数值积分参数等)设置。初值敏感性动画演示及系统分岔行为研究过程可击任意键打断，以便进入其它功能或更改系统参数设置后重新进入相应功能进行分析。Esc 键退出程序。时域波形分析由函数 wave_plot()完成。相轨线分析由函数 trajectory()完成。Poincaré 截面分析、最大 Lyapunov 指数计算和初值敏感性动画演示均由函数 Lyapunov_index()完成。函数 bifurcation()通过反复调用函数 trajectory()完成分岔分析。

本程序运行在 Turbo C 2.0 环境下，稍加改动即可用于其它 C 或 C++ 环境。在集成开发环境下生成可执行文件后，可用 F8 键启动单步运行，用 F7 键进入函数内部。全程跟踪一遍程序运行过程，有助于读者了解各常量、变量及语句的意义以及函数调用关系，熟悉程序结构和设计思想。对于刚接触 C 语言的读者，相信通过本程序的调试运行能加深对语言的理解，提高编程能力。

基于上述考虑，本附录未对程序作更详细的说明和注释。如有问题请联系

"xushuoϕ387@sina.com"。

A.2 应用举例

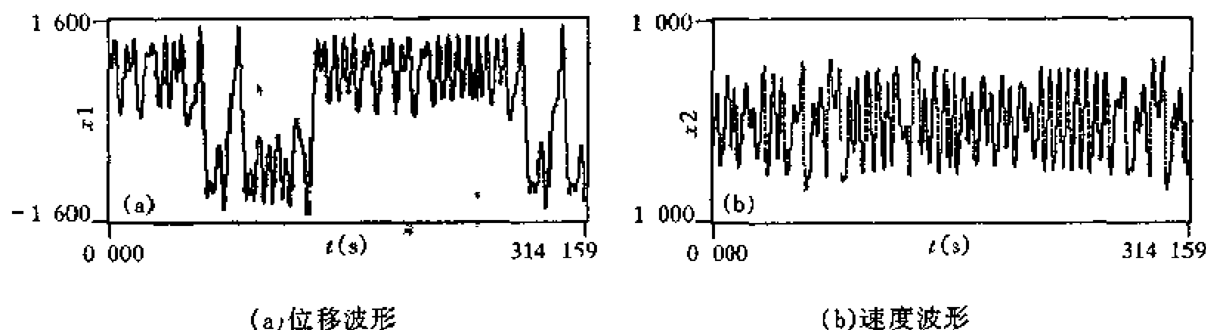
在 C 源文件 DUFFING.C 中对如下 Duffing 方程进行了描述：

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}-\frac{1}{2}x(1-x^2)=F\sin\omega_0 t \qquad (A-1)$$

其中 $\gamma=0.168$。下面用本程序来演示其共振解(即取 $\omega_0=1.0$)的性能。设每个扰力周期内积分 imT =200 步，T100=300 个扰力周期后得到稳态运动。

(1) 时域波形分析

取 $F=0.22$，从初始点(0, 0)出发，Duffing 振子的稳态位移和速度波形如图 A-1 所示(这里只画出了 PSD=50 个扰力周期内的波形)。其对应的相轨线见图 A-2(d)，Poincaré 截面见图 A-3(d)，幅值谱见图 A-4(d)。



(a)位移波形 (b)速度波形

图 A-1 时域波形分析

(2) 相平面轨线分析

从初始点(0, 0)出发，Duffing 振子稳态运动相平面轨线如图 A-2 所示(这里画出的是 PS =100 个扰力周期内的轨线，图中十字记号表示系统的静平衡点)。

(3) Poincaré 截面分析

对应图 A-2 各稳态解，Periods =10000 个扰力周期内的 Poincaré 截面(对周期运动即不动点图)如图 A-3 所示。P-n 周期运动有 n 个不动点，用小圆圈表示。

(4) 谱分析

本程序未包括谱分析模块。将时域波形数据存盘后，利用 windows 下的一些常用工具软件(如 Origin 等)的 FFT 模块即可进行谱分析。图 A-4 所示为对应图 A-2 各解位移分量的 FFT 幅值谱图(周期解波形长度为扰力周期的整倍数即整周期采样，不加窗)。横坐标 $r=\omega/\omega_0$ 为频率比，ω 为响应中谐波成分的圆频率，ω_0 为谐扰力频率。由图可见，P-1 解以与扰力同频的基频振动为主，并伴有高次谐波。P-2 解中出现了 $\frac{1}{2}$ 次谐波及其整倍数阶谐波，仍以基频振动为主。P-4 解中出现了 $\frac{1}{4}$ 次谐波及其整倍数阶谐波，基频振动幅度仍为最大，但次谐波的幅度相对来说也较大。混沌解谱图中基频分量处也有尖峰，但低频分量十分丰富。

(5) 分岔图及最大 Lyapunov 指数谱图

从初始点(0, 0)出发，选取扰力幅度 F 为分岔参数(par=0)，在 $F=0.14\sim0.25$ 范围里，以步长 $\Delta F=0.0001$ 作分岔图和 Lyapunov 指数谱图得图 A-5。其它参数设置为：瞬态

过程为 T100 300 个扰力周期，稳态响应统计 PS - 300 个扰力周期，每个扰力周期积分 imT - 200 步。

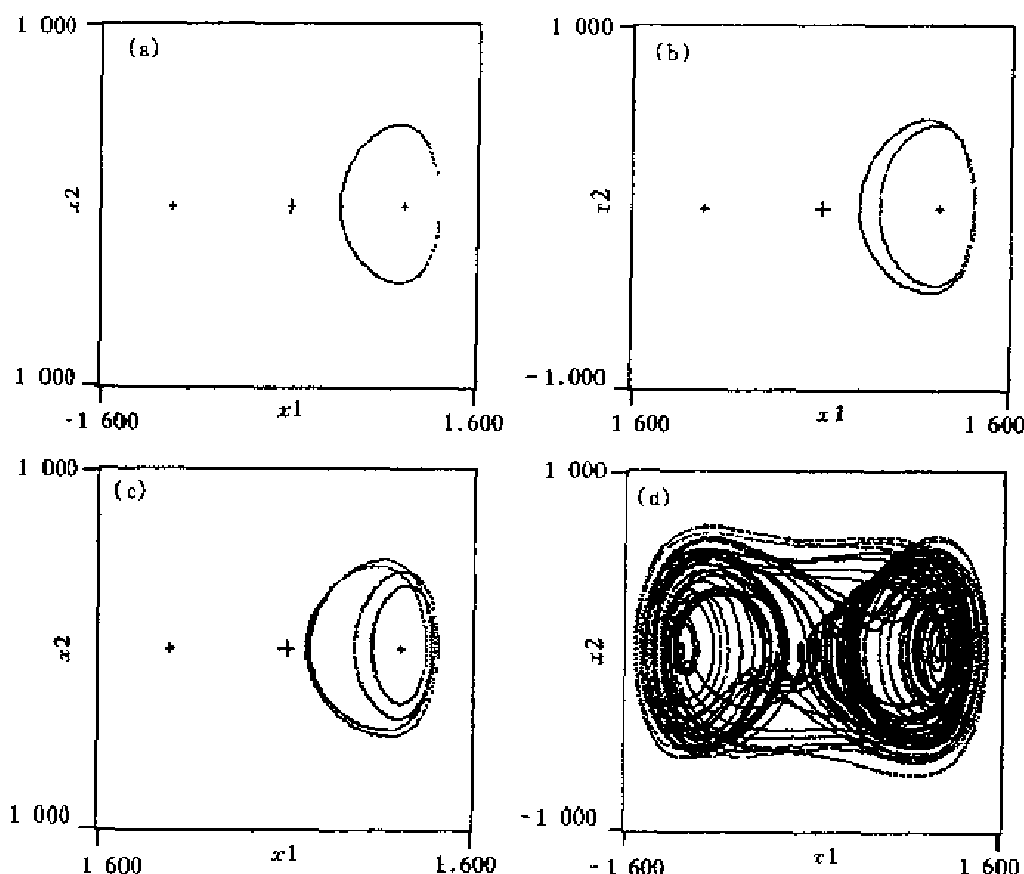


图 A-2 相平面轨线分析

(a) $F=0.150$, P 1 解；(b) $F-0.180$, P 2 解；(c) $F-0$ 198, P-4 解；(d) $F-0$ 220 混沌解

由图可见，系统在 $F=0.1770$ 附近发生 P-1 到 P-2 解的倍分岔，在 $F-0.1950$ 附近发生 P-2 到 P-4 解的倍分岔，在 F 0.1990 附近发生 P-4 到 P-8 解的倍分岔，在 $F=0.2050$ 附近进入轨线同时围绕三个静平衡点的大振幅混沌运动。在混沌区可看到几个周期窗口。由(b)图可见，周期解的最大 Lyapunov 指数小于零，混沌解的最大 Lyapunov 指数大于零。而在分岔点最大 Lyapunov 指数趋于零。最大 Lyapunov 指数的计算方法见本教材第 14 章第 7 节。

A.3 函数功能及形参说明

1. **void Func(DATA t, DATA * x, DATA * d)**：状态方程右端项定义及计算，由函数 RKT1()调用。形参 t 为时间变量，x 为状态向量，d 为右端项向量。

2. **int title(void)**：扰力周期 T 及积分步长 dt 计算及显示，运动方程显示。

3. **void disp _ settings(int par _ no, int w1 _ c0)**：调用函数 massage()在屏幕底部显示或擦除整型、浮点参数名称及当前值。形参 par no 为参数在其数组中的序号，w1 _ c0 赋 1 为显示，0 为擦除。

4. **void equilibrium(Rect * win)**：平衡点显示函数，由轨线、Poincaré 截面显示等函数调用。形参 win 为显示窗口。

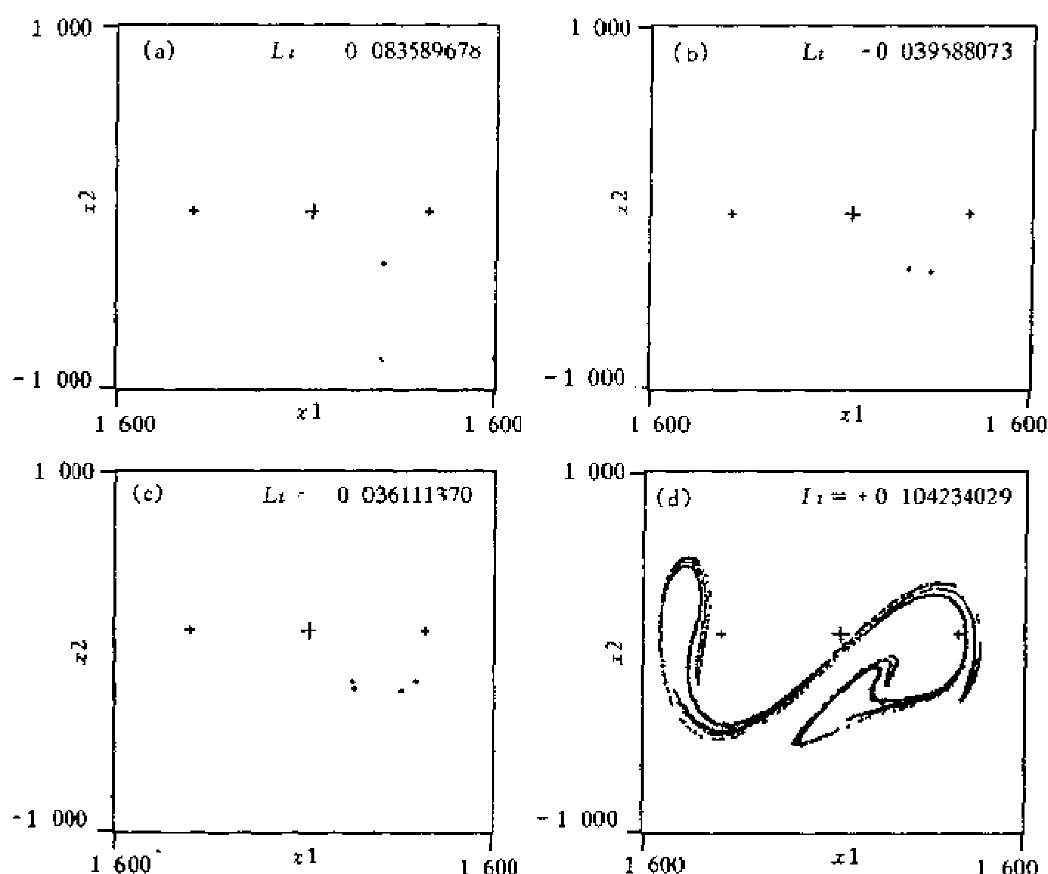


图 A-3 Poincaré 截面及 Lyapunov 指数

(a) $F=0.150$,P 1 解;(b) $F=0.180$,P 2 解;(c) $F=0.198$,P 4 解,(d) $F=0.220$ 混沌解

5. void clear_rec(int l, int t, int r, int b)：清除矩形区域。形参 t, b, l, r 分别为区域的上、下、左、右边界的图形坐标。

6. void print_value(int x, int y, DATA v, char * format)：在屏幕指定位置(x, y)以指定格式 format 输出一个浮点数 v。

7. void print_str(int x, int y, char * str)：在屏幕指定位置(x, y)输出一个字符串 str。

8. void axis_name(Rect * rec, char * name, int axis, int dir, int w1_c0)：在指定窗口 rec 边缘显示或擦除坐标轴名称，w1_c0 赋 1 为显示，0 为擦除。name = NULL 为空指针时，本函数根据由 axis 指定的状态变量序号自动生成坐标轴名称。dir 指定输出方向：0 为水平方向，1 为从下到上竖向显示；

9. void Init_rect(Rect * win)：计算矩形窗口 win 的中心点图形坐标。

10. char * Pr_Fm(char * s)：生成浮点数输出格式。

11. int lever(DATA f)：判定浮点数 f 的数量级。

12. void massage(char * str, int dx, int flag, int w1_c0)：字符串信息 str 显示或擦除。flag = 0、1 分别在屏幕底部倒数第二、第一行显示。w1_c0 赋 1 为显示，0 为擦除。

13. void massage_value(DATA d, char * fm, int dx, int flag, int w1_c0)：浮点信息 d 显示或擦除。flag = 0、1 分别在屏幕底部倒数第二、第一行显示。w1_c0 赋 1 为显示，0 为擦除。

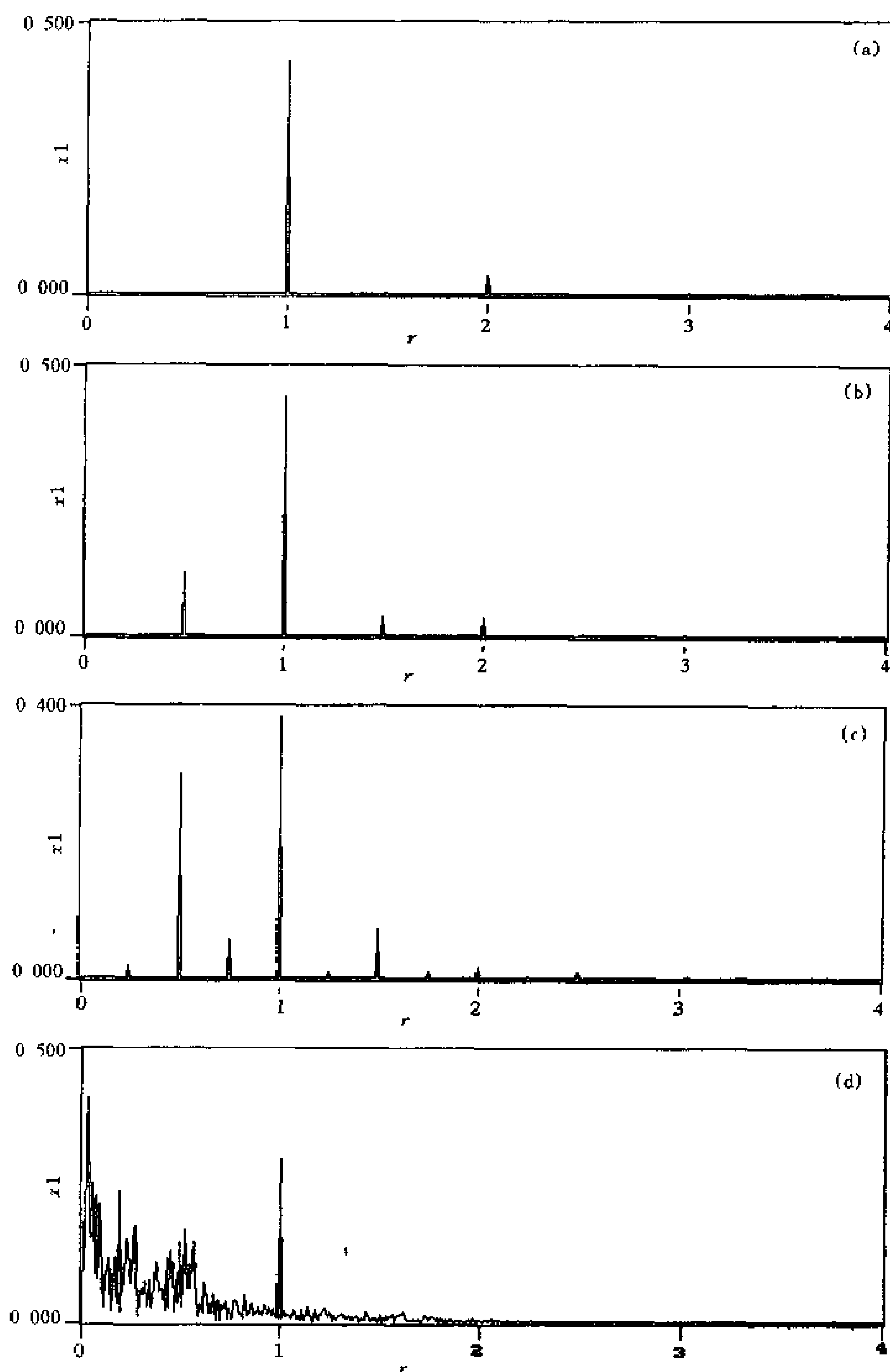


图 A-4　FFT 幅值谱图

(a) $F=0.150$, P-1解;(b) $F=0.180$, P-2解;(c) $F=0.198$, P-4解;(d) $F=0.220$ 混沌解

14. **void getstr(int K, int lim)**：从键盘获取字符并顺次存入 **KBinput** 中。**K** 为字符 ASCAⅡ码, lim 为最多输入的字符数。

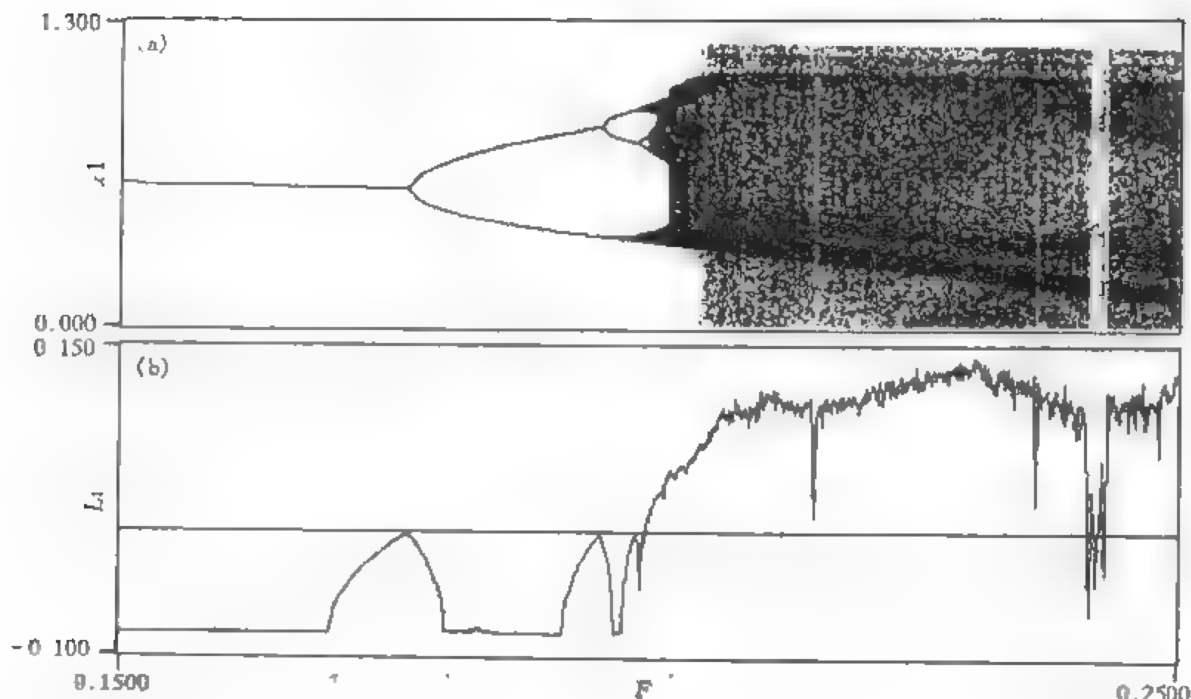


图 A-5 系统分岔混沌性能研究

(a) 分岔图； (b) 最大 Lyapunov 指数谱图

15. void Getstring(char * str)：调用函数 getstr()从键盘获取字符串于 KBinput 中。str 为提示信息。

16. void Init_fig(DATA xL, DATA xU, DATA yL, DATA yU, Rect * wv, int flag)：初始化图形显示窗口 wv。xL, xU, yL, yU 分别为水平、铅垂轴所代表物理量的上、下限。flag 选择窗口：flag=0 为波形窗口 1, flag=1 为波形窗口 2, flag>1 为分岔图窗口。

17. int plot_point(DATA * x, Rect * win, int p)：在 win 窗口所代表的相空间(dir[0], dir[1])平面上以颜色 p 画由状态向量 x 定义的相点。p=0 为擦除点, p=15 画小十字, p<0 画小圆圈。

18. void pr_time(time_t t)：系统时间显示。

19. void kedu_wave(Rect * win, int x, int y, int w1_c0)：显示或擦除窗口 win 的刻度。w1_c0 赋 1 为显示, 0 为擦除。

20. void Initialize(void)：屏幕图形初始化及 win 窗口初始化。

21. void Init_win12(Rect * win12, int y0)：分岔分析时两个小窗口初始化。

22. void frame(Rect * r, char * name1, char * name2, int dir1, int dir2, int w1_c0)：窗口 r 外框显示或擦除。w1_c0 赋 1 为显示, 0 为擦除。

23. int RKT1(DATA t, DATA * y)：定步长四阶 Runge-Kutta 法积分。t 为时间, y 为状态向量。

24. DATA distance(DATA * p, DATA * h)：计算相空间中两点 p 和 h 之间的欧氏距离。

25. int poicare(DATA * t0, DATA * x)：调用 RKT1()积分一个扰力周期。t0 为时间, x 为状态向量。

26. void wave_plot(DATA * x, Rect * wv)：wv 窗口波形显示。T100≠0 显示稳态

运动波形(T100 为设定的过渡过程时间长度,以扰力周期度量)。若将参数 T100 设置为零,则画瞬态运动波形。x 为初始条件。

27. int trajectory(DATA * x, DATA t0, Rect * bf, Rect * win, int flag):画瞬态、稳态运动相轨线、Poincaré 截面上的不动点及分岔图。flag 0 只画相轨线,flag 1 相轨线、不动点和分岔图同时画。x 为初始条件。

28. void read _ region(DATA * x):将物理边界 region[N][2]赋值给窗口 win 并取得初始条件于状态向量 x 中。

29. void bifurcation(Rect * bf, Rect * win):调用 trajectory()作分岔分析及画分岔图、不动点图、相轨线,击任意键可打断。bf 为分岔图窗口,win 指向不动点及相轨线显示窗口。

30. DATA Lyapunov _ index(DATA * x, DATA t0, Rect * rec, int flag):计算 Poincaré 截面及 Lyapunov 指数(flag<1)或作初值敏感性演示(flag>0)。x 为初始条件,t0 为初始时间,一般取作 0,rec 为工作窗口。

31. int menu(int y0):功能菜单显示,y0 为纵向参考位置。

32. void alter _ fig(int K, int K0, Rect * wv, Rect * bf, Rect * win12):功能切换准备(擦除原有窗口,画新窗口)。K0 代表当前功能,K 代表将要切换的功能。wv、bf、win12 分别指向波形窗口、分岔图窗口及不动点和相轨线两个小窗口。

33. main():主函数,整个程序由它组织。

A.4 程序文本

```
/*============以下内容在头文件 MAIN.H 中==================*/
#define DATA         double           /* 浮点数据类型宏定义           */
#define Lint         unsigned long    /* 长整型数据类型宏定义         */
#define ABS(x)       ( ((x)<0) ?  (x) : (x) )
#define MAX(a,b)     ( ((a)>=(b)) ? (a) : (b) )
#define MIN(a,b)     ( ((a)<=(b)) ? (a) : (b) )
#define ROUND(a)     ( ((a)<0) ? (int)((a)-0.5) : (int)((a)+0.5) )

#define N            2                /* 动力系统状态方程维数         */
#define PR _ FM      "lf"             /* 浮点数输出格式               */

typedef struct ractangle
{    int l, t, r, b;                  /* 窗口边界图形坐标值           */
     int cx, cy;                      /* 窗口中心点图形坐标值         */
     DATA factor[N];                  /* 物理坐标到图形坐标换算系数   */
     DATA region[N][2];               /* 窗口物理坐标边界             */
} Rect;                               /* 矩形图形显示窗口结构类型定义 */

#define LARROW       331              /* 光标左键键位码               */
```

```
#define RARROW      333          /* 光标右键键位码                        */
#define HOME        327          /* HOME 键键位码                         */
#define ENT         13           /* 回车键键位码                          */
#define ESC         27           /* ESC 键键位码                          */
#define END         335          /* END 键键位码                          */
#define BKSPACE     8            /* 退格(BackSpace)键键位码               */

#define F1          315          /* F1 功能键键位码                       */
#define F2          316          /* F2 功能键键位码                       */
#define F3          317          /* F3 功能键键位码                       */
#define F4          318          /* F4 功能键键位码                       */
#define F5          319          /* F5 功能键键位码                       */
#define F6          320          /* F6 功能键键位码                       */
#define F7          321          /* F7 功能键键位码                       */
#define F8          322          /* F8 功能键键位码                       */
/* ============以下内容在源文件 DUFFING.C 中=============                 */
#define parS        9            /* 关于 Duffing 方程共定义了 9 个浮点参数 */
#define F           param[0]     /* 谐扰力力幅                            */
#define omiga       param[1]     /* 谐扰力频率                            */
#define Alfa        param[2]     /* 负线性刚度系数                        */
#define Bata        param[3]     /* 位移三次方系数                        */
#define Delta       param[4]     /* 阻尼系数                              */
                                 /* 5~6 为初始条件                        */
#define pU          param[7]     /* 分岔参数上限                          */
#define dp          param[8]     /* 分岔参数步长                          */
#define ICposi      5            /* 初始条件在参数数组中的位置            */

#define SettingS    8            /* 8 个整型参数                          */
#define sin0cos1    setting[0]   /* 谐扰力 sin、cos 选择                  */
#define T100        setting[1]   /* 以扰力周期度量的瞬态过程时间长度      */
#define PS          setting[2]   /* 稳态运动时间长度                      */
#define PSD         setting[3]   /* 波形分析时间长度                      */
#define Periods     setting[4]   /* Poincaré 截面分析时间长度             */
#define Bifur_ampl  setting[5]   /* 选择位移/速度为分岔图纵坐标           */
#define imT         setting[6]   /* 每个扰力周期积分步数                  */
#define par         setting[7]   /* 分岔参数在数组 param[]中的位置        */
#define eps         param[par]   /* 分岔参数下限及当前值                  */

DATA    param[parS] = { 0.15, 1.0, 0.5, 0.5, 0.168, 0.0, 0.0, 0.25, 1.e-3};
DATA    T=1.;                    /* 扰力周期                              */
```

```
DATA     dt=0.01;                          /* 数值积分步长                  */
int      setting[SettingS] = {0, 300, 300, 50, 2000, 0, 200, 0};
DATA     region[N][2] = {{-2.5, 2.5}, {-2.5, 2.5}};
                                           /* 波形、轨线、不动点显示上、下限   */

/* 状态方程右端项定义,由函数 RKT1()调用.形参 t 为时间变量,x 为状态向量,d 为右端
项向量 */
void Func(DATA t, DATA *x, DATA *d)
{ d[0]    x[1];
  if (sin0cos1)
     d[1] = Alfa * x[0] - Delta * x[1] - Bata * x[0] * x[0] * x[0] + F * cos(omiga * t);
  else
     d[1] = Alfa * x[0] - Delta * x[1] - Bata * x[0] * x[0] * x[0] + F * sin(omiga * t);
}
int title(void)       /* 扰力周期 T 及积分步长 dt 计算及显示,运动方程显示.        */
{  char str[80];   int i, x=20, y=40;
   T = 8. * atan(1.0)/omiga;          dt = T/imT;
   If (sin0cos1) sprintf(str,
   "Duffing Equation: x'' + %  5.3fx'    % -4.2fx + % -4.2fx * x * x = % -6.4f
                      *
                      cos(%5.3f * t)",
       Delta, Alfa, Bata, F, omiga);
   else sprintf(str,
   "Duffing Equation: x'' + % - 5.3fx'    % -4.2fx + % -4.2fx * x * x = % -6.4f
                      ■
                      sin(%5.3f * t)",
       Delta, Alfa, Bata, F, omiga);
   setcolor(11); print _ str(20, 0, str); setcolor(15);
   sprintf(str, "T - %5.3fs", T); print  str(x, y, str); y + = 14;
   sprintf(str, "dt= % -7.3es", dt); print _str(x, y, str); y += 14;
   return y;
}
char * par _ name[parS] = {"F", "omiga", "k1", "k3", "damp", "ICx1", "ICx2",
                          "upper value of CP", "step of CP"      /* 浮点参数名称 */
char * set   name[SettingS] = {"sin0cos1", "transient cycles", "steady cycles", "wave
                              cycles", "Poincare cycles", "Bifur Ampl","segments per
                              cycle",
                              "control parameter"};              /* 整型参数名称 */
/* 在屏幕底部显示或擦除整型、浮点参数名称及当前值。形参 par   no 为参数在其 数组
中的序号,wl _ c0 赋 1 为显示,0 为擦除 */
```

```
void disp_settings(int par_no, int w1_c0)
{ str[0] = 0;
  if (par_no<parS)
  { if (ABS(param[par_no])<1.e-3)
      sprintf(str, "No %d: %s=%8.2le; ",
      par_no, par_name[par_no], param[par_no]);
      else
      sprintf(str, "No %d: %s=%10.7lf; ",
      par_no, par_name[par_no], param[par_no]);
  }
  if (par_no< SettingS)
  {  if (par_no= =SettingS-1)
     sprintf(KBinput, "%s=%s", set_name[par_no], par_name[par]);
     else
     sprintf(KBinput, "%s=%d", set_name[par_no], setting[par_no]);
     strcat(str, KBinput);
  }
  massage(str, 10, 1, w1_c0);            /* 信息显示函数,定义见后              */
}
/* 平衡点显示函数,由轨线、Poincaré 截面显示等函数调用。形参 win 指向显示窗口 */
void equilibrium(Rect *win)
{ int x, y, color=getcolor();      setcolor(7);
  x = win->l + (0.0-win->region[0][0]) * win->factor[0];
  y = win->b - (0.0-win->region[1][0]) * win->factor[1];
  if (x<win->r-5 && x>win->l+5 && y>win->t+5 && y<win->b-5)
  { line(x, y-4, x, y+4);     line(x-4, y, x+4, y); }
  if (Alfa * Bata>0.0)
  { x = win->l + (sqrt(Alfa/Bata) - win->region[0][0]) * win->factor[0];
    if (x<win->r-3 && x>win->l+3 && y>win->t+3 && y<win->b-3)
    { line(x, y-2, x, y+2);     line(x-2, y, x+2, y); }
    x = win->l + (-sqrt(Alfa/Bata) - win->region[0][0]) * win->factor[0];
    if (x<win->r-3 && x>win->l+3 && y>win->t+3 && y<win->b-3)
    { line(x, y-2, x, y+2);     line(x-2, y, x+2, y); }
  } setcolor(color);
}
/*=========以下内容在源文件 GRAPH.C 中==============*/
/* 清除矩形区域显示内容 */
void clear_rec(int l, int t, int r, int b)
{struct viewporttype v;     getviewsettings(&v);     setviewport(l, t, r, b, 0);
 clearviewport();           setviewport(v.left, v.top, v.right, v.bottom, v.clip);
```

```
}

/* 在屏幕指定位置以指定格式输出一个浮点数 */
void print_value(int x, int y, DATA v, char * format)
{ int w, h;     char str[80];     struct textsettingstype ty;
  gettextsettings(&ty);      sprintf(str, format, v);
  w = textwidth(str);     h = textheight(str);     y +   h;
  if (ty.direction == HORIZ_DIR) clear_rec(x, y, x+w, y+h);
  else clear_rec(x - h, y, x, y + w);
  outtextxy(x, y, str);
}
void print_str(int x, int y, char * str)     /* 在屏幕指定位置输出一个字符串  */
{ int w, h;     struct textsettingstype ty;
  gettextsettings(&ty);     w = textwidth(str);     h = textheight(str);     y+   h;
  if (ty.direction == HORIZ_DIR) clear_rec(x, y, x+w, y+h);
  else clear_rec(x-h, y, x, y+w);
  outtextxy(x, y, str);
}

/* 在指定窗口 rec 边缘显示或擦除坐标轴名称 */
void axis_name(Rect * rec, char * name, int axis, int dir, int w1_c0)
{ int x, y, w;
  if (!w1_c0) setcolor(0);   else setcolor(15);
  if (!name) sprintf(pr_fm, "x%d", axis + 1);     else strcpy(pr_fm, name);
  w = textwidth(pr_fm);                          settextstyle(0, dir, 1);
  if (dir) { x = rec->l - 10;   y = rec->cy-w/2;   clear_rec(x - 10, y, x, y +
  w); }
  else if (rec->r-rec->l<100)
  { y = rec->b + 4; x = rec->cx - w/2;   clear_rec(x-2, y-2, x+w, y+8);
  }
  else
  { y = rec->b + 10;   x = rec->cx - w/2;   clear_rec(x-2, y-2, x+w, y+
  8); }
  outtextxy(x, y, pr_fm);     if (dir) settextstyle(0, 0, 1);
  if (!w1_c0) setcolor(15);
}
/* 计算矩形窗口的中心点图形坐标   */
void Init_rect(Rect * win)
{ win->cx = (win->l+win->r)/2;     win->cy = (win->t+win->b)/2; }
```

```
/* 生成浮点数输出格式      */
char * Pr _ Fm(char * s)
{ sprintf(pr _ fm, "%s%s", s, PR _ FM);     return pr _ fm; }

int lever(DATA f)     /* 判定一个浮点数的量级   */
{int i = 0;   DATA a = 1.0;
 if (f < 1.0) { while( 1. - (f/a) > 1.e-1)      { i- -; a/=10.0;}}
 else { while(ABS(f/a) - 1.0>1.e-14)          { i+ +; a * =10.0; }}
 return (i);
}

/* 字符串信息显示或擦除,flag=0,1 分别在屏幕底部倒数第二、第一行显示 */
void massage(char * str, int dx, int flag, int w1 _ c0)
{  if (w1 _ c0)
   {    if (flag<0) print _ str(2 + dx, win.b + 8, str);
      else if (!flag) print _ str(2 + dx, win.b + 18, str);
      else print _ str(2 + dx, win.b + 28, str);
   }
   else if (str)
   {  setcolor(0);
        if (flag<0) print _ str(2 + dx, win.b + 8, str);
      else if (!flag) print _ str(2 + dx, win.b + 18, str);
      else print _ str(2 + dx, win.b + 28, str);
      setcolor(7);
   }
   else
   {    if (flag<0) clear _ rec(2 + dx, win.b + 16, MaxX - 1, win.b + 24);
      else if (!flag) clear _ rec(2 + dx, win.b + 26, MaxX - 1, win.b + 34);
      else clear _ rec(2 + dx, win.b + 36, MaxX - 1, win.b + 44);
   }
}

/* 浮点信息显示或擦除,flag=0、1 分别在屏幕底部倒数第二、第一行显示     */
void massage _ value(DATA d, char * fm, int dx, int flag, int w1 _ c0)
{  if (w1 _ c0)
   {  if (!flag) print _ value(2 + dx, win.b + 18, d, Pr _ Fm(fm));
      else        print _ value(2 + dx, win.b + 28, d, Pr _ Fm(fm));
   }
   else if (fm)
   {  setcolor(0);
```

```
        if (!flag) print_value(2 + dx, win.b + 18, d, Pr_Fm(fm));
        else print_value(2 + dx, win.b + 28, d, Pr_Fm(fm));
        setcolor(7);
    }
    else
    {   if (!flag) clear_rec(2 + dx, win.b + 17, MaxX - 1, win.b + 27);
        else clear_rec(2 + dx, win.b + 27, MaxX - 1, win.b + 37);
    }
}
void getstr(int K, int lim)          /* 从键盘获取字符并顺次存入 KBinput 中      */
{   static int i = 0;      int j;
    if (K >= 14 && K <= 126)
    {   KBinput[i] = K;
        if (i > lim) { massage("The buffer is full! ", win.l + 50, 1, 1); i--; }
        i++; KBinput[i] = 0;        massage(KBinput, win.l + 50, 1, 1);
    }
    switch (K)
    {   case 8: massage(KBinput, win.l + 50, 1, 0); if (--i < 0) { i = 0; break; }
                KBinput[i] = 0; massage(KBinput, win.l + 50, 1, 1);      break;
        case 13 : case F1: case F2:
                if (i && i < lim) massage(NULL, 0, 1, 0); else if (!i) KBinput[0] = 0;
                i = 0;                                                  break;
    }
}

void Getstring(char * str)        /* 从键盘获取字符串于 KBinput 中       */
{   int K;
    putch(7); massage(NULL, 0, 0, 0); massage(str, 0, 0, 1);
    do
    {   if (kbhit()) { K = getch(); if (!K) K = getch() + 256; getstr(K, 20); }
        if (K == ENT || K == F1 || K == F2) break;
    } while (1);
}

/* 初始化图形显示窗口        */
void Init_fig(DATA xL, DATA xU, DATA yL, DATA yU, Rect * wv, int flag)
{   * wv = win;
        if (!flag)          wv->b = wv->t + (wv->b - wv->t)/2 - 15;
    else if (flag == 1)     wv->t = wv->t + (wv->b - wv->t)/2 + 15;
    else    { wv->l = 70;   wv->t = flag; }    Init_rect(wv);
```

```
    wv->region[0][0] = xL;      wv->region[0][1] = xU;
    wv->region[1][0] = yL;      wv->region[1][1] = yU;
    wv->factor[0] = (wv->r-wv->l)/(wv->region[0][1] - wv->region[0][0]);
    wv->factor[1] = (wv->b-wv->t)/(wv->region[1][1] - wv->region[1][0]);
}

/* 在 win 窗口所代表的相空间(dir[0],dir[1])平面上以颜色 p 画由状态向量 x 定义的相
点 */
int plot_point(DATA *x, Rect *win, int p)
{ int xg, yg;      p = p%16;
    xg = win->l + (x[dir[0]] - win->region[dir[0]][0]) * win->factor[dir[0]];
    yg = win->b - (x[dir[1]] - win->region[dir[1]][0]) * win->factor[dir[1]];
    if (xg<win->l) xg = win->l+1;        if (xg>win->r) xg = win->r-1;
    if (yg<win->t) yg = win->t+1;        if (yg>win->b) yg = win->b-1;
    if (p>=0)
    { putpixel(xg, yg, p);
        if (p==15) /* 画十字花 */
        { putpixel(xg-1, yg, 10);        putpixel(xg+1, yg, 10);
          putpixel(xg, yg-1, 10);        putpixel(xg, yg+1, 10);
        }
    }
    else if (p<0)    /* 画小圆圈 */
    { int d = 0.1*MIN(win->factor[dir[0]], win->factor[dir[1]])/2;
        setcolor(9+p); circle(xg, yg, d/2);
    }
    return xg;
}

void pr_time(time_t t) /* 系统时间显示 */
{ int i; char *st;
    st = ctime(&t); i = strlen(st) - 1; st[i] = 0;   massage(st, 430, 1, 1);
}

/* 显示或擦除窗口刻度 */
void kedu_wave(Rect *win, int x, int y, int wl_c0)
{ char str[30];      int w;
    if (!wl_c0) setcolor(0); else setcolor(15);
    line(win->l-10, win->t, win->l-1, win->t);
    line(win->l-10, win->b, win->l-1, win->b);
    line(win->l, win->b+1, win->l, win->b+10);
```

```
    line(win->r, win->b+1, win->r, win->b+10);
    print_value(win->l-58, win->t-10, win->region[y][1], Pr_Fm("%6.
    3"));
    print_value(win->l-58, win->b-15, win->region[y][0], Pr_Fm("%6.
    3"));
    w = disp_period(str, 0, win->region[x][1], 0);
    print_value(win->l-28, win->b+5, win->region[x][0], Pr_Fm(str));
    if (w>6) w = (w-6) * textwidth("A"); else w = 0;
    print_value(win->r-28-w, win->b+5, win->region[x][1], Pr_Fm(str));
    if (!w1_c0) setcolor(15);
}

void Initialize(void)            /* 屏幕图形初始化及 win 窗口初始化      */
{  int i, j, xasp, yasp;        /* Used to read the aspect ratio        */
   int   GraphDriver;           /* The Graphics device driver           */
   int   GraphMode;             /* The Graphics mode value              */
   int   ErrorCode;             /* Reports any graphics errors          */
   int   width=400;

   GraphDriver = DETECT;        /* Request auto-detection               */
   initgraph( &GraphDriver, &GraphMode, "" );
   ErrorCode = graphresult();   /* Read result of initialization        */
   if( ErrorCode != grOk ){     /* Error occured during init            */
      printf(" Graphics System Error: %s/n", grapherrormsg( ErrorCode ) );
      exit( 1 );
   }

   MaxX = getmaxx();           MaxY = getmaxy();       /* Read size of screen */
   setcolor(10);               setbkcolor(0);
   rectangle(0, 0, MaxX, MaxY);  setcolor(15);
   getaspectratio( &xasp, &yasp );      /* read the hardware aspect    */
   win.t = 33;        win.b = win.t + width;
   win.l = 210;       win.r = win.l + width;
   for (i=0; i<N; i++)
   { win.factor[i] = (win.r-win.l)/(win.region[i][1]-win.region[i][0]); }
   Init_rect(&win);
}

/* 分岔分析时两个小窗口初始化   */
void Init_win12(Rect *win12, int y0)
```

```
{ int i, j;
  win12[0] - win12[1]    win;        win12[0].b    win12[1].b = y0;
  i = y0 - win.t;                    win12[1].l    win r - i;
  win12[0].r - win12[1].l - 70;      win12[0].l = win12[0].r    i;
  for (j  0; j<2; j++)
  { for (i  0; i<N; i++)
    { win12[j].factor[i] =
       (win12[j].r-win12[j].l)/(win12[j].region[i][1]-win12[j].region[i][0]);
    }
    Init _ rect(&win12[j]);
  }
}

void frame(Rect *r, char *name1, char *name2, int dir1, int dir2, int w1 _ c0)
{         /* 窗口外框显示或擦除       */
  axis _ name(r, name1, dir1, 0, w1 _ c0);     axis  name(r, name2, dir2, 1, w1 _ c0);
  if (name1) kedu _ wave(r, 0, 1, w1  c0); else kedu _ wave(r, dir1, dir2, w1  c0);
  if (w1  c0) rectangle(r->l-1, r->t-1, r->r+1, r->b+1);
  else clear  rec(r->l-1, r->t-1, r  >r+1, r->b+1);
}

/*  =========以下内容在源文件 DEMON.C 中==========*/
#include <dos.h>
#include <time.h>
#include <math.h>
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <string.h>
#include <stdlib.h>
#include <graphics.h>
#include "\demon.c\main.h"

Rect   win;                  /* 窗口 win 说明 */
char   pr _ fm[80], KBinput[80], str[80];
int    dir[2]  {0, 1};       /* 窗口代表相空间的(dir[0],dir[1])平面    */
int    MaxX, MaxY;

#include "\demon.c\duffing.c"
#include "\demon.c\graph.c"
```

```
int RKT1(DATA t, DATA *y)        /* Runge-Kutta 法积分,y 为状态向量      */
{  int i, k; DATA a[4], d[N], b[N], y0[N], tt;
   a[0]  a[1] ·dt/2;      a[2]  a[3]  dt;      Func(t, y, d);
   for(i=0; i<N; i++) y0[i] = b[i] = y[i];
   for (k=0; k<3; k++)
   {  for(i=0; i<N; i++)
      { y[i]  y0[i]+a[k]*d[i];      b[i]=b[i]+a[k+1]*d[i]/3; }
      tt  t+a[k]; Func(tt, y, d);
   }
   for (i  0; i<N; i++) y[i]=b[i]+dt*d[i]/6;
   return 0;
}

DATA distance(DATA *p, DATA *h)       /* 计算相空间中两点之间的欧氏距离 */
{  int j, jm=N;      DATA   D, dist=0.;
   for (j=0; j<jm; j++) { D  · h[j]  p[j];     D *= D;      dist += D; }
   return(sqrt(dist));
}

int poicare(DATA *t0, DATA *x)        /* 积分一个扰力周期,x 为状态向量 */
{  DATA t= *t0;       int i;
   for (i=1; i<=imT; i++) { t += dt; if (RKT1(t, x)) return 0; }
   *t0   t; return 1;
}

/* 画稳态运动波形,若将参数 T100 设置为零,则画瞬态运动波形,x 为初始条件 */
void wave  plot(DATA *x, Rect *wv)
{  int i, j;      DATA t =0.0, t0, w  t[2];      Lint k, m  PSD;
   frame(&wv[0], "t(s)", NULL, dir[0], dir[0], 1);
   frame(&wv[1], "t(s)", NULL, dir[0], dir[1], 1);
   sprintf(str, "%s=%d, %s=%d", set_name[T100posi], T100,
            set_name[PSDposi], PSD);
   massage(NULL, 0, 0, 0); massage(str, 0, 0, 1);
   massage("Wait a moment......", 0, 1, 1);
   for (i=0; i<T100; i++) { if (!poicare(&t, x)) return; }
   t0 = t; m *= imT;
   for (k=0l; k<m; k++)
   {  t += dt; w_t[0] = t  t0;      if (RKT1(t, x)) return;
      w  t[1] = x[dir[0]];      plot_point(w_t, &wv[0], 12);
      w  t[1] = x[dir[1]];      plot  point(w_t, &wv[1], 12);
```

```
    }
    massage(NULL, 0, 1, 0);        putch(7);
}

/* 画瞬态、稳态运动相轨线、Poincaré 截面上的不动点及分岔图。x 为初始条件 */
int trajectory(DATA * x, DATA t0, Rect * bf, Rect * win, int flag)
{   int i, j; DATA t=0.0; Lint k, m=PS;
    clear_rec(win[0].l, win[0].t, win[0].r, win[0].b); equilibrium(&win[0]);
    if (flag)
    { clear_rec(win[1].l, win[1].t, win[1].r, win[1].b); equilibrium(&win[1]); }
    else
    {   sprintf(str, "%s=%d, %s=%d", set_name[T100posi], T100,
                set_name[PSposi], PS);
        massage(NULL, 0, 0, 0); massage(str, 0, 0, 1);
        massage("Wait a moment......", 0, 1, 1);
    }
    for (i=0; i<T100; i++) { if (!poicare(&t, x)) return 0; }
    m *= imT;
    for (k=0l; k<m; k++)
    {   t += dt;        if (RKT1(t, x)) return 0;        plot_point(x, &win[0], 10);
        if (flag && !(k%imT))
        {   DATA w_p[2];
            plot_point(x, &win[1], 10); w_p[0] = eps;
            w_p[1] = x[Bifur_ampl]; plot_point(w_p, bf, 14);
        }
    }
    equilibrium(&win[0]);
    if (flag) equilibrium(&win[1]); else massage(NULL, 0, 1, 0);
    return 0;
}

/* 将物理边界赋值给窗口 win 并取得初始条件 */
void read_region(DATA * x)
{   int i, j;
    for (i=0; i<N; i++)
    {   for (j=0; j<2; j++) win.region[i][j] = region[i][j];
        x[i] = param[ICposi+i];
    }
}
```

```
/* 分岔分析及画分岔图、不动点图、相轨线，击任意键可打断 */
void bifurcation(Rect *bf, Rect *win)
{  int i;    DATA x[N], t=0.;
   massage(NULL, 0, 0, 0);      massage(NULL, 0, 1, 0);
   frame(bf, par_name[par], NULL, dir[0], Bifur_ampl, 1);
   frame(&win[0], NULL, NULL, dir[0], dir[1], 1);
   frame(&win[1], NULL, NULL, dir[0], dir[1], 1);
   sprintf(str, "%s=%d, %s=%d", set_name[T100posi], T100,
              set_name[PSposi], PS);
   massage(NULL, 0, 0, 0);      massage(str, 0, 0, 1);
   massage("Wait a moment......", 0, 1, 1);
   do
   {  read_region(x); sprintf(str, "%s=%10.6lf", par_name[par], eps);
      axis_name(bf, str, 0, 0, 1); trajectory(x, t, bf, win, 1);
      if (kbhit()) { i=getch(); if (!i) i=getch()+256; break; }
      eps += dp;
   } while (eps<pU); title(); axis_name(bf, str, 0, 0, 0); putch(7);
   axis_name(bf, par_name[par], 0, 0, 1); massage(NULL, 0, 1, 0);
}

/* 计算 Lyapunov 指数、初值敏感性演示 */
DATA Lyapunov_index(DATA *x, DATA t0, Rect *rec, int flag)
{  int k;     Lint i, m, m0;
   DATA d0=0.001, lnd0, d, sum_ln_di=0.0, t=t0; DATA z[N], x0[N], z0[N];
   massage(NULL, 0, 0, 0);      massage("Wait a moment......", 0, 1, 1);
   if (flag<1)
   {  d0=0.00001; m = Periods;
      sprintf(str, "%s=%d, %s=%d", set_name[T100posi],
                  T100, set_name[Periodsposi], Periods);
      massage(str, 0, 0, 1);
   }
   else
   {  clear_rec(rec->l, rec->t, rec->r, rec->b);
      d0=0.001;      if (flag>10) m = T100+101;    else m = T100+flag;
      sprintf(str, "%ld cycles will be integrated", m);     massage(str, 0, 0, 1);
   }
   for (k=0; k<N; k++) { z[k] = z0[k]=x[k] + d0;     x0[k] = x[k]; }
   plot_point(x0, &win, 10);      plot_point(z0, &win, 12);
   d0=distance(x, z); lnd0 = log(d0);
   m *= imT; m0 = T100 * (Lint)imT;
```

```
if (flag<1)
{  for (k=0; k<N; k++) { x[k] = x0[k]; z[k] = x[k] + d0; }
   for (i=0l; i<m0; i++)
   { t += dt; if (RKT1(t, x)) return 0; if (RKT1(t, z)) return 0;
     d = distance(x, z); sum_ln_di += log(d);
     for (k=0; k<N; k++) z[k] = x[k] + d0*(z[k]-x[k])/d;
   }
   for (; i<m; i++)
   {  t += dt; if (RKT1(t, x)) return 0; if (RKT1(t, z)) return 0;
      if (flag<0 && (!(i%imT))) plot_point(x, rec, 10);
      d = distance(x, z); sum_ln_di += log(d);
      for (k=0; k<N; k++) z[k] = x[k] + d0*(z[k]-x[k])/d;
   }
   d0 = m; d = sum_ln_di/d0; d = (d - lnd0)/dt;
   equilibrium(&win); massage(NULL, 0, 1, 0);
   massage_value(d, "Li=%+13.9", 0, 1, 1);
}
else if (imT<=200)
{  DATA X0[400][N], Z0[400][N]; int h=0, im=2*imT; equilibrium(&win);
   for (i=0l; i<im; i++)
   {  t += dt; if (RKT1(t, x)) return 0; if (RKT1(t, z)) return 0;
      for (k=0; k<N; k++) { X0[h][k] = x[k]; Z0[h][k] = z[k]; }
      plot_point(x, rec, 10); plot_point(z, rec, 12);     h++;
   }
   h = 0;
   {  plot_point(X0[h], rec, 0);     plot_point(Z0[h], rec, 0);     t += dt;
      if (RKT1(t, x)) return 0; if (RKT1(t, z)) return 0;
      for (k=0; k<N; k++) { X0[h][k] = x[k]; Z0[h][k] = z[k]; }
      plot_point(x, rec, 10); plot_point(z, rec, 12);
      if (!(i%imT)) equilibrium(&win);
      if (++h>=im) h = 0;
      if (kbhit()) { i = getch(); if (!i) i=getch()+256; break; }
      delay(200);
   }
   for (; i<m0; i++)
   {  plot_point(X0[h], rec, 0);     plot_point(Z0[h], rec, 0);     t += dt;
      if (RKT1(t, x)) return 0;      if (RKT1(t, z)) return 0;
      for (k=0; k<N; k++) { X0[h][k] = x[k];      Z0[h][k] = z[k]; }
      plot_point(x, rec, 10);      plot_point(z, rec, 12);
      if (!(i%imT)) equilibrium(&win);
```

```
        if (++h>=im) h = 0;
        if (kbhit()) { i = getch(); if (!i) i=getch()+256; break; }
        delay(10);
      }
      for (; i<m; i++)
      { plot_point(X0[h], rec, 0);     plot_point(Z0[h], rec, 0);     t += dt;
        if (RKT1(t, x)) return 0;     if (RKT1(t, z)) return 0;
        for (k=0; k<N; k++) { X0[h][k] = x[k];     Z0[h][k] = z[k]; }
        plot_point(x, rec, 10);     plot_point(z, rec, 12);
        if (!(i%imT)) equilibrium(&win);
        if (++h>=im) h = 0;
        if (kbhit()) { i = getch(); if (!i) i=getch()+256;     break; }
        delay(200);
      }
      plot_point(x, rec, -5); plot_point(z, rec, -6);
      plot_point(x0, &win, -10); plot_point(z0, &win,  12);
      massage(NULL, 0, 1, 0); putch(7); equilibrium(&win);
   }
   else
   { massage("I've not enough memery to do this job!", 0, 1, 1); putch(7);
   }
   plot_point(x0, &win, 0); return(d);
}

int menu(int y0)      /* 功能菜单显示 */
{  int i, x=10, y=y0+10;     setcolor(12);
   for (i=1; i<8; i++)
   { sprintf(KBinput, "F%d:", i);     print_str(x, y, KBinput);     y += 14;}
   x += 30; y = y0+10; setcolor(10);
   print_str(x, y, "Display settings(+)");        y += 14;
   print_str(x, y, "Display settings(  )");       y += 14;
   print_str(x, y, "Time History");               y += 14;
   print_str(x, y, "Trajectory");                 y += 14;
   print_str(x, y, "Poincare & Lyapunov");        y += 14;
   print_str(x, y, "sensitivity to IC");          y += 14;
   print_str(x, y, "Bifurcation Plot");           y += 14;
   return y;
}

/* 功能切换准备,K0 代表当前功能,K 代表将要切换的功能 */
```

```
void alter_fig(int K, int K0, Rect *wv, Rect *bf, Rect *win12)
{
  if (K>=F3 && K<=F7)
  {  if (!K0 && (K==F3 || K==F7))
       frame(&win, NULL, NULL, dir[0], dir[1], 0);
     if (K0==F3)
     { if (K!=F3)
        {  frame(&wv[0], "t(s)", NULL, dir[0], dir[0], 0);
           frame(&wv[1], "t(s)", NULL, dir[0], dir[1], 0);
        }
        else
        {  clear_rec(wv[0].l, wv[0].t, wv[0].r, wv[0].b);
           clear_rec(wv[1].l, wv[1].t, wv[1].r, wv[1].b);
        }
     }
     if (K0==F7)
     {  if (K!=F7)
         {  frame(bf, par_name[par], NULL, dir[0], Bifur_ampl, 0);
            frame(&win12[0], NULL, NULL, dir[0], dir[1], 0);
            frame(&win12[1], NULL, NULL, dir[0], dir[1], 0);
         }
         else clear_rec(bf->l, bf->t, bf->r, bf->b);
     }
     if ((K0==F3 || K0==F7) && K>F3 && K<F7)
       frame(&win, NULL, NULL, dir[0], dir[1], 1);
  }
}
/* 主函数     */
main()
{
  int i, y0, K, K0=F3, par_no=0;          Rect Rwave[2], Rbifur, win12[2];
  DATA x[N], f, t=0.0;                    time_t t0=0, tt;
  read_region(x); Initialize();       y0 = title();
  Init_fig(0., T*PSD, region[dir[0]][0], region[dir[0]][1], &Rwave[0], 0);
  Init_fig(0., T*PSD, region[dir[1]][0], region[dir[1]][1], &Rwave[1], 1);
  y0 = menu(y0) + 24;
  Init_fig(eps, pU, region[Bifur_ampl][0], region[Bifur_ampl][1], &Rbifur, y0);
  Init_win12(win12, y0-40);
  wave_plot(x, Rwave);                  /* 预置屏幕为波形分析功能          */
  do
```

```
{ if (kbhit())                                  /* 检测是否有按键                    */
  { K = getch(); if (!K) K=getch()+256;        /* 取得键位码                        */
    if (K>F2 && K<F8)
  { if (K!=F7)
    { alter_fig(K, K0, Rwave, &Rbifur, win12); read_region(x); switch(K)
    { case F3: wave_plot(x, Rwave); case F4: trajectory(x, t, &Rbifur, &win,
      0); putch(7); break;
      case F5: Lyapunov_index(x, 0., &win, -1); putch(7); break;
      case F6: Lyapunov_index(x, 0., &win, 10); break;
      case F7: sprintf(str,
      "The interval of CP is [%10.6lf - %10.6lf], the step of CP is %9.4le",
              eps, pU, dp);
              massage(str, 0, 0, 1);          massage(NULL, 0, 1, 0);
              sprintf(str,
       "and the IC is (%10.6lf - %10.6lf), Continue(y/n)?",
              param[ICposi], param[ICposi+1]);
              putch(7); massage(str, 0, 1, 1);
              if (i=getch(), i!='y' && i!='Y')
              { massage(NULL, 0, 0, 0); K = K0;
                massage(NULL, 0, 1, 0); break;
              }
              alter_fig(K, K0, Rwave, &Rbifur, win12);
              bifurcation(&Rbifur, win12);      break;
       default:   break;
       }
       if (K==F3 || K==F7) K0 = K; else K0 = 0;
    }
    else if (K==F1 || K==F2 || K==HOME || K==END)
    { i = MAX(parS, SettingS); disp_settings(par_no, 0);
      switch(K)
      { case F1:       par_no++; if (par_no==i) par_no = 0;       break;
        case F2:       par_no--; if (par_no<0) par_no = i - 1; break;
        case HOME:     par_no = 0;                                  break;
        case END:      par_no = i - 1;                              break;
      }
      disp_settings(par_no, 1);
    }
    else switch(K) { case BKSPACE: massage(NULL, 0, 0, 0); break; }
    if (K==ESC) break;          /* 退出程序   */
  }
```

```
    if (time(&tt) - t0 > 11)
    { t0 = tt; setcolor(11); pr_time(tt); setcolor(15); }
  } while(1);

  closegraph();
}
/* 程序文本结束 */
```